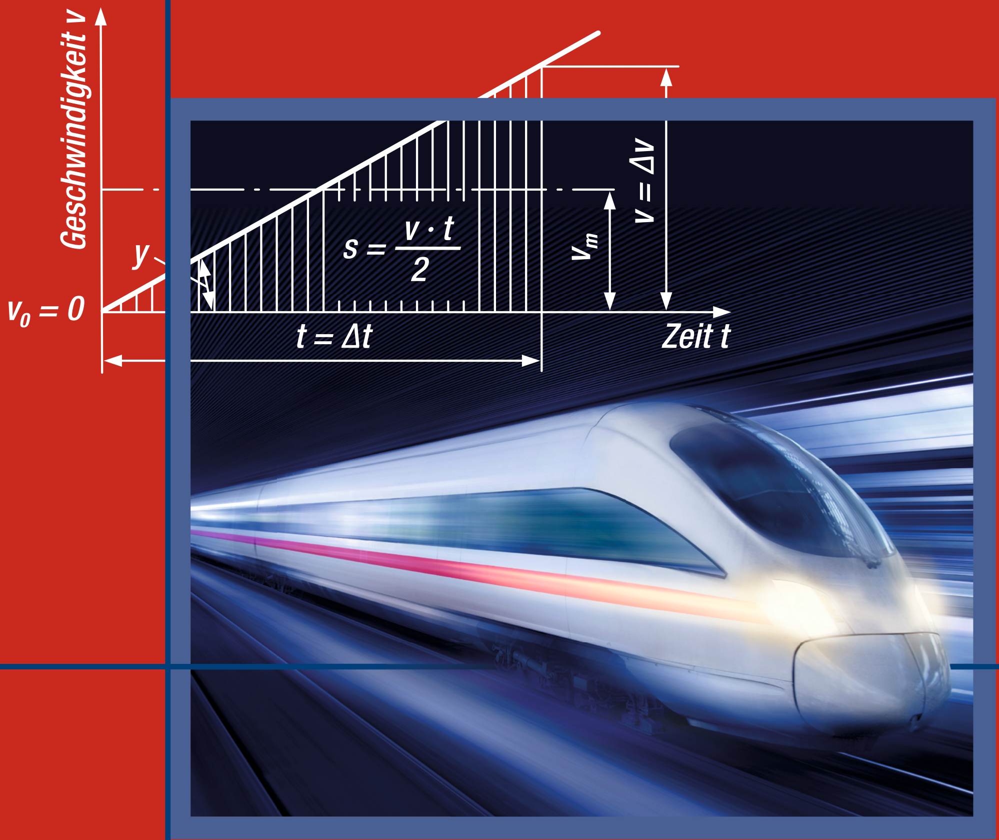
Karlheinz Kabus
Bernd Kretschmer
Peter Möhler

PLUS.HANSER-FACHBUCH.DE

Mechanik und Festigkeitslehre



9., aktualisierte Auflage

HANSER

Kabus/Kretschmer/Möhler

Mechanik und Festigkeitslehre

Karlheinz Kabus
Bernd Kretschmer
Peter Möhler

Mechanik und Festigkeitslehre

9., aktualisierte Auflage

HANSER

Die Autoren:

Dipl.-Ing. Karlheinz Kabus, Studiendirektor i. R. (†)

Dipl.-Ing. Bernd Kretschmer, Studiendirektor an der Staatlichen Technikerschule Berlin i. R.

Dr.-Ing. Peter Möhler, Studiendirektor an der Staatlichen Technikerschule Berlin

MIX
Papier aus verantwortungsvollen Quellen
FSC® C083411

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek:
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Internet: www.hanser-fachbuch.de

Lektorat: Frank Katzenmayer
Herstellung: Frauke Schafft
Covergestaltung: Max Kostopoulos
Coverkonzept: Marc Müller-Bremer, www.rebranding.de, München
Titelmotiv: © gettyimages.de/Michael Dunning
Satz: Lumina Datamatics Ltd.
Druck und Bindung: CPI books GmbH, Leck
Printed in Germany

Print-ISBN 978-3-446-47902-9
E-Book-ISBN 978-3-446-47903-6

Vorwort

Mechanik und Festigkeitslehre gehören zu den wichtigsten theoretischen Grundlagen jedes Technikers und Ingenieurs. Das vorliegende Buch will dem studierenden Nachwuchs bei der Erarbeitung dieser Grundlagen behilflich sein und ihn zur selbstständigen Lösung praktischer Aufgaben befähigen. Es ist besonders für den Gebrauch an Technikerschulen und Fachhochschulen gedacht. Für das Selbststudium und für Praktiker, die ihre theoretischen Kentnisse auffrischen oder erweitern wollen, ist es ebenfalls geeignet.

Der Stoffumfang ist vorwiegend auf das Technikerstudium abgestimmt. Einige Kapitel gehen darüber hinaus, um auch Studenten an Fachhochschulen ein Hilfsmittel zum besseren Verständnis der Vorlesungen in Technischer Mechanik und interessierten Benutzern Weiterbildungsmöglichkeiten zu bieten. Auf eine Anwendung der höheren Mathematik wurde verzichtet, da diese an Technikerschulen nicht gelehrt wird. Bis auf wenige Ausnahmen werden die Berechnungsgleichungen hergeleitet und danach als Größengleichungen angegeben, so dass mit beliebigen Einheiten gerechnet werden kann.

Die verwendeten Einheiten und Formelzeichen entsprechen den in einem Verzeichnis zusammengestellten neuesten Ausgaben der einschlägigen DIN-Normen und den gesetzlich vorgeschriebenen SI-Einheiten. Auf die üblichen Einheiten wird hingewiesen. In Übereinstimmung mit dem täglichen Sprachgebrauch sowie den Normenempfehlungen werden die Worte Gewicht und Last im Sinne einer Massengröße verwendet. Wenn Gewicht als Kraftgröße gemeint ist, wird der Ausdruck Gewichtskraft benutzt.

Die Nummerierung der Bilder, Gleichungen und Lehrbeispiele erfolgte kapitelweise. Kontrollfragen am Ende eines in sich abgeschlossenen Sachgebietes sollen die Lernzielkontrolle erleichtern. Praxishinweise machen auf die Bedeutung des jeweiligen Lernstoffes für die Berufsarbeit aufmerksam. Dabei werden auch die früher verwendeten, nicht mehr zugelassenen Einheiten und die in der Praxis gebräuchlichen Zahlenwertgleichungen erwähnt.

Lehrbeispiele aus vielen Gebieten der Technik ermöglichen eine Vertiefung des dargebotenen Stoffes. Bei der Auswahl der Beispiele wurde eine enge Beziehung zur Praxis angestrebt.

Für häufig vorkommende Aufgabenarten werden Arbeitsschritte empfohlen. Dem Prinzip der Größengleichung folgend, sind auch bei den Zwischenrechnungen die Einheiten mitgeschrieben, so dass man bei umfangreichen Gleichungen nicht die Übersicht verliert. Nur wenn Einheiten sich offensichtlich herauskürzen, wurden sie weggelassen. Die Genauigkeit der Ergebnisse wurde in der Regel auf vier Ziffern beschränkt. Wird mit der gesamten vom Rechner angezeigten Stellenanzahl weitergerechnet, so ergeben sich in manchen Fällen etwas abweichende Resultate.

Weitere Übungsmöglichkeiten bietet die auf das Lehrbuch abgestimmte Aufgabensammlung „Mechanik und Festigkeitslehre – Aufgaben“. Sie enthält eine große Zahl vom Leser zu lösender Aufgaben.

Alle Tabellen und Diagramme (Bildnummern mit vorgesetztem A), die zum Lösen von Aufgaben benötigt werden, sind in einem separaten Anhang untergebracht, der auch eine Zusammenstellung der wichtigsten Formeln enthält. Die für Festigkeitsberechnungen erforderlichen Werkstoffkennwerte und sonstige Einflussziffern sowie Erfahrungswerte für erforderliche Sicherheiten bzw. zulässige Spannungen sind darin angegeben, womit die Berechnung vieler Bauteile ohne weitere Unterlagen möglich ist. Der lose beigefügte Anhang kann, z.B. bei Prüfungen, unabhängig vom Lehrbuch benutzt werden.

Besonderer Wert wurde auf eine Übereinstimmung mit dem im gleichen Verlag erschienenen Lehrbuch *Decker* „Maschinenelemente“ und den dazugehörigen „Maschinenelemente-Aufgaben“ gelegt. Die „Mechanik und Festigkeitslehre“ enthält gewissermaßen das theoretische Rüstzeug für die genannten Bücher.

Allen Kolleginnen und Kollegen und Lesern, die uns auf Verbesserungsmöglichkeiten hingewiesen haben, sagen wir herzlichen Dank. Bei den Mitarbeitern des Carl Hanser Verlages, besonders bei Frau Christina Kubiak und Herrn Frank Katzenmayer, bedanken wir uns für die gute Zusammenarbeit.

Wir hoffen, dass auch die 9. Auflage den Studierenden und den Lehrenden ebenso wie den bereits in der Praxis tätigen Technikern und Ingenieuren ein brauchbares Hilfsmittel werden möge. Anregungen und Verbesserungsvorschläge werden weiterhin dankbar entgegengenommen.

Bernd Kretschmer
Peter Möhler

Inhaltsverzeichnis

Auf plus.hanser-fachbuch.de finden Sie die Beilage zum Lehrbuch mit Diagrammen, Formeln und Tabellen zum Download.

1 Einführung

1.1 Aufgaben und Gliederung der Mechanik

Lernziele:
- Die Aufgabenstellung der Technischen Mechanik erläutern.
- Die Gliederung der Mechanik in Teilgebiete angeben und die Inhalte der Teilgebiete erläutern.

Die Mechanik ist als das älteste Teilgebiet der Physik eine für die Technik besonders wichtige Naturwissenschaft. Sie ist die **Lehre von den Bewegungen der Körper und den Wirkungen der Kräfte** auf feste, flüssige und gasförmige Körper. In der Technischen Mechanik werden die physikalischen Lehrsätze auf Körper angewendet, die in der Technik als Maschinen, Fahrzeuge, Geräte oder deren Teile vorkommen. Zur **Aufgabenstellung der Technischen Mechanik** gehört die Entwicklung von Methoden zur schnellen Lösung technischer Probleme, wobei es nicht immer auf exakte, sondern auf in kürzester Zeit erreichbare, für die Praxis ausreichende Nährungslösungen ankommt.
Das Gesamtgebiet der Mechanik kann man in verschiedene Teilgebiete untergliedern:
Die **Kinematik** ist die Lehre von den Bewegungen, unabhängig von den dabei wirkenden Kräften.
Die **Dynamik** ist die Lehre von den Kräften und ihren Wirkungen. Sie wird unterteilt in die **Kinetik**, in der die Zusammenhänge zwischen Kräften und Bewegungen dargestellt werden, und in die **Statik** als Lehre vom Gleichgewicht der Kräfte an einem Körper.

Man kann die Statik als Sonderfall der Dynamik ansehen, bei dem zwar Kräfte, aber keine Bewegungsänderungen (Beschleunigungen oder Verzögerungen) auftreten. Die Körper befinden sich im Gleichgewicht (in Ruhelage oder in gleichförmig geradliniger Bewegung). Sie werden vereinfacht als starr aufgefasst **(Statik starrer Körper).** Aufgabe der Statik ist die Ermittlung unbekannter Kräfte. Die Kenntnis der am Körper angreifenden Kräfte ist eine Grundlage der Festigkeitsberechnung technischer Bauteile.

Die **Schwingungslehre** behandelt Vorgänge, bei denen sich kennzeichnende Größen so ändern, dass sie nach bestimmter Zeit wiederkehren. Handelt es sich dabei um mechanische Größen, so spricht man von **mechanischen Schwingungen**.

Wie in der Kinematik reicht es mitunter aus, nur den zeitlichen Verlauf der Schwingung zu betrachten. Untersucht man die Ursachen einer Schwingung, so müssen auch die wirkenden Kräfte und Momente einbezogen werden. Dies entspricht der Kinetik.

Die **Festigkeitslehre** ist ein besonderes Teilgebiet der Technischen Mechanik. Es werden die elastisch-festen Körper untersucht, und zwar der Zusammenhang zwischen den äußeren und inneren Kräften und den durch diese hervorgerufenen Verformungen. Festigkeitsberechnungen gehören vornehmlich zu den Aufgaben des Konstrukteurs, der die Bauteile auf Haltbarkeit und Stabilität zu berechnen hat.
Die **Hydromechanik** behandelt in der Hydrostatik die Kraftverhältnisse in ruhenden Flüssigkeiten und in der Hydrodynamik die Vorgänge in bewegten (strömenden) Flüssigkeiten.
Die Mechanik kann auch nach dem Aggregatzustand (der Zustandsform) der Körper eingeteilt werden in die *Mechanik der festen Körper* (unterteilt in starre, elastische und plastische Körper), *Mechanik der flüssigen Körper* (Hydromechanik), *Mechanik der gasförmigen Körper* (Aeromechanik).

Praxisnachweis
Gründliche Kenntnisse der Technischen Mechanik und ihrer Verfahren zur Lösung technischer Probleme sind wichtige Voraussetzungen für eine erfolgreiche Arbeit von Technikern und Ingenieuren.

Kontrollfragen:
- Welche Aufgabe hat die Technische Mechanik?
- In welche Teilgebiete kann die Mechanik eingeteilt werden?
- Welche Inhalte haben die Kinematik, die Kinetik, die Statik und die Festigkeitslehre?

1.2 Größen und Einheiten

Lernziele:
- Die Begriffe physikalische Größe, Zahlenwert, Einheit und Größengleichung erklären.
- Die in der Technischen Mechanik vorkommenden Basisgrößen und Basiseinheiten sowie deren übliche Vielfache und Teile nennen und Einheiten umrechnen.
- Für zeichnerische Lösungen die Beträge von Größen in Streckenlängen umrechnen und umgekehrt.

Zur Formulierung der naturwissenschaftlichen Gesetze bedient man sich der Mathematik und gibt die Zusammenhänge als Gleichung an. Die Größen der Mechanik sind **physikalische Größen**, für die Buchstaben als Kurzzeichen (Symbole) eingesetzt werden, z. B. l für Länge, s für die Wegstrecke, A für Fläche, V für Volumen, m für Masse, t für Zeit, v für Geschwindigkeit. In den Gleichungen (Formeln) treten sie als Formelzeichen auf (Tab. 1).
Nach DIN 1313 wird der Größenwert als Produkt aus Zahlenwert und Einheit ausgedrückt, als Wortgleichung:

Größenwert = Zahlenwert × Einheit.

Symbolisch wird eine physikalische Größe wie folgt angegeben: $\boldsymbol{G} = \{\boldsymbol{G}\} \cdot [\boldsymbol{G}]$.
Darin bedeuten: G die Größe (durch Formelzeichen angegeben), $\{G\}$ der Zahlenwert der Größe, $[G]$ die Einheit der Größe.
In der Angabe $s = 400$ m bedeutet s die Größe, z. B. eine Wegstrecke, 400 ihren Zahlenwert ($\{s\} = 400$) und m als Meter ihre Einheit ($[s] = m$). Das Produkt „400 m" ist der Größenwert oder Betrag (in der Messtechnik auch Messwert genannt). Der Zahlenwert gibt an, wievielmal die Einheit im Größenwert enthalten ist. Durch den Zahlenwert allein ist eine Größe nicht vollständig angegeben, die Einheit muss immer mitgeschrieben werden.
Gleichungen, in denen physikalische Größen durch Formelzeichen oder durch Zahlenwerte und Einheiten angegeben sind, heißen **Größengleichungen.** Darin dürfen außer den Zahlenwerten auch die Symbole für Einheiten gekürzt, multipliziert und dividiert werden (s. die Beisp. 1.1 bis 1.8).
Für den Begriff Einheit wird manchmal fälschlicherweise der Ausdruck **Dimension** verwendet. In DIN 1313 kennzeichnet man mit Hilfe von Dimensionen die Art einer Größe. So hat z. B. die Geschwindigkeit die Dimension Länge durch Dauer, aber die Einheit Meter durch Sekunde.
Durch das „Gesetz über Einheiten im Messwesen" ist die Verwendung der Einheiten des Internationalen Einheitensystems (*SI-Einheiten*) vorgeschrieben. In der Technischen Mechanik werden folgende **SI-Basiseinheiten** der Dimensionen Länge (L), Masse (M), Dauer (T) und Temperatur (Θ) benutzt:

Größe		SI-Basis-einheit		SI-Basis-dimension	
Name	Zeichen	Name	Zeichen	Name	Zeichen
Länge	l, s	Meter	m	Länge	L
Masse	m	Kilogramm	kg	Masse	M
Zeit	t	Sekunde	s	Dauer	T
Temperatur	T	Kelvin	K	Temperatur	Θ
(Temperatur	ϑ	°Celsius	°C)		

Im Einheitengesetz sind die **Definitionen der Basiseinheiten** angegeben, wie sie von der Internationalen „Generalkonferenz für Maß und Gewicht" festgelegt wurden. Sie sind für das Meter und die Sekunde auf Atomstrahlung bezogen (das Meter wurde am 20. 10. 1983 nach der Lichtgeschwindigkeit neu festgelegt). Ursprünglich war das Meter als 40-millionster Teil des Erdumfanges definiert, später als Abstand zweier Markierungen auf einem in Paris aufbewahrten Stab, dem Urmeter. Die Sekunde war ursprünglich der 86400ste Teil des mittleren Sonnentages (60 s/min · 60 min/h · 24 h/d = 86400 s/d).
Das Kilogramm war ursprünglich definiert als die Masse von 1 dm^3 = 1 Liter Wasser bei 4 °C. Heute gilt: Ein Kilogramm ist die Masse des Internationalen Kilogrammprototyps, des in Paris aufbewahrten Urkilogramms.
Ein Kelvin ist der 273,15te Teil der Temperaturdifferenz zwischen dem absoluten Nullpunkt (tiefstmögliche Temperatur) und dem Tripelpunkt von Wasser. Ein Kelvin entspricht genau einem Grad Celsius (°C), zwischen beiden Temperaturskalen gibt es nur eine Nullpunktverschiebung.

Die Einheiten für andere Größen, wie Geschwindigkeit, Kraft, Leistung usw., sind von den Basiseinheiten abgeleitet, sie werden aus ihnen gebildet (z. B. für die Geschwindigkeit die Einheit m/s bzw. $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$). Es werden auch Vielfache und Bruchteile von Einheiten verwendet (Tab. 2). Maßgebend für Einheiten ist DIN 1301, für Formelzeichen DIN 1304. Einige in der Technik übliche Vielfache und Teile der Basiseinheiten sind in Tab. 3 angegeben.

Beispiel 1.1
Für eine feingeschlichtete Oberfläche ist eine Rautiefe von 6,3 µm zulässig. Wie viel mm sind das?
Lösung:
Gegeben: $R_t = 6{,}3$ µm.
Gesucht: R_t in mm.

Mit $1\ \mu\text{m} = \dfrac{1}{1000}$ mm (nach Tab. 3) wird

$$R_t = 6{,}3\ \mu\text{m} = 6{,}3\ \frac{1}{1000}\ \text{mm} = 0{,}0063\ \text{mm}$$

oder durch Erweitern

$$R_t = 6{,}3\ \mu\text{m}\ \frac{1\ \text{mm}}{1000\ \mu\text{m}} = 0{,}0063\ \text{mm},$$

da sich µm herauskürzt.

Beispiel 1.2
Welche Innenhöhe in mm muss ein Behälter für ein Fassungsvermögen von 4000 Litern mindestens haben, wenn seine quadratische Grundfläche 2,5 m^2 beträgt?
Lösung:
Gegeben: $V = 4000\ \text{l} = 4 \cdot 10^3\ \text{dm}^3$, $A = 2{,}5\ \text{m}^2$.
Gesucht: h in mm.
Da $1\ \text{dm}^3 = (100\ \text{mm})^3$ und $1\ \text{m}^2 = (1000\ \text{mm})^2$ sind, betragen

$$V = 4 \cdot 10^3\ \text{dm}^3\ \frac{(100\ \text{mm})^3}{\text{dm}^3} = 4 \cdot 10^9\ \text{mm}^3,$$

$$A = 2{,}5\ \text{m}^2\ \frac{(1000\ \text{mm})^2}{\text{m}^2} = 2{,}5 \cdot 10^6\ \text{mm}^2.$$

Aus der bekannten Gleichung für das Volumen $V = A \cdot h$ folgt für die gesuchte Innenhöhe

$$h = \frac{V}{A} = \frac{4 \cdot 10^9\ \text{mm}^3}{2{,}5 \cdot 10^6\ \text{mm}^2} = 1{,}6 \cdot 10^3\ \text{mm} = 1600\ \text{mm}.$$

Mit den vorgenannten Umrechnungsbeziehungen erhält man auch ohne Zwischenrechnung in einem einzigen Rechnungsgang:

$$h = \frac{V}{A} = \frac{4 \cdot 10^3\ \mathrm{dm}^3 \cdot (100\ \mathrm{mm})^3 \cdot \mathrm{m}^2}{2{,}5\ \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{dm}^3 \cdot (1000\ \mathrm{mm})^2} = 1600\ \mathrm{mm},$$

da sich dm^3, m^2 und mm^2 herauskürzen.

Beispiel 1.3
Ein Geräteteil wiegt 0,0375 g. Seine Masse in mg ist anzugeben.
Lösung:
Gegeben: $m = 0{,}0375$ g.
Gesucht: m in mg.
Nach den Tabn. 2 und 3 ist 1 mg $= 10^{-3}$ g bzw. 1 g = 1000 mg. Somit ist

$$m = 0{,}0375\ \mathrm{g}\ \frac{1000\ \mathrm{mg}}{\mathrm{g}} = 37{,}5\ \mathrm{mg}\ \text{oder kürzer}$$

$$m = 0{,}0375 \cdot 1000\ \mathrm{mg} = 37{,}5\ \mathrm{mg}.$$

Beispiel 1.4
Wie viel kg wiegen die Massen 8,6 t und 4,2 Mt?
Lösung:
Gegeben: $m_1 = 8{,}6$ t, $m_2 = 4{,}2$ Mt.
Gesucht: m_1 und m_2 in kg.
Nach den Tabn. 2 und 3 ergeben sich:

$$m_1 = 8{,}6 \cdot 1000\ \mathrm{kg} = 8600\ \mathrm{kg},$$

$$m_2 = 4{,}2 \cdot 10^6\ \mathrm{t} = 4{,}2 \cdot 10^6 \cdot 10^3\ \mathrm{kg} = 4{,}2 \cdot 10^9\ \mathrm{kg}.$$

Beispiel 1.5
Die Zeitangabe „78 Min. 45 Sek." ist in Stunden, in Minuten und in Sekunden umzurechnen (Zahlenwerte als Dezimalzahlen).
Lösung:
Gegeben: $t = 78$ min + 45 s.
Gesucht: t in h, in min und in s.
Nach Tab. 2:

$$t = 78\ \mathrm{min} + 45\ \mathrm{s} = 78\ \frac{1}{60}\ \mathrm{h} + 45\ \frac{1}{3600}\ \mathrm{h}$$

$$= (1{,}3 + 0{,}0125)\ \mathrm{h} = 1{,}3125\ \mathrm{h},$$

$$t = 78\ \mathrm{min} + 45\ \frac{1}{60}\ \mathrm{min} = (78 + 0{,}75)\ \mathrm{min}$$

$$= 78{,}75\ \mathrm{min}$$

$$t = 78 \cdot 60\ \mathrm{s} + 45\ \mathrm{s} = (4680 + 45)\ \mathrm{s} = 4725\ \mathrm{s}.$$

Bei zeichnerischen Verfahren und in Diagrammen werden Größen als Strecken dargestellt. Dafür benötigt man einen Maßstab, der zweckmäßigerweise als Maßstabsfaktor angegeben wird. Es gilt

$$\textbf{Maßstabsfaktor} = \frac{\textbf{darzustellende Größe}}{\textbf{zugeordnete Strecke}}$$

oder mit der Größe G und der zugehörigen Strecke G_{gez}:

$$\textit{Maßstabsfaktor} \quad \boldsymbol{m_{\mathrm{G}} = \frac{G}{G_{\mathrm{gez}}}} \tag{1.1}$$

Entspricht z. B. 1 cm einer Zeichnung dem Größenwert 5 m, d. h. 1 cm $\widehat{=}$ 5 m, dann beträgt der Längenmaßstabsfaktor $m_1 = 5$ m/cm (5 Meter je Zentimeter).
Aus Gl. (1.1) ergibt sich für eine darzustellende Größe G die zu zeichnende

$$\textit{Streckenlänge} \quad \boldsymbol{G_{\mathrm{gez}} = \frac{G}{m_{\mathrm{G}}}} \tag{1.2}$$

Einer gezeichneten Strecke G_{gez} entspricht beim Maßstabsfaktor m_{G} die

$$\textit{Größe} \quad \boldsymbol{G = G_{\mathrm{gez}} \cdot m_{\mathrm{G}}} \tag{1.3}$$

Mit den Maßstabsfaktoren wird bei Berechnungen wie mit Größen verfahren; die Einheiten sind immer mitzuschreiben.

Beispiel 1.6
In einem Diagramm sollen verschiedene Volumen durch Balken dargestellt werden. Mit welchem Maßstabsfaktor sind die Balkenlängen zu errechnen, wenn das größte Volumen von 200 m^3 mit einer Länge von 8 cm zu zeichnen ist?
Lösung:
Gegeben: $V = 200\ \mathrm{m}^3$, $V_{\mathrm{gez}} = 8$ cm.
Gesucht: m_{V} in m^3/cm.
Entspr. Gl. (1.1) ist

$$m_{\mathrm{V}} = \frac{V}{V_{\mathrm{gez}}} = \frac{200\ \mathrm{m}^3}{8\ \mathrm{cm}} = 25\ \mathrm{m}^3/\mathrm{cm}.$$

Beispiel 1.7
Wie groß ist die zu zeichnende Streckenlänge in mm für einen Abstand von 10,5 m bei einer Maßstabsangabe 1 cm $\widehat{=}$ 5 m?
Lösung:
Gegeben: $l = 10{,}5$ m, $m_1 = 5$ m/cm.
Gesucht: l_{gez} in mm.
Entspr. Gl. (1.2)

$$l_{\mathrm{gez}} = \frac{l}{m_1} = \frac{10{,}5\ \mathrm{m}}{5\ \mathrm{m/cm}} = 2{,}1\ \mathrm{cm} = 21\ \mathrm{mm}.$$

Beispiel 1.8
Welchen Betrag in m/s hat eine Geschwindigkeit, die mit einer Strecke von 3,6 cm dargestellt ist, wenn die Zeichnung die Angabe 10 mm $\widehat{=}$ 20 km/h enthält?

Lösung:
Gegeben: $v_{\mathrm{gez}} = 3{,}6$ cm, $m_{\mathrm{v}} = 20\ \frac{\mathrm{km/h}}{\mathrm{cm}}$.
Gesucht: v in m/s.

Entspr. Gl. (1.3)

$$v = v_{\text{gez}} \cdot m_{\text{v}} = 3{,}6\ \text{cm} \cdot 20\ \frac{\text{km/h}}{\text{cm}} = 72\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$$
$$= 72\ \frac{1000\ \text{m}}{3600\ \text{s}} = 20\ \text{m/s}.$$

Eine Größengleichung zeigt die Beziehung zwischen physikalischen Größen. In einer **Zahlenwertgleichung** wird lediglich die Beziehung zwischen den Zahlenwerten von Größen dargestellt. Sie gilt nur für bestimmte Einheiten, die stets besonders angegeben werden müssen. Beispiele für Zahlenwertgleichungen, die in der Technik gelegentlich vorkommen, werden am Ende der Abschnitte 6.3 und 7.4 erläutert.

Praxishinweis
Größengleichungen haben gegenüber Zahlenwertgleichungen den Vorteil, dass sie unabhängig von der Wahl der Einheiten gelten. Sie sind bevorzugt anzuwenden. Umrechnungen von Einheiten können mit ihnen übersichtlich durchgeführt werden. Bei Verwendung von Maßstabsfaktoren wird die Beziehung zwischen einer Größe und der zugehörigen Strecke ebenfalls durch eine Größengleichung ausgedrückt. Die noch häufig anzutreffende Schreibweise der in eckigen Klammern eingeschlossenen Einheitenzeichen ist nach DIN 1313 nicht zulässig.

Kontrollfragen:
- Was versteht man unter einer physikalischen Größe?
- Was ist eine Größengleichung?
- Welche SI-Basisdimensionen und welche SI-Basiseinheiten kommen in der Technischen Mechanik vor?
- Welche Vielfache und Teile der Basiseinheiten sind in der Technik üblich?
- Was versteht man unter Maßstabsfaktoren, und wozu dienen sie?

1.3 Koordinatensysteme

Lernziele
- Die Notwendigkeit von Koordinatensystemen erkennen.
- Den Aufbau eines rechtwinkligen Koordinatensystems erklären.
- Bezeichnungen und Vorzeichenregeln für kartesische Koordinatensysteme nennen.
- Die Ebene in Quadranten einteilen.

Die Lage einzelner Punkte in der Ebene oder im Raum kann mithilfe von Koordinatensystemen eindeutig bestimmt werden. Beim meist angewendeten kartesischen Koordinatensystem stehen die Koordinatenachsen senkrecht aufeinander (Bild 1.1). Die waagerechte x-Achse oder Abszisse und die senkrechte y-Achse oder Ordinate schneiden sich im Nullpunkt 0. Rechts vom Nullpunkt auf der Abszisse und oberhalb des

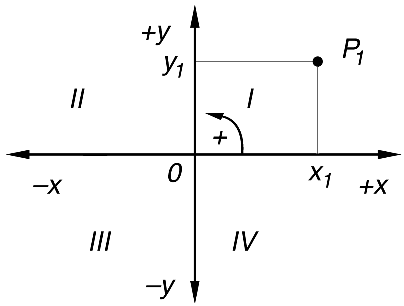


Bild 1.1 Kartesisches Koordinatensystem der Ebene

Nullpunktes auf der Ordinate liegen positive Werte, links bzw. unterhalb des Nullpunktes negative. Die Ebene wird durch die Koordinatenachse in vier Bereiche geteilt. Diese werden Quadranten genannt und von der positiven Abszisse aus im mathematisch positiven Drehsinn (linksdrehend) mit I, II, III und IV bezeichnet. Durch Angabe von Werten auf der Abszisse und der Ordinate lässt sich jeder Punkt in der Ebene eindeutig festlegen.

Sollen Punkte im Raum bestimmt werden, so muss eine dritte, senkrecht auf der durch die x- und y-Koordinaten gebildeten Ebene stehende und ebenfalls durch den Nullpunkt gehende Koordinate hinzugefügt werden. Nach DIN 4895 werden die Koordinaten mit x, y und z bezeichnet (Bild. 1.2). Es sind auch davon abweichende Angaben für die Koordinatenachsen möglich, wie z. B. in DIN 1080 festgelegt.

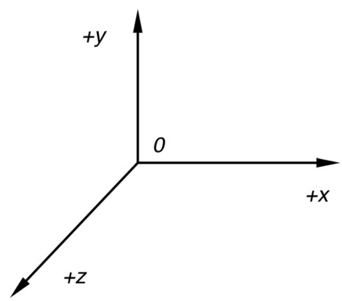


Bild 1.2 Räumliches kartesisches Koordinatensystem

Kontrollfragen:
- Wie ist ein rechtwinkliges Koordinatensystem aufgebaut und welche Vorzeichenregeln gelten?
- Was versteht man unter dem mathematisch positiven Drehsinn?
- Wie können einzelne Punkte in der Ebene und im Raum eindeutig definiert werden?
- Wo liegen die vier Quadranten im Koordinatensystem der Ebene?

2 Statik starrer Körper

2.1 Die Kraft

Lernziele
- Den Kraftbegriff definieren und die Krafteinheit angeben, den Vektorcharakter von Kräften erläutern und Kräfte grafisch darstellen.
- Den Verschiebesatz und das Wechselwirkungsgesetz als Erfahrungssätze an Beispielen erläutern.
- Das Verfahren des Freimachens von Körpern als Voraussetzung für die Darstellung des Kräftegleichgewichts und für die Ermittlung von Kräften erläutern und auf Bauteile anwenden sowie die Auflagerarten und ihre symbolische Darstellung angeben.

2.1.1 Kennzeichnung und Darstellung von Kräften

Aus der Erfahrung des täglichen Lebens ist der Begriff Kraft vor allem als Muskelkraft bekannt. Ebenso kennt man die Federkraft, die Magnetkraft, die Windkraft, die Wasserkraft. Kräfte sind nicht sichtbar, sondern nur an ihren Wirkungen erkennbar.
Beim Spannen einer Feder durch den menschlichen Muskel wird die Feder verformt. Ursache der Verformung ist eine Kraft, ihre Wirkung ist die Formänderung. Wenn ein Magnet ein Stück Eisen anzieht, ist die Zugkraft selbst nicht zu sehen, jedoch ihre Wirkung, da das Eisenstück zum Magneten hin bewegt wird. Infolge der **Erdanziehungskraft**, der Schwerkraft, werden alle Körper von der Erde angezogen und beim Fallen in Richtung Erdmittelpunkt bewegt. In der Mechanik wird diese Kraft als **Gewichtskraft** bezeichnet. Auch durch die Gewichtskraft können Körper verformt oder in Bewegung gesetzt werden.
Allgemein gilt für die
Kraft als physikalische Größe:

Eine Kraft ist die Ursache für die Verformung oder Bewegungsänderung eines Körpers.

Demnach müssen überall, wo sich Geschwindigkeiten ändern oder Körper verformt werden, Kräfte wirken.

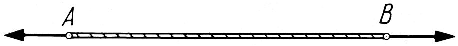


Bild 2.1 Gleichgewicht zweier Kräfte beim Seilziehen

Heben sich die Wirkungen zweier oder mehrerer Kräfte an einem ruhenden Körper auf, so bleibt er im **Ruhezustand**, d. h. die **Kräfte sind im Gleichgewicht.** Beispielsweise müssen die an den Punkten A und B des Seiles in Bild 2.1 anfassenden Personen mit gleich großer Kraft ziehen, wenn das Seil in der Ruhelage bleiben soll. Um ein Gewichtsstück in der Ruhelage zu halten, muss man der Gewichtskraft mit einer gleich großen Kraft entgegenwirken (Bild 2.2). Nach der Definition des Kraftbegriffs besteht **auch bei der gleichförmig geradlinigen Bewegung Kräftegleichgewicht**, da keine Änderung der Geschwindigkeit erfolgt.

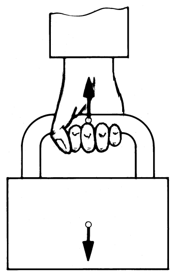


Bild 2.2 Kräftegleichgewicht zwischen Handkraft und Gewichtskraft

Das ist z. B. der Fall bei einer Hubbewegung mit gleich bleibender Hubgeschwindigkeit. Die dabei an einem Lasthaken (Bild 2.3) wirkenden Kräfte, die lotrecht nach unten gerichtete Gewichtskraft der angehängten Last und die nach oben gerichtete Zugkraft der Kette, sind gleich groß.

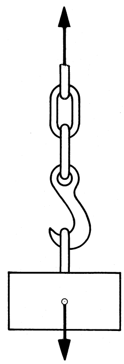


Bild 2.3 Kräftegleichgewicht an einem Lasthaken

Kräfte, die gleiche Wirkungen hervorrufen, sind gleich. Darauf beruht die Messbarkeit von Kräften. Die Messung von Kräften kann z. B. mittels geeichter Federwaagen oder Gewichtsstücke (Wägestücke) erfolgen. Die zu messende Kraft wird entweder mit der Federkraft oder der Gewichtskraft verglichen. Jede Messung ist ein Vergleich mit einer festgelegten Einheit.

Die **Einheit der Kraft** ist das N (Newton[1], gesprochen: njut^{e}n). Es ist eine aus den Basis-

[1] *Isaak Newton* (1643 bis 1723), engl. Physiker

einheiten des Internationalen Einheitensystems (SI-Einheiten) abgeleitete Einheit mit der Definitionsgleichung

1 N = 1 kg · m/s²

In Worten lautet die *Definition der Krafteinheit:*

1 N ist gleich der Kraft, die einem Körper mit der Masse 1 kg die Beschleunigung 1 m/s² erteilt.

In der Technik werden oftmals auch die Einheiten kN und MN verwendet ($1\ \text{kN} = 1000\ \text{N} = 10^3\ \text{N}$, $1\ \text{MN} = 10^6\ \text{N}$). Als Formelzeichen für die Kraft ist der Buchstabe F (von *force,* engl.) in DIN 1304 festgelegt. Verschiedene Kräfte werden durch Indizes[1] unterschieden, z. B. F_1, F_2, F_a, F_b, F_A und dgl.

Die Definition der Krafteinheit beruht auf der bewegungsändernden Kraftwirkung (s. auch DIN 1305) und folgt aus dem Grundgesetz der Dynamik: $F = m \cdot a$ (Gl. (7.3), Abschn. 7.1.1; die kinematische Größe Beschleunigung a mit der Einheit m/s² wird im Abschnitt 6.2.2 behandelt).

Die Erfahrung zeigt, dass die Wirkung einer Kraft nicht nur von ihrem Betrag (dem Größenwert) abhängt, sondern auch von ihrer Lage am Körper, gekennzeichnet durch den Angriffspunkt, und außerdem von ihrer Wirkrichtung, was am Beispiel eines Wagens in Bild 2.4 dargestellt ist.

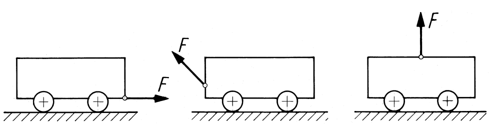


Bild 2.4 Gleich große Kräfte, die verschiedene Wirkungen hervorrufen

Die **Kraft** ist demnach **eine gerichtete Größe.** Physikalische Größen, die erst durch Betrag und Wirkrichtung vollständig angegeben sind, nennt man **Vektoren**, z. B. Kräfte, Geschwindigkeiten, Beschleunigungen. Größen, die allein durch Zahlenwert und Einheit bestimmt sind, heißen **Skalare**, wie z. B. Zeit, Temperatur, Masse. Zur Kennzeichnung einer Kraft als vektorielle Größe wird nach DIN 1313 ein Pfeil über das Formelzeichen gesetzt, und man schreibt $\vec{F}$. Wenn nur der Betrag einer Kraft symbolisch anzugeben ist, wird F ohne Pfeil geschrieben.

Zur eindeutigen **Bestimmung einer Kraft** gehören folgende drei Angaben:

Der **Betrag** oder Größenwert, gegeben durch das Produkt aus Zahlenwert und Einheit oder bei zeichnerischer Darstellung durch eine maßstäbliche Strecke (Bild 2.5), die Vektorlänge,

die **Lage**, gekennzeichnet durch einen Punkt der Wirklinie, den Angriffspunkt,

die **Richtung** oder der Richtungssinn, ausgedrückt durch den Richtungspfeil am Kraftvektor.

Unter der **Wirklinie** einer Kraft versteht man die durch den Kraftvektor verlaufende Gerade. Die Vektorlänge wird mit einem Kräftemaßstabsfaktor m_F errechnet. Da der Richtungspfeil am Kraftvektor die Kraft bereits als Vektor kennzeichnet, kann in Zeichnungen der Pfeil über F entfallen.

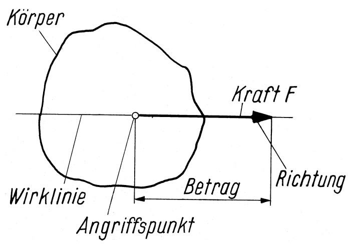


Bild 2.5 Zeichnerische Darstellung einer Kraft

Beispiel 2.1
Wie groß ist die zu zeichnende Vektorlänge in cm für eine Kraft von 1800 N bei einem Kräftemaßstabsfaktor von 400 N/cm?
Lösung:
Gegeben: $F = 1800\ \text{N}$, $m_F = 400\ \text{N/cm}$.
Gesucht: F_{gez} in cm.
Entspr. Gl. (1.2) wird

$$F_{gez} = \frac{F}{m_F} = \frac{1800\ \text{N} \cdot \text{cm}}{400\ \text{N}} = 4{,}5\ \text{cm}.$$

Beispiel 2.2
Welchen Betrag in kN hat eine Kraft, deren Vektor 32 mm lang ist, wenn die Zeichnung folgende Angabe enthält: 1 cm ≙ 500 N?
Lösung:
Gegeben: $F_{gez} = 32\ \text{mm} = 3{,}2\ \text{cm}$, $m_F = 500\ \text{N/cm}$.
Gesucht: F in kN.
Entspr. Gl. (1.3):

$$F = F_{gez} \cdot m_F = 3{,}2\ \text{cm} \cdot 500\ \text{N/cm} = 1600\ \text{N} = 1{,}6\ \text{kN}.$$

Eine besonders wichtige Kraft in der Statik ist die bereits erwähnte **Gewichtskraft F_G** (als Formelzeichen ist neben F_G auch der Buchstabe G genormt). Ihr Betrag kann aus der **Masse *m*** eines

[1] auch als Nebenzeiger oder Fußzeichen bezeichnet

Körpers und der infolge der Erdanziehung auf ihn wirkenden **Fallbeschleunigung** $\boldsymbol{g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}}$ errechnet werden nach der Gleichung $\boldsymbol{F_G = m \cdot g}$ (Gl. (7.4), Abschn. 7.1.1). Sie ist *stets lotrecht nach unten gerichtet* (zum Erdmittelpunkt hin). Ihr Angriffspunkt ist der Schwerpunkt des Körpers (s. Abschn. 4.2.1). Damit sind Betrag, Lage und Richtung der Gewichtskraft bekannt.

Beispiel 2.3
Für drei Körper mit den Massen 1 kg, 50 kg und 10 t sind die Gewichtskräfte zu errechnen.
Lösung:
Gegeben: $m_1 = 1\ \mathrm{kg}, m_2 = 50\ \mathrm{kg},$
$m_3 = 10\ \mathrm{t} = 10 \cdot 10^3\ \mathrm{kg}.$
Gesucht: F_{G1}, F_{G2} und F_{G3}.
Nach der Gl. $F_G = m \cdot g$ wird

$$F_{G1} = m_1 \cdot g = 1\ \mathrm{kg} \cdot 9{,}81\ \mathrm{m/s^2} = 9{,}81\ \mathrm{kgm/s^2} = 9{,}81\ \mathrm{N},$$

$$F_{G2} = m_2 \cdot g = 50\ \mathrm{kg} \cdot 9{,}81\ \mathrm{m/s^2} = 490{,}5\ \mathrm{N},$$

$$F_{G3} = m_3 \cdot g = 10 \cdot 10^3\ \mathrm{kg} \cdot 9{,}81\ \mathrm{m/s^2} = 98{,}1\ \mathrm{kN}.$$

In der Natur sind Kräfte entweder auf ein Volumen verteilt, **Volumenkräfte** genannt, oder auf eine Fläche als so genannte **Flächenkräfte.** Die Gewichtskraft und die Magnetkraft sind Volumenkräfte; sie wirken auf alle Teilchen eines Körpers. Flächenkräfte sind beispielsweise die Windkraft oder die auf eine Kolbenfläche wirkende Wasserkraft in einer Kolbenpumpe. Die Vorstellung der in einem Punkt wirkenden **Einzelkraft** ist eine Idealisierung. Die Einzelkraft wird ersatzweise für die verteilten Kräfte eingesetzt und ist als deren Summe ihre **Resultierende.** In der Statik verwendet man auch den Ausdruck **Streckenkraft** für Kräfte, die auf einer Bauteillänge verteilt wirken. Ferner unterscheidet man **ebene** (Abschn. 2.2 u. 2.3) und **räumliche Kräftesysteme** (Abschn. 2.4).

2.1.2 Verschiebesatz und Wechselwirkungsgesetz

Zur Erhaltung des Kräftegleichgewichts beim Seilziehen (s. Bild 2.1) spielt die Lage der Angriffspunkte der Kräfte keine Rolle. Ihre Wirkung bleibt dieselbe, unabhängig davon, ob die Angriffspunkte dicht beieinander oder weit voneinander entfernt liegen. Ebenso verhält es sich beim Fortbewegen eines Wagens (Bild 2.6). Für den Bewegungsvorgang ist es bedeutungslos, ob an einem Seil oder unmittelbar am Zughaken gezogen oder auf derselben Wirklinie hinten am Wagen direkt oder mittels einer Stange geschoben wird. Diese Tatsache wird ausgedrückt im *Verschiebesatz:*

Kräfte am starren Körper dürfen auf ihrer Wirklinie beliebig verschoben werden.

Wird auf einen Körper eine Kraft ausgeübt, so reagiert er mit einer gleich großen Gegenkraft. Beim Seilziehen spürt man, dass das Seil an der Hand zieht. Am Lasthaken (s. Bild 2.3) zieht die Kette nach oben, der Haken zieht an der Kette nach unten. Ein Körper drückt mit der Gewichtskraft F_G auf seine Unterlage, diese drückt mit der gleich großen Kraft F gegen den Körper (Bild 2.7). Von den an einer Berührungsstelle zweier Körper paarweise auftretenden Kräften ist eine die Aktions-, die andere die Reaktionskraft. Diese Erfahrungstatsache wird ausgedrückt im *Wechselwirkungs- oder Reaktionsgesetz:*

Kräfte, mit denen zwei Körper aufeinander wirken, haben eine gemeinsame Wirklinie und sind gleich groß, aber entgegengesetzt gerichtet (Aktionskraft = Reaktionskraft).

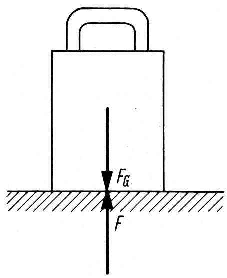


Bild 2.7 Gewichtskraft F_G und Gegenkraft F als Reaktionskraft

Das Zugfahrzeug und der Anhänger in Bild 2.8 drücken mit einem bestimmten Teil der auf sie wirkenden Gewichtskraft an jedem Rad gegen den Boden. Dieser wiederum drückt mit gleich großen, entgegengesetzt gerichteten Reaktionskräften, die auch **Stützkräfte** genannt werden, gegen die Räder. Während der Fahrt zieht der Zugwagen am Hänger (Aktionskraft) ebenso wie der Hänger am Zugwagen (Reaktionskraft).

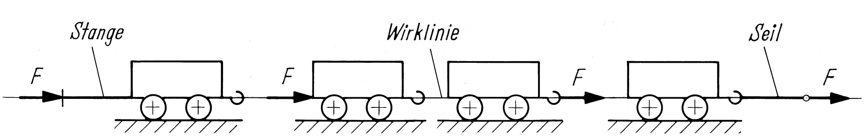


Bild 2.6 Auf einer Wirklinie an verschiedenen Punkten angreifende Kraft F

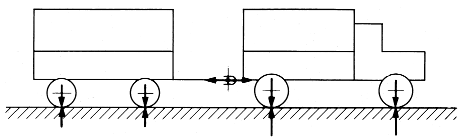


Bild 2.8 Aktions- und Reaktionskräfte an Fahrzeugen

Erfahrungstatsachen, wie der Verschiebesatz und das Wechselwirkungsgesetz, das erstmalig von *Newton* formuliert wurde, nennt man **Axiome**[1]. Das sind nicht beweisbare, sondern durch Erfahrung bestätigte Lehrsätze. Auf ihrer Grundlage werden andere Lehrsätze aufgebaut. Wegen des Verschiebesatzes sind Kräfte am starren Körper **linienflüchtige Vektoren.** Dies gilt nicht für die Ermittlung der Verformung von Bauteilen in der Festigkeitslehre. Dabei ist der Angriffspunkt von Bedeutung und die Kraft ist ein **gebundener Vektor.**

2.1.3 Freimachen und Lagerungsarten

Bei der Lösung von Aufgaben der Statik ist vorzugsweise das Kräftegleichgewicht an Körpern (Bauteilen, Maschinen, Geräten) zu untersuchen. Dafür ist die Kenntnis aller am Körper angreifenden Kräfte erforderlich. Diese Kräfte wirken an den Berührungsstellen mit anderen Körpern. Nach dem Wechselwirkungsgesetz treten an diesen Stellen Aktions- und Reaktionskräfte auf.
Will man sich über die an einem Körper angreifenden Kräfte Klarheit verschaffen, so löst man ihn in Gedanken an allen Stütz-, Berührungs- und Verbindungsstellen aus seiner Umgebung heraus (macht ihn frei) und *ersetzt die weggedachten Teile durch die Kräfte, die sie* an der freigemachten Stelle *auf den zu untersuchenden Körper ausüben.* Dieses Verfahren wird als **Freimachen** bezeichnet und beruht auf der Anwendung des Wechselwirkungsgesetzes. Im freigemachten Zustand kann ein Körper stark vereinfacht dargestellt werden. Bild 2.9 zeigt einen auf diese Weise freigemachten Hebel.
An allen Stellen, wo ein freizumachender Körper gedanklich von seiner Umgebung getrennt wird, in Lagern und Gelenken, an Stütz- und Führungsflächen, an Seilen, Aufhängungen usw., werden die auf ihn wirkenden Kräfte als Vektoren angesetzt. An Verbindungsstellen mit unbekannter Kraftrichtung trägt man bei ebenen Kräftesystemen zwei senkrecht aufeinander wirkende Kräfte ein, da jede Kraft in zwei senkrechte Komponenten zerlegt werden kann (s. Beisp. 2.7). Liegt die Richtung der Komponenten nicht eindeutig fest, so sind sie in der Regel im positiven Sinne der Koordinatenachsen

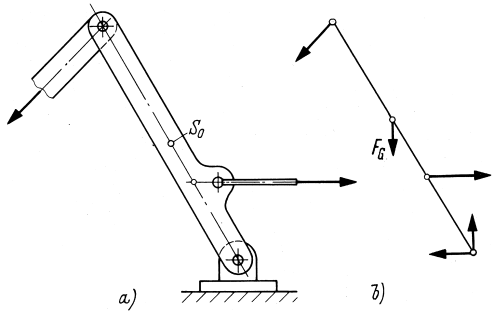


Bild 2.9 Freimachen eines Hebels
a) Hebelsystem, b) freigemachter Hebel

einzutragen. Die Gewichtskraft darf vernachlässigt werden, wenn sie gegenüber den anderen Kräften relativ klein ist.

Beim Freimachen werden die auf einen Körper wirkenden **äußeren Kräfte** dargestellt. Auch die Gewichtskraft ist eine äußere Kraft. Sollen **innere Kräfte** ermittelt werden, so denkt man sich einen Schnitt durch das Bauteil und trägt an der Schnittstelle die vom weggeschnittenen Teilstück ausgeübten Kräfte ein. Dieses Verfahren heißt **Freischneiden** (s. Abschn. 9.1.2). Dabei werden die inneren zu äußeren Kräften und können mit den Regeln der Statik bestimmt werden.

Die Berührungs- und Verbindungsstellen, an denen die Kräfteübertragung zwischen Bauteilen stattfindet, werden auch als **Auflager** bezeichnet, die dort wirkenden Reaktionskräfte dementsprechend als **Auflagerkräfte.** Durch die Art der Lagerung sind meistens Wirklinie und Richtung dieser Kräfte bestimmt. Nachfolgend werden die wichtigsten Kraftübertragungselemente und **Lagerungsarten** erläutert, die beim Freimachen eine besondere Rolle spielen, Reibungskräfte sind dabei vernachlässigt:

Seile

Seile, Riemen, Ketten (Bild 2.10) und ähnliche flexible Elemente können nur **Zugkräfte** übertragen. Durch Rollen werden die Wirklinien der Kräfte umgelenkt.

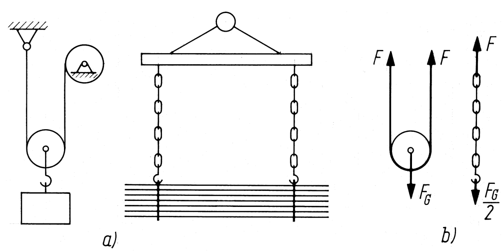


Bild 2.10 Kräfte an Seilen und Ketten
a) Anordnung, b) Seil und Kette freigemacht

[1] *Axiom* (griech.) = Forderung

Pendelstützen

Pendelstützen und *Zweigelenkstäbe* (Bild 2.11) nehmen nur **Längskräfte** (Zug- oder Druckkräfte) auf.

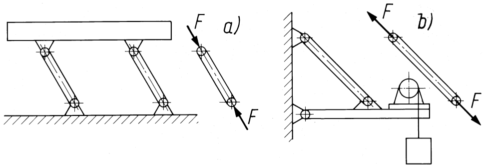


Bild 2.11 Pendelstütze und Zweigelenkstab
a) druckbeanspruchte Pendelstütze,
b) zugbeanspruchter Zweigelenkstab

Parallelführungen

Einseitige *Parallelführungen* (Bild 2.12) und *ebene Stützflächen* können nur **Druckkräfte** übertragen, deren Wirklinien senkrecht auf den Stütz- oder Führungsflächen stehen, so genannte **Normalkräfte.**

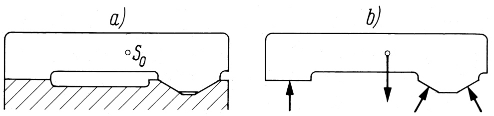


Bild 2.12 Freimachen von Parallelführungen
a) Maschinenteil mit Führungen,
b) freigemachtes Maschinenteil

Rollkörper

Das sind *Kugeln* und *Zylinder* (Bild 2.13) und ähnliche Körper. Sie übertragen nur **Druckkräfte**, deren Wirklinien durch ihren Mittelpunkt gehen bzw. auf der Tangente im Berührungspunkt senkrecht stehen (Normalkräfte). Das gilt ebenfalls für *gewölbte Berührungsflächen* beliebiger Form.

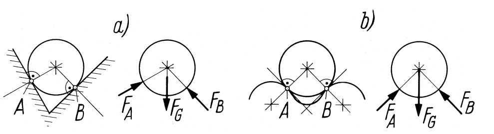


Bild 2.13 Stützkräfte an Rollkörpern
a) ebene Berührungsflächen,
b) gewölbte Berührungsflächen

Loslager

Das sind Lager, die eine *Längsverschiebung* des gelagerten Bauteils (z. B. Achse oder Welle) *zulassen,* und *verschiebbare Gelenkverbindungen* (Bild 2.14). Sie übertragen wie Parallelführungen und Rollkörper nur **Druckkräfte** senkrecht zur Führungsebene bzw. senkrecht zur möglichen Bewegungsrichtung (Normalkräfte).

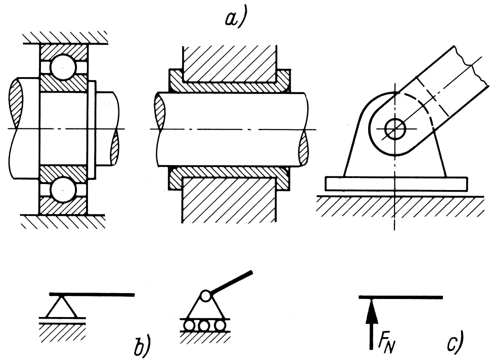


Bild 2.14 Loslager
a) Ausführungen, b) Symbole, c) freigemachtes Bauteil mit Loslagerkraft als Normalkraft F_N

Festlager

Dabei handelt es sich um Lager, die ein *Längsverschieben verhindern*, und um *feste Gelenkverbindungen* (Bild 2.15). Sie können Kräfte in beliebiger Richtung aufnehmen und sind für die Übertragung von **Längs- und Querkräften** (Axial- und Radialkräften) geeignet.

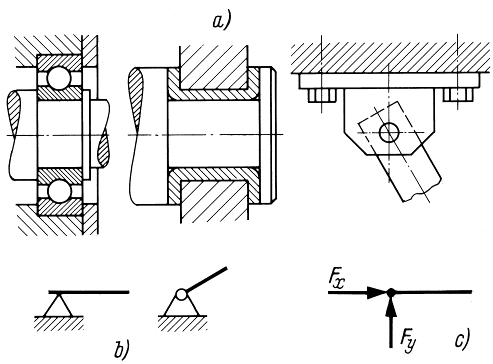


Bild 2.15 Festlager
a) Ausführungen, b) Symbole, c) freigemachtes Bauteil mit den Festlagerkräften F_x (Längskraft) und F_y (Querkraft)

Einspannungen

Eine *feste Einspannung* (Bild 2.16) *verhindert jede Art von Bewegung* des so gelagerten Bauteils. Sie lässt weder Verschiebungen noch Drehungen zu. Als Reaktionen können **Kräfte in beliebiger Richtung** (Längs- und Querkräfte) und ein **Moment** (Abschn. 2.3.1) auftreten.

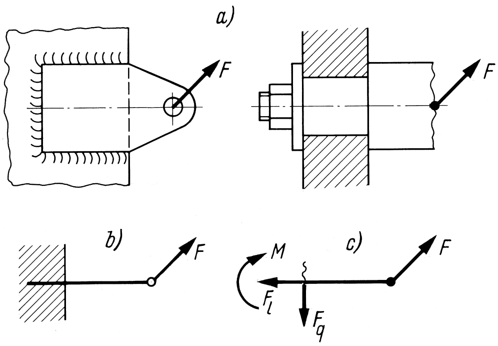


Bild 2.16 Feste Einspannungen
a) Ausführungen, b) Prinzipskizze, c) an der Einspannstelle freigeschnittenes Bauteil mit dem inneren Kräftesystem, bestehend aus Längskraft F_l, Querkraft F_q und Moment M

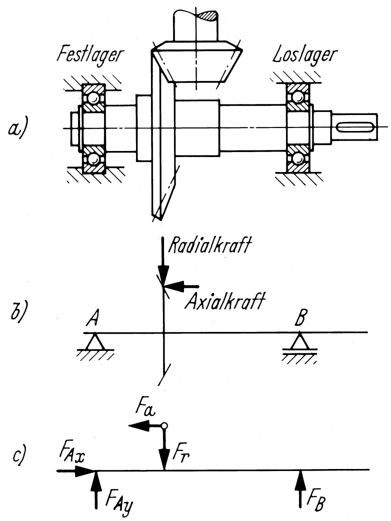


Bild 2.17 Getriebewelle mit Los- und Festlager
a) Zeichnung, b) Prinzipskizze, c) freigemachte Welle

Die Lagerungen werden auch nach dem **Freiheitsgrad** beurteilt. Darunter versteht man die Anzahl der Bewegungsmöglichkeiten eines Körpers. Im Raum hat jeder Körper sechs Bewegungsmöglichkeiten: Verschiebungen in Richtung der drei Koordinatenachsen und Drehungen um diese Achsen. Das sind sechs Freiheitsgrade. In der Ebene sind es nur drei, nämlich Verschiebungen in Richtung von zwei Koordinatenachsen und Drehung um eine zur Ebene senkrechte Achse. Lagerungen verringern die Zahl der Freiheitsgrade. Beim **Loslager** hat der Körper noch **zwei Freiheitsgrade**, das Lager ist **einwertig. Festlager** gestatten nur **einen Freiheitsgrad** und sind **zweiwertig.** Feste **Einspannungen** haben **keinen Freiheitsgrad** und sind **dreiwertig.** Mit der Wertigkeit wird die Anzahl der Unbekannten beim rechnerischen Ansatz zur Bestimmung der Auflagerreaktionen ausgedrückt.
Es wird nochmals darauf hingewiesen, dass bei vorstehenden Betrachtungen Reibungskräfte vernachlässigt sind (die Berücksichtigung der Reibung beim Freimachen erfolgt im 5. Kapitel)!

Um Fehler beim Freimachen zu vermeiden, empfiehlt sich ein systematisches Vorgehen nach folgenden **Arbeitsschritten:**

1. **Schritt:** Prinzipskizze mit schematischer Darstellung des freizumachenden Bauteils anfertigen.
2. **Schritt:** Kraftangriffspunkte und Wirklinien der Kräfte einzeichnen unter Beachtung der durch die Lagerungsarten gegebenen Bedingungen.
3. **Schritt:** Kräfte unmaßstäblich mit Richtungspfeilen und Bezeichnungen eintragen.

Bild 2.17 zeigt das Freimachen am Beispiel einer Getriebewelle. Der 1. Schritt ist im Bildteil b) dargestellt. Im Bildteil c) sind der 2. und 3. Schritt vollzogen.

Am Kegelrad tritt außer den angegebenen Kräften (Bild 2.17b) noch eine zur Zeichnungsebene senkrecht wirkende Tangentialkraft auf, die hier nicht eingetragen wurde. Die Kräfte an Kegelrädern ergeben ein **räumliches Kräftesystem** (Abschn. 2.4, s. a. Beisp. 2.33). Die Eigengewichtskraft der Welle kann vernachlässigt werden.

Beispiel 2.4
Bild 2.18a zeigt in vereinfachter Darstellung den Kurbeltrieb eines Verbrennungsmotors. Die Pleuelstange ist freizumachen unter Vernachlässigung ihres Eigengewichts.

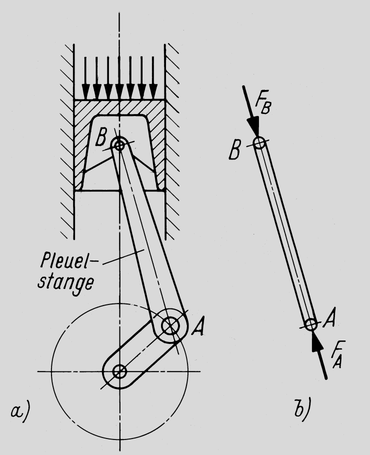


Bild 2.18 Freimachen einer Pleuelstange
a) Kurbeltrieb als Tauchkolben-Triebwerk,
b) freigemachte Pleuelstange

Lösung:
1. Schritt: Skizzieren der Pleuelstange als Pendelstange.
2. Schritt: Kraftangriffspunkte sind die Gelenkmittelpunkte am Kolbenbolzen B und am Kurbelzapfen A, die Wirklinie geht durch beide Punkte.
3. Schritt: Einzeichnen der am Kolbenbolzen in die Stange eingeleiteten Druckkraft F_B (Pfeilspitze zur Stange hin) und der vom Kurbelzapfen ausgeübten Gegenkraft F_A (Bild 2.18b).

Beispiel 2.5
Der Hebel des in Bild 2.19a vereinfacht dargestellten Sicherheitsventils ist freizumachen, wobei die Gewichtskräfte des Hebels und des Ventiltellers zu vernachlässigen sind.

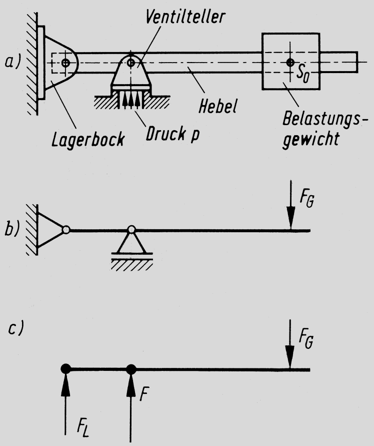


Bild 2.19 Freimachen eines Ventilhebels
a) Vereinfachte Ventildarstellung,
b) Prinzipskizze, c) freigemachter Hebel

Lösung:
1. Schritt: Skizzieren des Hebels mit Gewichtskraft F_G des Belastungsgewichts (im Schwerpunkt S_0 lotrecht abwärts gerichtet), dem Ventilteller als Loslager und dem Lagerbock als Festlager (Bild 2.19b).
2. Schritt: Gelenkmittelpunkte als Kraftangriffspunkte markieren und Wirklinien parallel zur Gewichtskraft einzeichnen (eine Längskraft am Festlager ist nicht vorhanden, da keine Belastungskraft in Hebellängsrichtung wirkt).
3. Schritt: Einzeichnen der durch den Druck p auf den Ventilteller ausgeübten, aufwärts wirkenden Kraft F und der aufwärts (positiv) angenommenen Lagerkraft F_L, die vom Bolzen im Lagerbock auf den Hebel als Reaktionskraft ausgeübt wird.

Beispiel 2.6
Die in Bild 2.20a gezeigte Leiter ist an einer festen Leiste abgestützt. Sie lehnt an einem Rohr und wird mit der Gewichtskraft F_G einer Person belastet. Die Leiter ist unter Vernachlässigung ihres Eigengewichts freizumachen.

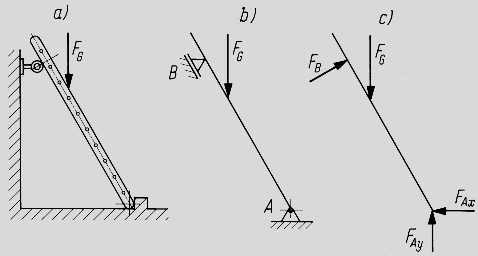


Bild 2.20 Freimachen einer Leiter
a) angelehnte Leiter, b) Prinzipskizze,
c) freigemachte Leiter

Lösung:
1. Schritt: Skizzieren der Leiter mit Festlager A am Boden und Loslager B am Rohr (Bild 2.20b).
2. Schritt: Bei A horizontale und vertikale Wirklinien der Festlagerkräfte F_{Ax} und F_{Ay}, bei B Wirklinie der Loslagerkraft F_B senkrecht zur Leiter einzeichnen.
3. Schritt: Kräfte mit Richtungspfeilen wie in Bild 2.20c einzeichnen und benennen.

Beispiel 2.7
In Bild 2.21a ist eine an Scharnieren befestigte Tür dargestellt. Die Tür und die Scharnierhaken sind freizumachen.
Lösung:
1. Schritt: Getrennte Skizzen für Tür und Scharnierhaken anfertigen.
2. Schritt: Kraftangriffspunkte festlegen: Schwerpunkt S_0 für die Gewichtskraft F_G und die Scharniermittelpunkte bei A für die Loslagerkraft F_A mit horizontaler Wirklinie sowie bei B für die Festlagerkräfte F_{Bx} (horizontal) und F_{By} (vertikal).
3. Schritt: Eintragen der Kräfte an den Türscharnieren mit Richtungspfeilen und Bezeichnungen (Bild 2.21b). An den Haken wirken diese Kräfte als Reaktionskräfte entgegengerichtet (Bild 2.21c).

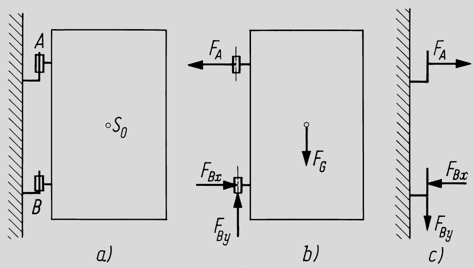


Bild 2.21 Freimachen einer Tür
a) an Scharnieren befestigte Tür, b) freigemachte Tür, c) Kräfte an den Scharnierhaken

Praxishinweis
Das sorgfältige Freimachen ist eine wichtige Voraussetzung für die Lösungsverfahren der Statik zur Ermittlung unbekannter Kräfte. Die Eigengewichtskräfte von Bauteilen und Reibungskräfte können dabei vernachlässigt werden, wenn sie gegenüber den anderen Kräften gering sind.
Im Bauingenieurwesen (Baustatik, Stahlbau, u. a.) werden Kräfte, die von außen auf ein System einwirken, als Lasten bezeichnet, und anstelle Gewichtskraft ist der Ausdruck Eigenlast üblich (sinngemäß Windlast, Schneelast). Ebenso sind die Begriffe Streckenlast und Flächenlast üblich. Dagegen wird im Maschinenbau unter Last eine Masse verstanden. Das Wort Gewicht wird allgemein im Sinne einer Masse als Wägeergebnis verwendet. Um Missverständnisse auszuschließen, soll Gewicht nicht anstatt Gewichtskraft gebraucht werden (s. DIN 1305). Wo eine genaue Berechnung der Gewichtskraft (bzw. Eigenlast) nicht erforderlich ist, kann man mit dem Näherungswert der Fallbeschleunigung $g \approx 10\ \mathrm{m/s^2}$ rechnen.

Kontrollfragen:
- Was ist eine Kraft, wie ist ihre Einheit definiert und durch welche Angaben ist sie bestimmt?
- Wie lauten der Verschiebesatz und das Wechselwirkungsgesetz?
- Was versteht man in der Mechanik unter dem Freimachen eines Körpers?
- Welche Kräfte können von Seilen und Ketten, Parallelführungen und Rollkörpern, Pendelstützen und Zweigelenkstäben übertragen werden?
- Worin besteht der Unterschied zwischen einem Loslager und einem Festlager?

2.2 Zentrales ebenes Kräftesystem

Lernziele:
- Den Satz vom Kräfteparallelogramm und den Begriff Krafteck erläutern.
- Unbekannte Kräfte in zentralen Kräftesystemen zeichnerisch und rechnerisch ermitteln.
- Die Gleichgewichtsbedingungen des zentralen Kräftesystems nennen und bei der Ermittlung von Kräften anwenden.

2.2.1 Das Kräfteparallelogramm

Wenn Kräfte nur an einem Punkt eines Körpers angreifen oder sich die *Wirklinien in einem Punkt schneiden*, so handelt es sich um ein **zentrales Kräftesystem.** Oft interessiert die gemeinsame Wirkung dieser Kräfte, d. h. die Kraft, die alle anderen Kräfte ersetzen könnte. Diese gedachte **Ersatzkraft** oder **resultierende Kraft** würde die gleiche Wirkung ausüben wie alle angreifenden Kräfte gemeinsam. Für zwei Kräfte lässt sie sich ermitteln nach dem
Satz vom Kräfteparallelogramm:

Die Resultierende zweier Kräfte mit sich schneidenden Wirklinien ist die vom Schnittpunkt ausgehende Diagonale des aus beiden Kraftvektoren gebildeten Kräfteparallelogramms.

Die jeweilige Resultierende F_r der Kräfte F_1 und F_2 in Bild 2.22 wurde durch maßstäbliches Aufzeichnen des Kräfteparallelogramms ermittelt.

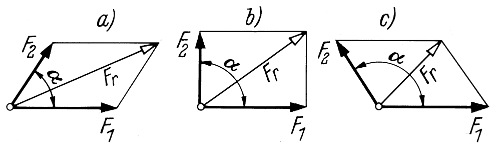


Bild 2.22 Zusammensetzen von Kräften mittels Kräfteparallelogramm
a) $\alpha < 90°$, b) $\alpha = 90°$, c) $\alpha > 90°$

Das Zusammensetzen von Kräften ist eine **vektorielle Addition.** Die Vektoren, aus denen die Resultierende geometrisch zusammengesetzt oder in die sie zerlegt werden kann, heißen **Komponenten.** F_1 und F_2 sind Komponenten der Resultierenden F_r. Als **Vektorgleichung** geschrieben: $\vec{F}_r = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$.
Der Satz vom Kräfteparallelogramm ist ebenfalls ein Axiom, auf dem weitere Lehrsätze der Mechanik beruhen. Seine Richtigkeit lässt sich z. B. durch folgenden Versuch nachweisen:
An einem feststehenden Träger befinden sich zwei verschiebbare und feststellbare Haken, in die Federwaagen eingehängt sind (Bild 2.23a). An jeder Federwaage ist ein Seil befestigt. Beide Seile münden in einem Ring, an dem ein Körper hängt, dessen Gewichtskraft F_G die Seile spannt. Die Seilkräfte F_1 und F_2 werden an den Federwaagen abgelesen, der Winkel α gemessen. Danach wird der Körper nur an eine Federwaage gehängt und an dieser die Kraft F_r abgelesen (Bild 2.23b).

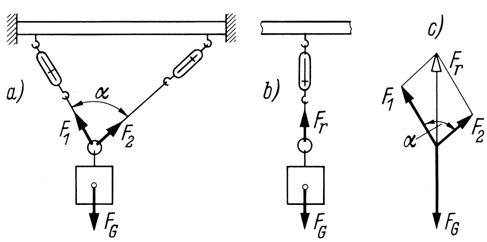


Bild 2.23 Versuch zum Satz vom Kräfteparallelogramm
a) Körper an zwei Federwaagen hängend, b) Körper an einer Federwaage, c) Kräfteparallelogramm

Die Kräfte F_1 und F_2 üben gemeinsam die gleiche Wirkung aus wie die Kraft F_r allein: Der

Körper wird im Ruhezustand gehalten, das System befindet sich im Gleichgewicht. Zeichnet man die aus mehreren Versuchen mit unterschiedlichen Seillängen oder Befestigungsabständen jeweils ermittelten Kräfte F_1 und F_2 maßstäblich als Vektoren unter dem betr. Winkel α auf, so ergibt sich stets die resultierende Kraft F_r als Diagonale in dem durch Parallelverschieben der Kraftvektoren entstandenen Parallelogramm (Bild 2.23c).

Beispiel 2.8
In einer Versuchseinrichtung entspr. Bild 2.24a wurde das mittlere Gewichtsstück durch Anhängen der beiden äußeren Gewichtsstücke in der skizzierten Lage im Ruhezustand gehalten. Durch maßstäbliches Aufzeichnen des Kräfteparallelogramms ist nachzuweisen, dass die Resultierende der Seilkräfte gleich der Gewichtskraft des mittleren Gewichtsstückes ist.

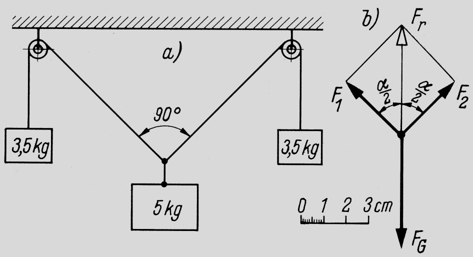


Bild 2.24 Versuch zum Kräfteparallelogramm
a) Versuchsanordnung, b) Kräfteparallelogramm

Lösung:
Gegeben: $m = 5$ kg, $m_1 = m_2 = 3{,}5$ kg, $\alpha = 90°$.
Gesucht: $F_r = F_G$.
Die Gewichtskräfte betragen

$$F_G = m \cdot g = 5\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 = 49{,}05\ \text{N},$$

$$F_{G1} = m_1 \cdot g = 3{,}5\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 = 34{,}34\ \text{N} = F_{G2}.$$

In den unter $\alpha = 90°$ gespreizten Seilen wirken die Seilkräfte $F_1 = F_{G1}$ und $F_2 = F_{G2}$. Gewählt wird der Kräftemaßstabsfaktor $m_F = 10$ N/cm. Mit diesem ergeben sich nach Gl. (1.2) die zu zeichnenden Vektorlängen

$$F_{1\,\text{gez}} = F_{2\,\text{gez}} = \frac{F_{G1}}{m_F} = \frac{34{,}34\ \text{N}}{10\ \text{N}}\ \text{cm} = 3{,}43\ \text{cm}.$$

Damit wird das Kräfteparallelogramm gezeichnet (Bild 2.24b). Für die Resultierende wird gemessen $F_{r\,\text{gez}} = 4{,}9$ cm. Somit beträgt nach Gl. (1.3):

$$F_r = F_{r\,\text{gez}} \cdot m_F = 4{,}9\ \text{cm} \cdot 10\ \text{N/cm} = 49\ \text{N} = F_G,$$

was zu beweisen war. Die lotrecht abwärts wirkende Gewichtskraft F_G ist so groß wie die aus den Seilkräften F_1 und F_2 gebildete Resultierende F_r, wirkt dieser jedoch entgegen.

2.2.2 Zeichnerische Kräfteermittlung

Die zeichnerische Ermittlung von Kräften beruht auf dem Kräfteparallelogramm. Es genügt, nur eine Hälfte des Parallelogramms zu zeichnen, nämlich ein Dreieck als so genanntes **Krafteck** (Bild 2.25). Dazu werden die einzelnen Kraftvektoren unter Einhaltung ihrer Richtung zu einem **Kräftezug** aneinander gereiht, wobei die Reihenfolge keine Rolle spielt, wie Bild 2.25b zeigt. Die Verbindungsgerade von Anfang und Ende des Kräftezuges ergibt die **Resultierende**, deren **Richtungspfeil am Ende des Kräftezuges** liegt.

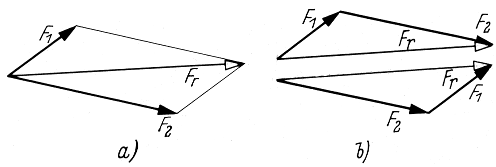


Bild 2.25 Zusammensetzen zweier Kräfte mittels Krafteck
a) Kräfteparallelogramm, b) Kraftecke

Zu beachten ist, dass Resultierende und Einzelkräfte niemals gemeinsam wirken, sondern nur die Resultierende oder nur die Einzelkräfte. Sie ersetzen sich gegenseitig. In diesem Buch sind zur Unterscheidung entweder die Resultierende oder deren Komponenten mit hellem Richtungspfeil dargestellt, und zwar vorzugsweise die jeweils zu ermittelnden Kräfte.

Beispiel 2.9
Es ist die Resultierende zweier Kräfte von 1200 und 800 N, deren Wirklinien sich rechtwinklig schneiden, zeichnerisch mittels Kräfteparallelogramm und mittels Krafteck zu bestimmen und der Richtungswinkel zur größeren Kraft anzugeben.
Lösung:
Gegeben: $F_1 = 1200$ N, $F_2 = 800$ N, $\gamma = 90°$.
Gesucht: F_r und α_r.
1. Kräfteparallelogramm (Bild 2.26a)
Gewählt wird der Kräftemaßstabsfaktor $m_F = 400$ N/cm. Damit ergeben sich entspr. Gl. (1.2) die zu zeichnenden Vektorlängen

$$F_{1\,\text{gez}} = \frac{F_1}{m_F} = \frac{1200\ \text{N}}{400\ \text{N}}\ \text{cm} = 3\ \text{cm},$$

$$F_{2\,\text{gez}} = \frac{F_1}{m_F} = \frac{800\ \text{N}}{400\ \text{N}}\ \text{cm} = 2\ \text{cm}.$$

Die Kraftvektoren werden unter dem Winkel γ aneinander gezeichnet und zum Parallelogramm (hier zum Rechteck) ergänzt. Die vom Schnittpunkt der Wirklinien ausgehende Diagonale ist die Resultierende F_r, deren Vektorlänge $F_{r\,gez} = 3{,}6$ cm gemessen wird. Somit ist entspr. Gl. (1.3):

$$F_r = F_{r\,gez} \cdot m_F = 3{,}6\,\text{cm} \cdot 400\,\text{N/cm} = 1440\,\text{N}.$$

Ferner wird gemessen der Richtungswinkel $\alpha_r = 33{,}7°$.
2. Krafteck (Bild 2.26b)

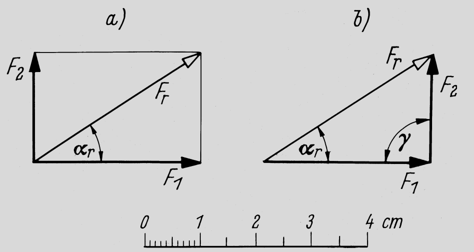


Bild 2.26 Ermittlung der Resultierenden
a) im Kräfteparallelogramm,
b) im Krafteck

Die Kraftvektoren werden ihrer Richtung entsprechend zu einem Kräftezug aneinander gereiht. Die Verbindungsgerade von Anfangs- und Endpunkt ist die Resultierende F_r mit dem Richtungspfeil an der Spitze von F_2. Die Vektorlänge $F_{r\,gez}$ und der Winkel α_r werden wie unter 1. gemessen.

Für die zeichnerische **Zerlegung einer Kraft in zwei Komponenten**, deren Wirklinien gegeben sind, wird der Parallelogrammsatz sinngemäß angewendet. Die gegebene Kraft ist die Resultierende der gesuchten Komponenten. Mittels Parallelverschiebung der Wirklinien W_1 und W_2 (Bild 2.27a) bis zur Pfeilspitze von F ergibt sich ein Parallelogramm, dessen Seiten die Komponenten F_1 und F_2 darstellen (Bild 2.27b). Mit weniger Zeichenaufwand erhält man dasselbe Ergebnis im Krafteck (Bild 2.27c), wobei es bedeutungslos ist, ob W_1 oder W_2 verschoben wird.

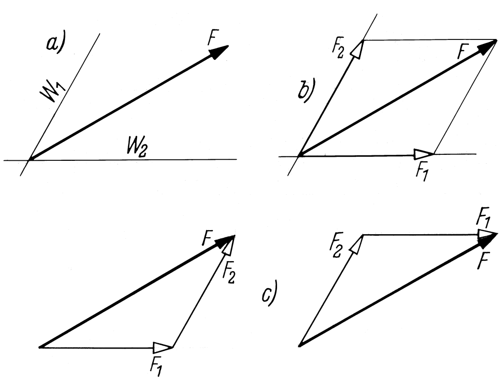


Bild 2.27 Zerlegen einer Kraft in Komponenten
a) Kraft und Wirklinien der Komponenten,
b) Kräfteparallelogramm, c) Kraftecke

Beispiel 2.10
Für eine Kraft von 2 kN, deren Wirklinie mit der x-Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems den Winkel 30° einschließt und deren Vektorlänge 8 cm betragen soll, sind die Komponenten in Richtung der Koordinatenachsen zeichnerisch zu ermitteln.
Lösung:
Gegeben: $F = 2000$ N, $\alpha = 30°$, $F_{gez} = 8$ cm.
Gesucht: F_x und F_y.
Der Kraftvektor wird unter $\alpha = 30°$ zur x-Achse in das Koordinatensystem eingezeichnet (Bild 2.28). Durch die Pfeilspitze zu den Koordinatenachsen gezogene Parallelen ergeben auf den Achsen die gesuchten Komponenten F_x und F_y. Die Lösung mittels Kräfteparallelogramm zeigt Bild 2.28a, mittels Krafteck Bild 2.28b.

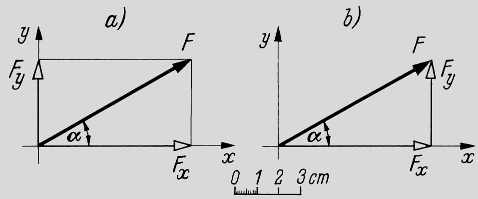


Bild 2.28 Ermittlung der Komponenten einer Kraft
a) im Kräfteparallelogramm,
b) im Krafteck

Gemessen werden $F_{x\,gez} = 6{,}92$ cm und $F_{y\,gez} = 4$ cm. Mit dem Kräftemaßstabsfaktor (nach Gl. (1.1))

$$m_F = \frac{F}{F_{gez}} = \frac{2000\text{N}}{8\,\text{cm}} = 250\,\text{N/cm}$$

ergeben sich entspr. Gl. (1.3) die Komponenten

$$F_x = F_{x\,gez} \cdot m_F = 6{,}92\,\text{cm} \cdot 250\,\text{N/cm} = 1730\,\text{N} = 1{,}73\,\text{kN},$$

$$F_y = F_{y\,gez} \cdot m_F = 4\,\text{cm} \cdot 250\,\text{N/cm} = 1000\,\text{N} = 1\,\text{kN}.$$

Wird anstelle der Ersatzkraft (der Resultierenden) die Kraft gesucht, die sich mit zwei Einzelkräften im Gleichgewicht befindet, so ist das ebenfalls mittels Krafteck möglich. Diese **Gleichgewichtskraft** ist so groß wie die Resultierende, dieser jedoch entgegengerichtet und hat somit im Krafteck gleichen Umfahrungssinn wie die Vektoren der gegebenen Kräfte.
In Bild 2.29 sind die Zusammenhänge an einer Pendelstange mit Seilrolle und Seil dargestellt. Die Seilrolle, an der die Seilkräfte F_S wirken, wird durch die von der Stange auf die Seilrollenachse ausgeübte Kraft F im Gleichgewicht gehalten. Der **Richtungspfeil** der gesuchten Gleichgewichtskraft F schließt den aus den bekannten Seilkräften F_S gebildeten **Kräftezug. Alle Vektoren haben im Krafteck gleichen Umfahrungssinn** (Bild 2.29c).

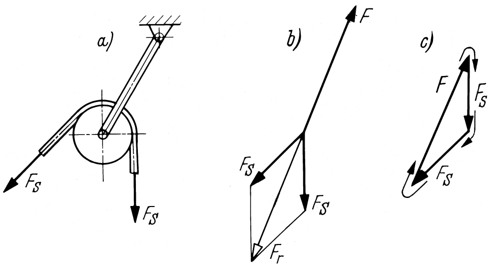


Bild 2.29 Kräftegleichgewicht an einer Seilrolle
a) Anordnung der Rolle (Lageplan), b) Kräfteparallelogramm mit Resultierender und Gleichgewichtskraft, c) Krafteck zur Ermittlung von F mit Angabe des Umfahrungssinns (Kräfteplan)

Diese Erkenntnisse sind allgemein für das Gleichgewicht von Kräften wichtig und lassen sich zusammenfassen zur

zeichnerischen Gleichgewichtsbedingung:

Die Kräfte eines zentralen ebenen Kräftesystems befinden sich im Gleichgewicht, wenn ihre Vektoren ein geschlossenes Krafteck bilden und darin gleichen Umfahrungssinn haben.

Dieser Lehrsatz besagt auch, dass in einem Kräftesystem, das sich im Gleichgewicht befindet, die Resultierende gleich null ist, da Anfang und Ende des Kräftezuges zusammentreffen.

Um die zeichnerische Kräfteermittlung übersichtlich zu gestalten, ist es zweckmäßig, einen Lageplan und einen Kräfteplan anzufertigen:

Der **Lageplan** veranschaulicht die maßstabgerechte Lage der Kräfte (ihrer Wirklinien) unabhängig vom Betrag (die Kraftvektoren werden unmaßstäblich, jedoch lagegerecht eingezeichnet).

Der **Kräfteplan** ist das maßstäbliche Krafteck, das durch lagegerechtes Aneinanderreihen der Kraftvektoren entsteht.

Aus dem Lageplan werden die Wirklinien durch Parallelverschieben in den Kräfteplan übertragen. Betrag und Wirkrichtung der gesuchten Kraft ergeben sich im Kräfteplan. Zur Lagebestimmung wird ihr Vektor in den Lageplan übertragen.

Es empfehlen sich folgende **Arbeitsschritte:**

1. Schritt: Freimachen des Bauteils, an dem die gesuchte Kraft angreift.

2. Schritt: Lageplan mit winkelgerechter Anordnung der sich in einem Punkt schneidenden Wirklinien zeichnen, Kräfte unmaßstäblich eintragen.

3. Schritt: Kräfteplan anfertigen durch maßstäbliches Aneinanderzeichnen der Kraftvektoren in beliebiger Reihenfolge zu einem Kräftezug, dessen Anfang und Ende verbinden, so dass ein geschlossenes Krafteck entsteht.

4. Schritt: Wirkrichtung der ermittelten Kraft im Kräfteplan durch Eintragen des Richtungspfeils angeben (Resultierende am Ende, Gleichgewichtskraft am Anfang des Kräftezuges).

5. Schritt: Vektorlänge der ermittelten Kraft im Kräfteplan abmessen und in Krafteinheiten umrechnen (ihren Betrag errechnen). Danach den unmaßstäblichen Kraftvektor in den Lageplan übertragen, falls seine Lage nicht schon vorher bekannt war.

Beispiel 2.11

An einem Lasthebemagneten (Bild 2.30a) sind zwei Ketten unter einem Winkel von 100° angebracht. Jeder Kettenstrang ist für eine Kraft von 10 kN zugelassen. Welche größte Kraft darf an der Aufhängeöse auftreten?

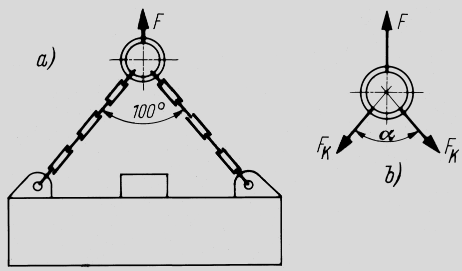


Bild 2.30 Lasthebemagnet mit Zweistrangkette
a) Darstellung, b) freigemachte Öse

Lösung:

Gegeben: $F_K = 10$ kN, $\alpha = 100°$, gewählt
$m_F = 2{,}5$ kN/cm, damit $F_{K\,gez} = (10/2{,}5)$ cm $= 4$ cm (nach Gl. (1.2)).

Gesucht: F in kN.

1. Schritt: Freimachen der Aufhängeöse (Bild 2.30b). Die gesuchte Kraft F hält mit den Kettenkräften F_K die Öse im Gleichgewicht.

2. Schritt: Zeichnen des Lageplans (Bild 2.31a). Die unmaßstäblichen Kraftvektoren werden im Schnittpunkt der Wirklinien (Ösenmitte) angesetzt.

3. Schritt: Parallelverschieben der Wirklinien der Kettenkräfte in den Kräfteplan (Bild 2.31b). Auf den Wirklinien die Vektorlängen $F_{K\,gez}$ aneinander fügen, Richtungspfeile eintragen und Krafteck schließen durch Verbinden von Anfangs- und Endpunkt.

4. Schritt: Richtungspfeil der Gleichgewichtskraft F so eintragen, dass im Krafteck alle Vektoren gleichen Umfahrungssinn haben.

5. Schritt: Messen der für F im Kräfteplan entstandenen Vektorlänge F_{gez} und umrechen mit m_F entspr.

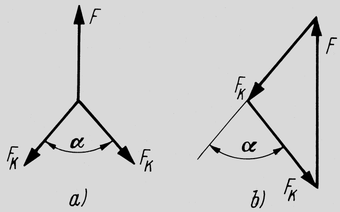


Bild 2.31 Lage- und Kräfteplan
a) Lageplan, b) Kräfteplan

Gl. (1.3). Es ergibt sich $F_{gez} = 5{,}2$ cm und damit die größtzulässige Kraft

$F = 5{,}2\ \text{cm} \cdot 2{,}5\ \text{kN/cm} = 13\ \text{kN}$.

Auch wenn **zwei Kräfte mit bekannten Wirklinien** bestimmt werden sollen, die sich mit einer gegebenen Kraft im Gleichgewicht befinden, kann sinngemäß nach den vorgenannten Arbeitsschritten verfahren werden.

Beispiel 2.12
An einem Mast (Bild 2.32) ist ein Halteseil für den Oberleitungsdraht einer Straßenbahn befestigt. Die Seilkraft beträgt 750 N. Welche Kräfte wirken in den Spannseilen 1 und 2, die mit dem Halteseil in einer Ebene liegen?

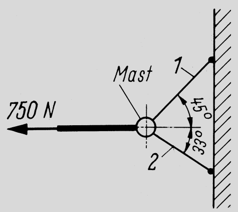


Bild 2.32 Mast mit Halteseil und Spannseilen

Lösung:
Gegeben: $F = 750$ N, $\alpha = 45°, \beta = 33°$, gewählt $m_F = 150$ N/cm, damit $F_{gez} = 5$ cm (nach Gl. (1.2)).
Gesucht: F_1 und F_2.
1. Schritt: Freimachen des Mastes. Die gesuchten Seilkräfte F_1 und F_2 ziehen am Mast, wie Bild 2.33a zeigt.
2. Schritt: In den Lageplan (Bild 2.33a) werden die Wirklinien W_1 und W_2 unter den Winkeln α und β gezeichnet und die Kräfte unmaßstäblich eingetragen.
3. Schritt: Der Kräfteplan wird mit F_{gez} begonnen. An einem Ende dieser Strecke wird die Wirklinie W_1, am anderen die Wirklinie W_2 winkelgerecht angetragen, so dass ein geschlossenes Krafteck entsteht.
4. Schritt: Die Richtungspfeile für F_1 und F_2 sind durch die Wirkrichtung von F bedingt. Wegen des Gleichgewichts haben die Vektoren im Krafteck gleichen Umfahrungssinn.

5. Schritt: Im Kräfteplan werden gemessen die Vektorlängen $F_{1\,gez} = 2{,}8$ cm und $F_{2\,gez} = 3{,}6$ cm. Mit m_F ergeben sich entspr. Gl. (1.3) die gesuchten Seilkräfte

$F_1 = 2{,}8\ \text{cm} \cdot 150\ \text{N/cm} = 420\ \text{N}$,

$F_2 = 3{,}6\ \text{cm} \cdot 150\ \text{N/cm} = 540\ \text{N}$.

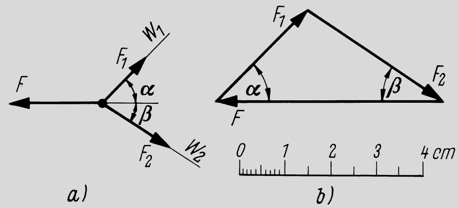


Bild 2.33 Lage- und Kräfteplan
a) Lageplan, b) Kräfteplan

Wirken **mehr als zwei Kräfte** (Bild 2.34a), so kann man die Resultierende oder deren Gegenkraft (die Gleichgewichtskraft) durch wiederholte Parallelogrammkonstruktionen ermitteln. Es wird jeweils von zwei Kräften eine Zwischenresultierende konstruiert, z. B. $F_{r\,1/2}$ aus den Kräften F_1 und F_2 sowie $F_{r\,3/4}$ aus F_3 und F_4 (Bild 2.34b). Durch Zusammensetzen von $F_{r\,1/2}$ und $F_{r\,3/4}$ ergibt sich dann die Gesamtresultierende F_r. Diese erhält man auch, indem man die Zwischenresultierende zweier Kräfte mit der nächsten Kraft zusammensetzt und so fortfährt, bis alle Kräfte erfasst sind.

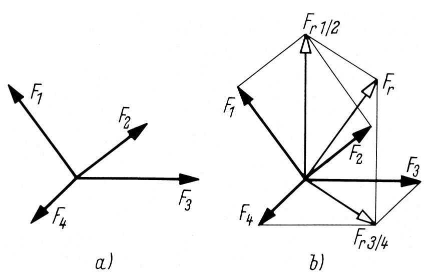


Bild 2.34 Vier Kräfte an einem Punkt
a) Lageplan, b) Kräfteplan mit wiederholter Parallelogrammkonstruktion

Einfacher und schneller gelangt man zum Ziel mittels Krafteck, das zu einem **Kräftepolygon** wird. Beim Aneinandersetzen der Kraftvektoren spielt die Reihenfolge keine Rolle, wie Bild 2.35 zeigt. Die in Bild 2.35a angedeuteten Zwischenresultierenden $F_{r\,1/2}$ und $F_{r\,3/4}$ veranschaulichen den Werdegang zum Polygon. Sie werden nicht mitgezeichnet. Das Krafteck wird übersichtlich, wenn die Reihenfolge der Kräfte so gewählt wird, dass sich der Kräftezug nicht selbst schneidet, was bei der Folge F_3, F_4, F_1, F_2 geschehen würde.

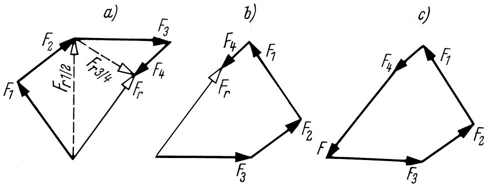


Bild 2.35 Kraftecke als Kräftepolygone
a) Reihenfolge F_1, F_2, F_3, F_4, F_r, b) geänderte Reihenfolge F_3, F_2, F_1, F_4, F_r, c) wie b), jedoch am Ende mit F als Gegenkraft zu F_r

Der Lösungsgang kann ebenfalls sinngemäß in den zuvor erläuterten fünf Arbeitsschritten erfolgen.

Beispiel 2.13
An einem Telegrafenmast sind in einer Ebene drei Drähte befestigt, in denen die Kräfte 350 N, 500 N und 300 N unter den in Bild 2.36 angegebenen Winkeln wirken. Die Resultierende dieser Kräfte ist zeichnerisch zu ermitteln mit einem Maßstabsfaktor von 100 N/cm.

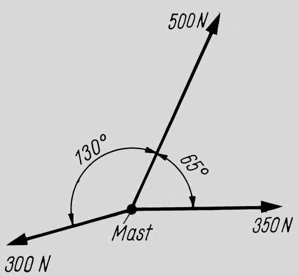


Bild 2.36 Kräfte an einem Telegrafenmast

Lösung:
Gegeben: $F_1 = 350$ N, $F_2 = 500$ N, $F_3 = 300$ N, $\beta = 65°$, $\gamma = 130°$, $m_F = 100$ N/cm, damit $F_{1\,\text{gez}} = 3{,}5$ cm, $F_{2\,\text{gez}} = 5$ cm, $F_{3\,\text{gez}} = 3$ cm.
Gesucht: F_r und α_r als Richtungswinkel zu F_1.
1. Schritt: Entfällt, da die angreifenden Kräfte und deren Lagen bekannt sind (Bild 2.36)
2. Schritt: In den Lageplan werden die Wirklinien W_1, W_2 und W_3 unter den Winkeln β und γ gezeichnet und die Kräfte unmaßstäblich eingetragen (Bild 2.37a).
3. Schritt: Der Kräfteplan wird mit $F_{1\,\text{gez}}$ begonnen (Bild 2.37b). Anschließend wird $F_{2\,\text{gez}}$ unter dem Winkel β angetragen und daran $F_{3\,\text{gez}}$ unter dem Winkel γ angefügt. Die richtigen Winkel entstehen durch Parallelverschieben der Wirklinien aus dem Lageplan in den Kräfteplan. Anfang und Ende des Kräftezuges werden verbunden, so dass ein Krafteck entsteht.
4. Schritt: Die Wirkrichtung der Resultierenden wird durch Anbringen des Richtungspfeiles angegeben. Seine Spitze weist auf das Ende des Kräftezuges, liegt also an der Spitze von F_3.

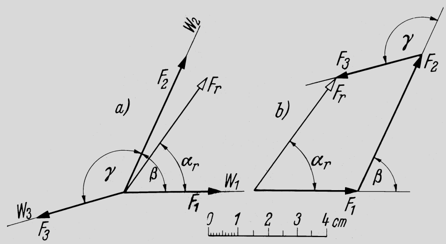


Bild 2.37 Lage- und Kräfteplan
a) Lageplan, b) Kräfteplan

5. Schritt: Die Vektorlänge der ermittelten Resultierenden und ihr Richtungswinkel zur Kraft F_1 werden im Kräfteplan gemessen: $F_{r\,\text{gez}} = 4{,}63$ cm, $\alpha_r = 54°$. Durch Parallelverschieben in den Lageplan ergibt sich die Lage von F_r. Es betragen:

$F_r = 4{,}63\text{ cm} \cdot 100\text{ N/cm} = 463\text{ N}, \alpha_r = 54°$.

Wirken mehrere **Kräfte auf derselben Wirklinie**, dann liegt auch die Resultierende F_r bzw. die Gleichgewichtskraft F auf dieser Wirklinie (Bild 2.38). Kräfteparallelogramm und Krafteck werden zu einer Strecke. Zur übersichtlichen Darstellung zeichnet man die Kraftvektoren dicht neben die Wirklinie und markiert die Vektorlängen durch kurze Querstriche.

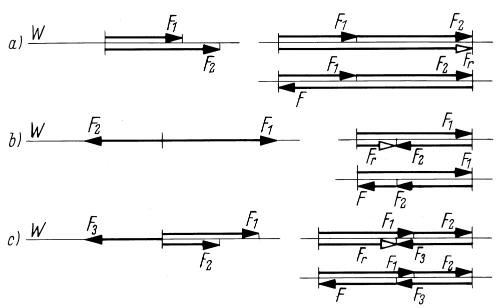


Bild 2.38 Kräfte auf gleicher Wirklinie
a) zwei Kräfte gleicher Richtung, b) zwei Kräfte entgegengesetzter Richtung, c) drei Kräfte verschiedener Richtung

2.2.3 Rechnerische Kräfteermittlung

Kräfte auf gemeinsamer Wirklinie
Die Berechnungsgleichungen ergeben sich aus Bild 2.38. Danach gilt für die aus n Einzelkräften gebildete

Resultierende
$$\boldsymbol{F_r = \Sigma F_i = F_1 + F_2 + F_3 + \ldots + F_n} \tag{2.1}$$

In diese Gleichung sind Kräfte mit entgegengesetzter Wirkrichtung mit verschiedenen Vorzeichen einzusetzen. Vorzugsweise werden waagerecht nach rechts und senkrecht nach oben wirkende Kräfte positiv angenommen und zu diesen entgegengesetzt wirkende negativ.
Die Gegenkraft zur Resultierenden, die Gleichgewichtskraft F, die das Kräftesystem im Gleichgewicht hält, folgt aus der Gleichgewichtsbedingung $\Sigma F = 0$, also $F + F_r = 0$ oder $F + \Sigma F_i = 0$, weil bei Gleichgewicht die Resultierende und damit die Summe aller Kräfte gleich null ist. Somit beträgt für n Einzelkräfte die

Gleichgewichtskraft
$$\boldsymbol{F = -\Sigma F_i = -(F_1 + F_2 + F_3 + \ldots + F_n)} \tag{2.2}$$

Auch in dieser Gleichung sind entgegengesetzte Wirkrichtungen durch verschiedene Vorzeichen zu unterscheiden. Die Wirkrichtung der errechneten Kraft ergibt sich aus dem Vorzeichen des Ergebnisses.

Zwei Kräfte, deren Wirklinien sich rechtwinklig schneiden
Aus Bild 2.39 folgt nach dem Lehrsatz des Pythagoras der Betrag für die

Resultierende $$\boldsymbol{F_r = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}} \tag{2.3}$$

Zur Kraft F_1 folgt für den

Richtungswinkel $$\boldsymbol{\tan\alpha_r = \frac{F_2}{F_1}} \tag{2.4}$$

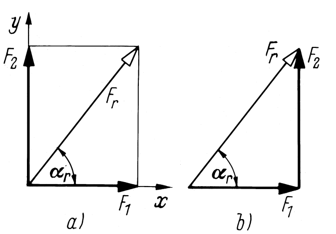


Bild 2.39 Resultierende von zwei rechtwinklig zueinander wirkenden Kräften
a) Kräfteparallelogramm (Rechteck),
b) Krafteck (rechtwinkliges Dreieck)

Damit ergibt sich die

Resultierende $$\boldsymbol{F_r = \frac{F_1}{\cos\alpha_r} = \frac{F_2}{\sin\alpha_r}} \tag{2.5}$$

Die *Gleichgewichtskraft* F zu den Kräften F_1 und F_2 sowie ihr spitzer *Richtungswinkel* α zur Wirklinie von F_1 (Bild 2.40) lassen sich sinngemäß mit den Gl. (2.3) bis (2.5) errechnen.

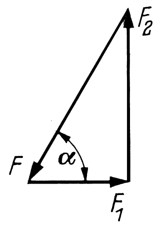


Bild 2.40 Berechnungsskizze zur Ermittlung der Gleichgewichtskraft

Beispiel 2.14
Die Wirklinien zweier Kräfte von 2 kN und 3,5 kN schneiden sich rechtwinklig wie in den Bildern 2.39 und 2.40. Es sind die Gleichgewichtskraft und deren spitzer Richtungswinkel zur Wirklinie der kleineren Kraft zu errechnen.
Lösung:
Gegeben: $F_1 = 2$ kN, $F_2 = 3{,}5$ kN.
Gesucht: F und α.
Aus Bild 2.40 folgen entspr. Gln. (2.3) und (2.4) für die Gleichgewichtskraft

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = \sqrt{(2\,\text{kN})^2 + (3{,}5\,\text{kN})^2}$$
$$= \sqrt{2^2 + 3{,}5^2}\,\text{kN} = 4{,}03\,\text{kN}$$

und für den Richtungswinkel

$$\tan\alpha = \frac{F_2}{F_1} = \frac{3{,}5\,\text{kN}}{2\,\text{kN}}, \text{ daraus } \alpha = 60{,}26°.$$

Die errechnete Kraft F ist so groß wie die Resultierende F_r und liegt auf derselben Wirklinie, wirkt jedoch entgegengerichtet zu F_r.

Zwei Kräfte, deren Wirklinien sich schiefwinklig schneiden
Für die in Bild 2.41 den Winkel γ einschließenden Kräfte F_1 und F_2 erhält man die Resultierende F_r aus dem Cosinussatz

$$F_r^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \cos(180° - \gamma)$$

Da $\cos(180° - \gamma) = -\cos\gamma$ ist, beträgt die

Resultierende
$$\boldsymbol{F_r = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \cos\gamma}} \tag{2.6}$$

Der Winkel zwischen der Resultierenden F_r und der Kraft F_1 ergibt sich aus dem Sinussatz

$$\frac{\sin \alpha_r}{F_2} = \frac{\sin(180° - \gamma)}{F_r}$$

Mit $\sin(180° - \gamma) = \sin \gamma$ folgt für den

Richtungswinkel $\quad \boldsymbol{\sin \alpha_r = \sin \gamma \cdot \frac{F_2}{F_r}}$ (2.7)

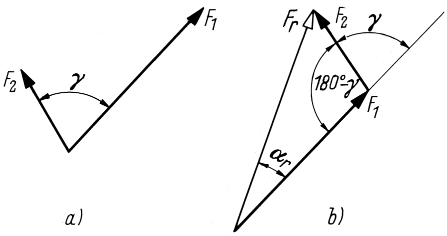


Bild 2.41 Zur Berechnung schiefwinkliger Kräftedreiecke
a) Lageplan, b) Krafteck

Mit dem Sinus- und dem Cosinussatz lassen sich auch die Gleichgewichtskraft, die Komponenten und alle Winkel in einem schiefwinkligen Kräftedreieck errechnen.

Beispiel 2.15
Die Seilkräfte in den Spannseilen nach Beisp. 2.12 sind rechnerisch zu ermitteln (Bild 2.42).

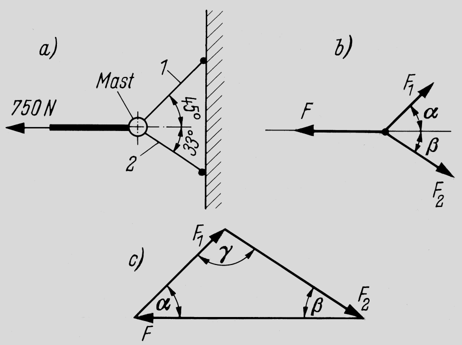


Bild 2.42 Berechnungsskizze
a) Mast mit Halteseil und Spannseilen,
b) freigemachter Mast, c) Krafteckskizze

Lösung:
Gegeben: $F = 750$ N, $\alpha = 45°, \beta = 33°$.
Gesucht: F_1 und F_2.
Mit dem Winkel $\gamma = 180° - \alpha - \beta = 180° - 45° - 33° = 102°$ folgen aus dem Sinussatz

$$\frac{F_1}{\sin \beta} = \frac{F_2}{\sin \alpha} = \frac{F}{\sin \gamma}$$

die gesuchten Kräfte

$$F_1 = F\frac{\sin \beta}{\sin \gamma} = 750\,\text{N}\frac{\sin 33°}{\sin 102°} = 418\,\text{N}$$

$$F_2 = F\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = 750\,\text{N}\frac{\sin 45°}{\sin 102°} = 542\,\text{N}$$

Mehr als zwei Kräfte
Zweckmäßig bedient man sich eines *x,y*-Koordinatensystems (Bild 2.43), in dem die Vektoren der Kräfte im Achsenschnittpunkt beginnen. Alle Kräfte werden in Richtung der beiden Koordinatenachsen zerlegt, so dass sich nur zwei senkrecht zueinander stehende Wirkrichtungen ergeben und sich alle Komponenten leicht zusammenfassen lassen.

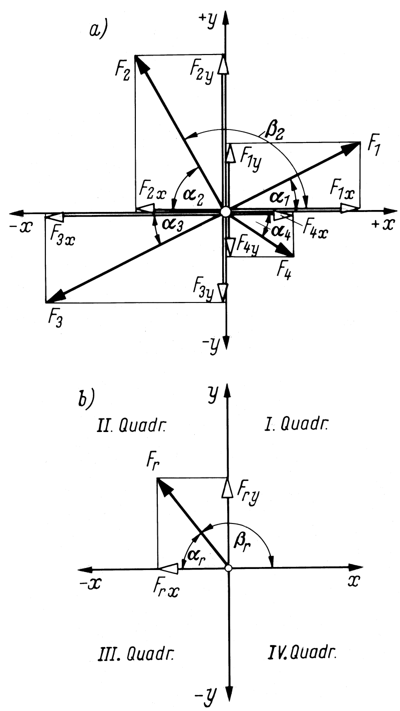


Bild 2.43 Kräftezerlegung und -zusammensetzung im Koordinatensystem
a) Zerlegen von Einzelkräften, b) Zusammensetzen zur Resultierenden

Mittels der Winkelfunktion erhält man die

Komponenten der Einzelkräfte $\quad \boldsymbol{F_{ix} = F_i \cdot \cos \alpha_i}$ (2.8)

$\boldsymbol{F_{iy} = F_i \cdot \sin \alpha_i}$ (2.9)

mit $i = 1, 2, 3 \ldots n$ bei n Einzelkräften und α_i als spitzem Winkel der Kraft F_i zur x-Achse.

Komponenten in Richtung der negativen x- bzw. y-Achse erhalten ein negatives Vorzeichen. Deshalb ist die Angabe des Quadranten wichtig, in welchem die Kraft F_i wirkt. Die Vorzeichen ergeben sich aber auch unmittelbar, wenn man in die Gln. (2.8) und (2.9) anstelle der spitzen Winkel α_i stets die von der positiven x-Achse ausgehenden Winkel β_i einsetzt (Bild 2.43a u. Bild 2.44).

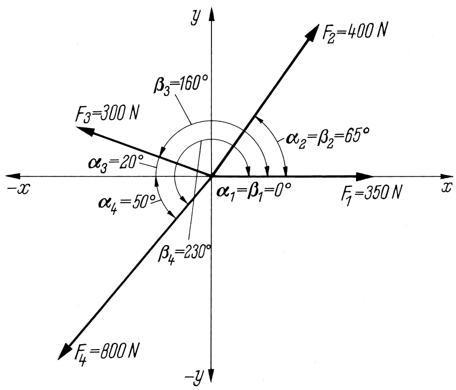


Bild 2.44 Zentrales Kräftesystem mit vier Kräften

Die Komponenten F_{ix} und F_{iy} werden entspr. Gl. (2.1) zusammengefasst zu den

Komponenten der Resultierenden

$$\boldsymbol{F_{rx} = \Sigma F_{ix} = F_{1x} + F_{2x} + \ldots + F_{nx}} \qquad (2.10)$$

$$\boldsymbol{F_{ry} = \Sigma F_{iy} = F_{1y} + F_{2y} + \ldots + F_{ny}} \qquad (2.11)$$

Nun kann die Resultierende F_r (Bild 2.43b) entspr. Gl. (2.3) errechnet werden:

Resultierende $$\boldsymbol{F_r = \sqrt{F_{rx}^2 + F_{ry}^2}} \qquad (2.12)$$

Nach Gl. (2.4) folgt für den

Richtungswinkel zur x-Achse $$\boldsymbol{\tan \alpha_r = \frac{F_{ry}}{F_{rx}}} \qquad (2.13)$$

Der Quadrant für F_r und α_r ergibt sich aus den Vorzeichen der Komponenten F_{rx} und F_{ry}. Es genügt, in die Gl. (2.13) die Komponenten als absolute Beträge ohne Vorzeichen einzusetzen. Den Zusammenhang zwischen den Quadranten und den Vorzeichen der Kräfte veranschaulicht Tab. 4.
Durch tabellarische Anordnung der Zwischenergebnisse wird die Lösung übersichtlich (s. Beisp. 2.16).

Beispiel 2.16
Die Resultierende des in Bild 2.44 dargestellten zentralen Kräftesystems ist zu berechnen.

Lösung:
Gegeben: Kräfte und Winkel nach Bild 2.44.
Gesucht: F_r, α_r, β_r und Quadrant von F_r.
Nach den Gln. (2.8) und (2.9) betragen die Komponenten der Einzelkräfte auf volle N gerundet:

$F_{1x} = F_1 = 350$ N, $F_{1y} = 0$ (da $\alpha_1 = 0$),

$F_{2x} = F_2 \cdot \cos\alpha_2 = 400\,\text{N} \cdot \cos 65° = 169$ N,

$F_{2y} = F_2 \cdot \sin\alpha_2 = 400\,\text{N} \cdot \sin 65° = 363$ N,

$F_{3x} = F_3 \cdot \cos\alpha_3 = 300\,\text{N} \cdot \cos 20° = 282$ N,

$F_{3y} = F_3 \cdot \sin\alpha_3 = 300\,\text{N} \cdot \sin 20° = 103$ N,

$F_{4x} = F_4 \cdot \cos\alpha_4 = 800\,\text{N} \cdot \cos 50° = 514$ N,

$F_{4y} = F_4 \cdot \sin\alpha_4 = 800\,\text{N} \cdot \sin 50° = 613$ N.

Eine übersichtliche Zusammenstellung dieser Ergebnisse zeigt folgende Tabelle:

i	$\frac{F_i}{\text{N}}$	α_i	Quadrant	β_i	$\frac{F_{ix}}{\text{N}}$	$\frac{F_{iy}}{\text{N}}$
1	350	0°	I.	0°	350	0
2	400	65°	I.	65°	169	363
3	300	20°	II.	160°	−282	103
4	800	50°	III.	230°	−514	−613
Σ					−277	−147

Durch Addition der Komponenten der Einzelkräfte ergeben sich nach den Gln. (2.10) und (2.11) die Komponenten der Resultierenden

$F_{rx} = \Sigma F_{ix} = -277$ N und $F_{ry} = \Sigma F_{iy} = -147$ N,

wie in der Tabelle angegeben.
Nach Gl. (2.12) erhält man die Resultierende

$$F_r = \sqrt{F_{rx}^2 + F_{ry}^2} = \sqrt{(-277)^2 + (-147)^2}\,\text{N} = 314\,\text{N}$$

und deren spitzen Richtungswinkel zur x-Achse nach Gl. (2.13) mit den Absolutbeträgen der resultierenden Komponenten:

$$\tan\alpha_r = \frac{|F_{ry}|}{|F_{rx}|} = \frac{147\,\text{N}}{277\,\text{N}}, \text{ daraus folgt } \alpha_r = 28°.$$

Nach den Vorzeichen von F_{rx} und F_{ry} liegen F_r und α_r im III. Quadranten (s. Tab. 4). Somit beträgt

$\beta_r = 180° + \alpha_r = 180° + 28° = 208°$

als Richtungswinkel zur positiven x-Achse.

In gleicher Weise wie im Beisp. 2.16 lässt sich die Gleichgewichtskraft F zu den Kräften F_1 bis F_4 errechnen. Sie ist die Gegenkraft zur Resultierenden F_r, wirkt auf derselben Linie, jedoch im entgegengesetzten (I.) Quadranten. Die Komponenten F_x und F_y sind F_{rx} und F_{ry} entgegengerichtet. Da sich in diesem Fall alle Kräfte des Systems im Gleichgewicht befinden, ist es sinnvoller, auszugehen von der

rechnerischen Gleichgewichtsbedingung:

Die Kräfte eines zentralen ebenen Kräftesystems befinden sich im Gleichgewicht,

wenn die Summe aller x-Komponenten und die Summe aller y-Komponenten gleich null ist.

Mathematisch formuliert:

Gleichgewichts-bedingungen

$$\Sigma \boldsymbol{F}_x = \mathbf{0} \tag{2.14}$$

$$\Sigma \boldsymbol{F}_y = \mathbf{0} \tag{2.15}$$

Auch in diesen Gleichungen erhalten Komponenten in negativer Richtung der Koordinatenachsen ein negatives Vorzeichen. Sinngemäß zur Gl. (2.12) gilt nun für den Betrag der

Gleichgewichtskraft

$$\boldsymbol{F} = \sqrt{\boldsymbol{F}_x^2 + \boldsymbol{F}_y^2} \tag{2.16}$$

und entspr. Gl. (2.13) folgt für den

Richtungswinkel zur x-Achse

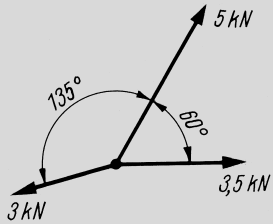
$$\tan \alpha_r = \frac{\boldsymbol{F}_y}{\boldsymbol{F}_x} \tag{2.17}$$

Der Quadrant von F ergibt sich aus den Vorzeichen der Komponenten F_x und F_y nach Tab. 4. Für den rechnerischen Ansatz werden die Komponenten der gesuchten Kraft in der Berechnungsskizze positiv angenommen (s. Beisp. 2.17). Sinngemäß lassen sich auch zwei unbekannte Kräfte eines zentralen Kräftesystems errechnen unter der Voraussetzung, dass es sich im Gleichgewicht befindet und die Wirklinien der Kräfte bekannt sind (s. Beisp. 2.18).

Zur Errechnung von Gleichgewichtskräften empfehlen sich folgende **Arbeitsschritte:**

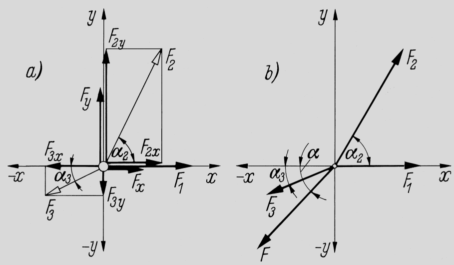
1. **Schritt:** Berechnungsskizze anfertigen mit allen gegebenen Kräften, deren Richtungswinkeln und Komponenten sowie den Komponenten der gesuchten Kraft, die positiv angenommen werden (bei zwei unbekannten Kräften Ansatz der Komponenten mit beliebigem Richtungssinn).
2. **Schritt:** Berechnung der Komponenten der gegebenen Kräfte nach den Gln. (2.8) und (2.9).
3. **Schritt:** Berechnung der gesuchten Komponenten nach den Gleichgewichtsbedingungen, den Gln. (2.14) und (2.15). Ein negatives Ergebnis besagt, dass die Komponenten der angenommenen Richtung entgegenwirken.
4. **Schritt:** Berechnung der gesuchten Gleichgewichtskraft (bzw. -kräfte) und des Richtungswinkels nach den Gln. (2.16) und (2.17) sowie Bestimmung des Quadranten.

Beispiel 2.17
Für das zentrale Kräftesystem nach Bild 2.45 ist die Kraft zu errechnen, mit der sich das System im Gleichgewicht befindet.



2.45 Zentrales Kräftesystem mit drei Kräften

Lösung:
Gegeben: $F_1 = 3{,}5$ kN, $\alpha_1 = 0$, $F_2 = 5$ kN, $\alpha_2 = 60°$,
$F_3 = 3$ kN, $\alpha_3 = 195° - 180° = 15°$.
Gesucht: F, α und Quadrant.
1. Schritt: Anfertigen der Berechnungsskizze (Bild 2.46a).



2.46 Berechnungsskizze
a) Komponenten der Kräfte im Koordinatensystem, b) Lageskizze mit Gleichgewichtskraft

2. Schritt: Komponenten nach den Gln. (2.8) und (2.9)

$F_{1x} = F_1 = 3{,}5$ kN, $F_{1y} = 0$,

$F_{2x} = F_2 \cdot \cos \alpha_2 = 5 \text{ kN} \cdot \cos 60° = 2{,}5$ kN,

$F_{2y} = F_2 \cdot \sin \alpha_2 = 5 \text{ kN} \cdot \sin 60° = 4{,}33$ kN,

$F_{3x} = F_3 \cdot \cos \alpha_3 = 3 \text{ kN} \cdot \cos 15° = 2{,}9$ kN,

$F_{3y} = F_3 \cdot \sin \alpha_3 = 3 \text{ kN} \cdot \sin 15° = 0{,}78$ kN.

3. Schritt: Die Komponenten F_x und F_y der gesuchten Kraft F folgen aus den Gln. (2.14) und (2.15), in die F_{3x} und F_{3y} mit negativem Vorzeichen eingesetzt werden:

$\Sigma F_x = 0$,

$F_x + F_1 + F_{2x} - F_{3x} = 0$,

$F_x = F_{3x} - F_{2x} - F_1 = (2{,}9 - 2{,}5 - 3{,}5)$ kN
$= -3{,}1$ kN,

$\Sigma F_y = 0$,

$F_y + F_{2y} - F_{3y} = 0$,

$F_y = F_{3y} - F_{2y} = (0{,}78 - 4{,}33)$ kN $= -3{,}55$ kN.

Die negativen Vorzeichen geben an, dass beide Komponenten der angenommenen positiven Richtung entgegenwirken, d. h. in Richtung der negativen Koordinatenachsen.

4. Schritt: Nach Gl. (2.16) ergibt sich die gesuchte Gleichgewichtskraft

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{(-3{,}1)^2 + (-3{,}55)^2}\ \text{kN}$$
$$= 4{,}713\ \text{kN}$$

und aus Gl. (2.17)

$$\tan\alpha = \frac{F_y}{F_x} = \frac{-3{,}55\ \text{kN}}{-3{,}1\ \text{kN}} \text{ folgt } \alpha = 48{,}87^\circ \approx 48{,}9^\circ$$

als spitzer Richtungswinkel zur x-Achse. Die Kraft liegt im III. Quadranten (Bild 2.46b), was sich auch aus Tab. 4 ergibt.

Beispiel 2.18
Die Wirklinien der Stabkräfte am Knoten eines Fachwerks (Bild 2.47) schneiden sich in einem Punkt, und die Kräfte F_1 bis F_4 befinden sich im Gleichgewicht. Bekannt sind $F_1 = 20$ kN und $F_2 = 30$ kN sowie die Wirklinien von F_3 und F_4. Die Stabkräfte F_3 und F_4 sind zu errechnen und deren angenommene Wirkrichtung zu überprüfen.

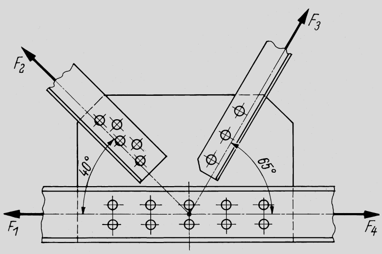


Bild 2.47 Knoten eines Fachwerks

Lösung:
Gegeben: $F_1 = 20$ kN, $\alpha_1 = 0$, $F_2 = 30$ kN, $\alpha_2 = 40^\circ$, $\alpha_3 = 65^\circ$, $\alpha_4 = 0$.
Gesucht: F_3 und F_4 mit Angabe der Wirkrichtung.
1. Schritt: Anfertigen der Berechnungsskizze Bild 2.48.

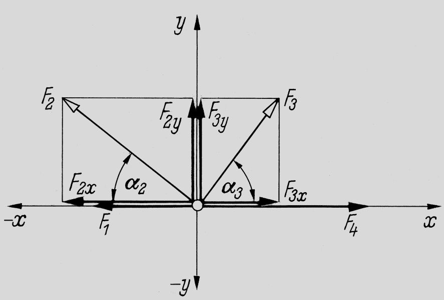


Bild 2.48 Berechnungsskizze

2. Schritt: Komponenten nach den Gln. (2.8) und (2.9):

$$F_{1x} = F_1 = 20\ \text{kN},\ F_{1y} = 0,$$
$$F_{2x} = F_2 \cdot \cos\alpha_2 = 30\ \text{kN} \cdot \cos 40^\circ = 22{,}98\ \text{kN},$$
$$F_{2y} = F_2 \cdot \sin\alpha_2 = 30\ \text{kN} \cdot \sin 40^\circ = 19{,}28\ \text{kN}.$$

3. Schritt: In die Gl. (2.14) sind F_1 und F_{2x} negativ einzusetzen:

$$\Sigma F_x = 0,$$
$$F_4 + F_{3x} - F_{2x} - F_1 = 0.$$

Da F_4 und F_{3x} unbekannt sind, lässt sich die Gleichung vorerst nicht lösen und es wird weitergerechnet mit Gl. (2.15):

$$\Sigma F_y = 0,$$
$$F_{3y} + F_{2y} = 0, \text{ daraus } F_{3y} = -F_{2y} = -19{,}28\ \text{kN}.$$

Aus $\tan\alpha_3 = \dfrac{F_{3y}}{F_{3x}}$ (entspr. Gl. (2.17)) folgt

$$F_{3x} = \frac{F_{3y}}{\tan\alpha_3} = \frac{-19{,}28\ \text{kN}}{\tan 65^\circ} = -8{,}99\ \text{kN}.$$

Damit ergibt sich aus Gl. (2.14) für

$$F_4 = F_1 + F_{2x} - F_{3x}$$
$$= 20\ \text{kN} + 22{,}98\ \text{kN} - (-8{,}99\ \text{kN}) = 51{,}97\ \text{kN}.$$

4. Schritt: Entspr. Gl. (2.16) wird

$$F_3 = \sqrt{F_{3x}^2 + F_{3y}^2} = \sqrt{(-8{,}99)^2 + (-19{,}28)^2}\ \text{kN}$$
$$= 21{,}27\ \text{kN}.$$

Da beide Komponenten negativ sind, wirkt die Stabkraft $F_3 \approx 21{,}3$ kN der in Bild 2.47 angegebenen Richtung entgegen. Die Stabkraft $F_4 \approx 52$ kN wirkt in der angegebenen Richtung.

Praxishinweis
Wegen der großen Verbreitung und relativ einfachen Handhabung von Computern und Taschenrechnern sind die rechnerischen Lösungsverfahren heute von größerer Bedeutung als die zeichnerischen. Bei praktischen Problemen steht die Ermittlung von Gleichgewichtskräften im Vordergrund, d. h. zu einer bestimmten Anzahl gegebener Kräfte (Aktionskräfte) sind eine Kraft oder zwei Kräfte (Reaktionskräfte) zu bestimmen, die das Kräftegleichgewicht herstellen. Dabei sind häufig Kräfte in zwei Komponenten zu zerlegen, die rechtwinklig aufeinander stehen.

Kontrollfragen:
- Was ist ein zentrales Kräftesystem?
- Wie lautet der Satz vom Kräfteparallelogramm?
- Was versteht man unter einem Krafteck?
- Was gilt betreffs der Reihenfolge der Kräfte im Krafteck und betreffs der Richtungspfeile für die Resultierende und für die Gleichgewichtskraft?
- Wie lauten die zeichnerischen und die rechnerischen Gleichgewichtsbedingungen des zentralen ebenen Kräftesystems?

2.3 Allgemeines ebenes Kräftesystem

Lernziele:
- Die Begriffe statisches Moment und Kräftepaar definieren, ihre Wirkung erläutern und Momente errechnen.

- Allgemeine Kräftesysteme erkennen und die darin unbekannten Kräfte rechnerisch und zeichnerisch ermitteln.
- Die Gleichgewichtsbedingungen des allgemeinen Kräftesystems nennen und bei Kräfteermittlungen anwenden.

2.3.1 Moment und Kräftepaar

Beim **allgemeinen Kräftesystem** schneiden sich die **Wirklinien** der Kräfte **nicht in einem Punkt.** Ihre Lage wird durch den senkrechten Abstand von einem Bezugspunkt 0 bestimmt (Bild 2.49), der als **Wirkabstand** $\boldsymbol{l}$ oder als Hebelarm bezeichnet wird, selbst dann, wenn der Körper kein Hebel ist.

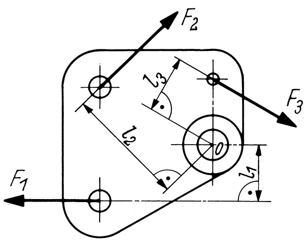


Bild 2.49 Kräfte in einer Ebene an verschiedenen Punkten eines Körpers

Um die Wirkung einer Kraft auf einen Punkt außerhalb ihrer Wirklinie erfassen zu können, führte man eine physikalische Größe ein, die *statisches Moment einer Kraft oder Kraftmoment* genannt wird:

Das statische Moment einer Kraft ist das Produkt aus der Kraft und dem senkrechten Abstand ihrer Wirklinie (dem Wirkabstand) von einem Bezugspunkt.

In Kurzfassung: **Moment gleich Kraft mal Wirkabstand**, und als Gleichung:

Statisches Moment $$\boldsymbol{M = F \cdot l} \qquad (2.18)$$

Die internationale Einheit für diese physikalische Größe ist das Nm (Newtonmeter). Die Schreibweise mN ist falsch, da dies Millinewton bedeutet. Zugelassen und üblich sind auch: Ncm, Nmm, kNm.

Ein Kraftmoment will den Körper um den Bezugspunkt drehen. Der Drehsinn wird durch Vorzeichen ausgedrückt. In Übereinstimmung mit dem mathematisch positiven Drehsinn (Bild 1.1) gilt folgende

Vorzeichenregel für Momente:

Linksdrehende Momente werden mit positivem Vorzeichen (+), rechtsdrehende Momente mit negativem Vorzeichen (−) angegeben.

Das Kraftmoment ist ein Vektor. Er steht senkrecht auf der durch F und l gebildeten Ebene. Die sinnbildliche Darstellung eines Moments kann durch einen Kreisbogen mit Richtungspfeil erfolgen (Bild 2.50).

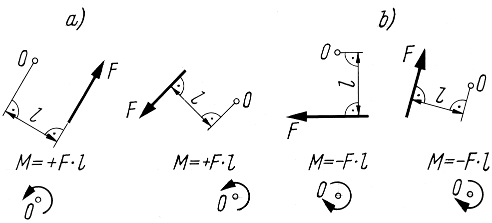


Bild 2.50 Drehsinn statischer Momente
a) positive Momente, b) negative Momente

Beispiel 2.19
Für das in Bild 2.51 skizzierte Schaltgestänge ist das auf die Schaltwelle ausgeübte Moment zu errechnen.

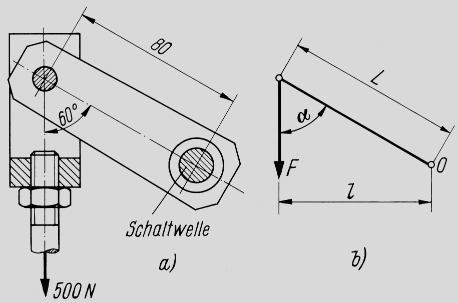


Bild 2.51 Schaltgestänge
a) Darstellung, b) Berechnungsskizze

Lösung:
Gegeben: $F = 500\,\text{N}$, $L = 80\,\text{mm}$, $\alpha = 60°$.
Gesucht: M in Nm.
Die angegebene Hebellänge L ist nicht der Wirkabstand l der Kraft F (Bild 2.51b). Aus $\sin\alpha = l/L$ folgt für $l = L \cdot \sin\alpha$ und damit nach Gl. (2.18) das Moment

$$M = F \cdot l = F \cdot L \cdot \sin\alpha = 500\,\text{N} \cdot 80\,\text{mm} \cdot \sin 60°$$
$$= 34\,640\,\text{Nmm} = 34{,}64\,\text{Nm}.$$

Beim zentralen Kräftesystem ist die Wirkung der Resultierenden gleich der gemeinsamen Wirkung der Einzelkräfte. Sinngemäß ist beim allgemeinen Kräftesystem die Drehwirkung der Resultierenden F_r um einen Bezugspunkt gleich der gemeinsamen Drehwirkung der Einzelkräfte F_i um denselben Bezugspunkt. Diese Erkenntnis wird ausgedrückt im

Momentensatz:

Das statische Moment der Resultierenden ist gleich der Summe der statischen Momente der Einzelkräfte.

Als Gleichung:

Statisches Moment der Resultierenden oder *resultierendes Moment*

$$\boldsymbol{M}_\mathrm{r} = \boldsymbol{\Sigma M}_i = \boldsymbol{M}_1 + \boldsymbol{M}_2 + \ldots + \boldsymbol{M}_\mathrm{n} = \boldsymbol{F}_\mathrm{r} \cdot \boldsymbol{l}_\mathrm{r}$$
$$= \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{F}_i \cdot \boldsymbol{l}_i) = \boldsymbol{F}_1 \cdot \boldsymbol{l}_1 + \boldsymbol{F}_2 \cdot \boldsymbol{l}_2 + \ldots + \boldsymbol{F}_\mathrm{n} \cdot \boldsymbol{l}_\mathrm{n} \qquad (2.19)$$

Die Momente sind mit dem ihrem Drehsinn entsprechenden Vorzeichen einzusetzen.

Beispiel 2.20
An einem Hebel, der auf einer Welle befestigt ist, greifen entspr. Bild 2.52 drei Kräfte an. Es sind das von der Welle aufzunehmende resultierende Moment und sein Drehsinn anzugeben.

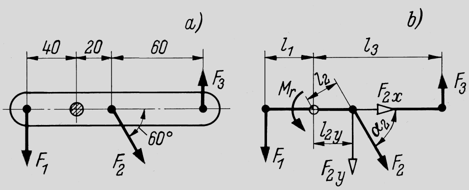


Bild 2.52 Hebel mit drei Kräften
a) Lageskizze, b) Berechnungsskizze

Lösung:
Gegeben: $F_1 = 62$ N, $l_1 = 40$ mm, $F_2 = 105$ N, $l_{2y} = 20$ mm, $\alpha_2 = 60°$, $F_3 = 18$ N, $l_3 = (20 + 60)$ mm $= 80$ mm.
Gesucht: M_r in Nm und Drehsinn.
Nach Bild 2.52b ist $\sin \alpha_2 = l_2/l_{2y}$. Daraus folgt für F_2 der Wirkabstand

$$l_2 = l_{2y} \cdot \sin \alpha_2 = 20 \text{ mm} \cdot \sin 60° = 17{,}32 \text{ mm}.$$

Mit Gl. (2.19), in die das rechtsdrehende Moment $M_2 = F_2 \cdot l_2$ negativ einzusetzen ist, ergibt sich

$$M_\mathrm{r} = F_1 \cdot l_1 - F_2 \cdot l_2 + F_3 \cdot l_3$$
$$= 62 \text{ N} \cdot 40 \text{ mm} - 105 \text{ N} \cdot 17{,}32 \text{ mm}$$
$$+ 18 \text{ N} \cdot 80 \text{ mm}$$
$$= 2101 \text{ Nmm} \approx 2{,}1 \text{ Nm}.$$

Da es positiv ist, handelt es sich um ein linksdrehendes Moment.
Das Moment M_2 kann auch mit der Komponente F_{2y} und deren Wirkabstand l_{2y} errechnet werden: $M_2 = F_{2y} \cdot l_{2y}$, was am Ergebnis nichts ändert. Die Komponente F_{2x} übt kein Moment aus, da ihre Wirklinie durch die Wellenmitte geht, sie also keinen Wirkabstand zum Bezugspunkt besitzt.

Außer Kraft und Kraftmoment ist von besonderer Bedeutung der Begriff

Kräftepaar:

Zwei gleich große, entgegengesetzt wirkende Kräfte auf parallelen Wirklinien bilden ein Kräftepaar (Bild 2.53).

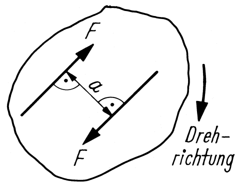


Bild 2.53 Kräftepaar (a = senkrechter Abstand)

Obwohl die Resultierende dieser beiden Kräfte null ist, befinden sie sich nicht im Gleichgewicht, sondern versuchen den Körper zu drehen, üben also ein Moment aus. Die Drehwirkung eines Kräftepaares kann man spüren, wenn man versucht, eine Spindel festzuhalten, an deren Handrad gedreht wird (Bild 2.54a). Auch wenn man nur mit einer Hand dreht (Bild 2.54b), ist ein Kräftepaar Ursache der Drehwirkung. Die zweite Kraft ist die Reaktionskraft der Spindel, die vom Spindellager aufgenommen wird. Allgemein gilt:

Keine Drehbewegung ohne Kräftepaar.

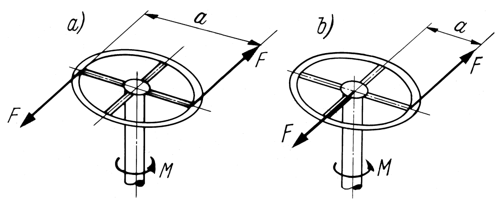


Bild 2.54 Drehwirkung von Kräftepaaren
a) durch zwei Kräfte an einem Handrad
b) durch eine Kraft an einem Handrad

Das **statische Moment eines Kräftepaares** ist gleich dem Produkt aus einer der beiden Kräfte F und dem senkrechten Abstand a ihrer parallelen Wirklinien:

Moment $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{a}$ (2.20)

Wegen seiner Drehwirkung wird es auch als **Drehmoment** bezeichnet. Die Angabe des Drehsinns erfolgt ebenfalls nach der Vorzeichenregel für Momente. Der Betrag des Moments eines Kräftepaares ist vom Bezugspunkt unabhängig, wie aus Bild 2.55 hervorgeht. Im Gegensatz dazu ist das Moment einer Einzelkraft (Gl. (2.18)) immer vom Bezugspunkt abhängig.

Ein Kräftepaar kann nicht durch eine Einzelkraft ersetzt werden, sondern nur durch ein gleich großes Moment mit gleichem Drehsinn. Gleichgewicht mit einem Kräf-