Hilmar Heinemann · Heinz Krämer
Rolf Martin · Peter Müller · Hellmut Zimmer

PHYSIK
in Aufgaben und Lösungen

2., vollständig überarbeitete und erweiterte Auflage

HANSER

Naturkonstanten und weitere Zahlenwerte (CODATA 2018)

Atomare Masseneinheit	$\mathrm{u} = 1{,}660\,539\,066\,60 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg}$
Avogadro-Konstante	$N_\mathrm{A} = 6{,}022\,140\,76 \cdot 10^{23}\ \mathrm{mol}^{-1}$
Bezugssehweite	$a_\mathrm{B} = -25\ \mathrm{cm}$
Bohr'sches Magneton	$\mu_\mathrm{B} = 9{,}274\,010\,0783 \cdot 10^{-24}\ \mathrm{A} \cdot \mathrm{m}^2$
Boltzmann-Konstante	$k = 1{,}380\,649 \cdot 10^{-23}\ \mathrm{J/K}$
Compton-Wellenlänge	$\lambda_\mathrm{C} = 2{,}426\,310\,239 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{m}$
Elektrische Feldkonstante	$\varepsilon_0 = 8{,}854\,187\,8128 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{A} \cdot \mathrm{s}/(\mathrm{V} \cdot \mathrm{m})$
Elementarladung	$e = 1{,}602\,176\,634 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C} \quad (1\ \mathrm{C} = 1\ \mathrm{A} \cdot \mathrm{s})$
Erdmasse	$m_\mathrm{E} = 5{,}972 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}$
Erdradius (mittlerer)	$r_\mathrm{E} = 6471\ \mathrm{km}$
Erdbahnradius (astronomische Einheit, AE)	$r_0 = 149{,}6 \cdot 10^{6}\ \mathrm{km}$
Fallbeschleunigung (norm)	$g_\mathrm{n} = 9{,}806\,65\ \mathrm{m/s}^2$
Gaskonstante (molare)	$R_\mathrm{m} = 8{,}314\,462\,618\ \mathrm{J}/(\mathrm{mol} \cdot \mathrm{K})$
Gravitationskonstante	$G = 6{,}674\,30 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{m}^3/(\mathrm{kg} \cdot \mathrm{s}^2)$
Lichtgeschwindigkeit (Vakuum)	$c_0 = 2{,}997\,924\,58 \cdot 10^{8}\ \mathrm{m/s}$
Magnetische Feldkonstante	$\mu_0 = 1{,}256\,637\,062\,12 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{V} \cdot \mathrm{s}/(\mathrm{A} \cdot \mathrm{m})$
Normfallbeschleunigung	$g_\mathrm{n} = 9{,}806\,65\ \mathrm{m/s}^2$
Planck'sches Wirkungsquantum	$h = 6{,}626\,070\,15 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{J} \cdot \mathrm{s}$
	$\hbar = 1{,}054\,571\,817 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{J} \cdot \mathrm{s}$
Ruhemasse des Elektrons	$m_\mathrm{e} = 9{,}109\,383\,7015 \cdot 10^{-31}\ \mathrm{kg}$
	$= 5{,}485\,799\,090\,65 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{u}$
Ruhemasse des Protons	$m_\mathrm{p} = 1{,}672\,621\,923\,69 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg}$
	$= 1{,}007\,276\,466\,621\ \mathrm{u}$
Ruhemasse des Neutrons	$m_\mathrm{n} = 1{,}674\,927\,498\,04 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg}$
	$= 1{,}008\,664\,915\,95\ \mathrm{u}$
Rydberg-Frequenz	$R = 3{,}289\,841\,960\,2508 \cdot 10^{15}\ \mathrm{Hz}$
Solarkonstante	$E_0 = 1{,}367\ \mathrm{kW/m}^2$
Sonnenmasse	$m_\mathrm{S} = 9{,}989 \cdot 10^{30}\ \mathrm{kg}$
Sterntag	$T_\mathrm{E} = 86\,164\ \mathrm{s}$
Stefan-Boltzmann-Konstante	$\sigma = 5{,}670\,374\,419 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{W}/(\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{K}^4)$

Heinemann / Krämer / Martin / Müller / Zimmer

PHYSIK in Aufgaben und Lösungen

Bleiben Sie auf dem Laufenden!

Hanser Newsletter informieren Sie regelmäßig über neue Bücher und Termine aus den verschiedenen Bereichen der Technik. Profitieren Sie auch von Gewinnspielen und exklusiven Leseproben. Gleich anmelden unter

www.hanser-fachbuch.de/newsletter

Hilmar Heinemann

Heinz Krämer (†)

Rolf Martin

Peter Müller

Hellmut Zimmer (†)

PHYSIK in Aufgaben und Lösungen

2., vollständig überarbeitete und erweiterte Auflage

HANSER

Bearbeiter:

Prof. Dr. Dr. Rolf Martin

Autoren:

Dr. rer. nat. Hilmar Heinemann, Freital
Dr. rer. nat. Heinz Krämer, Dresden (†)
Dr. rer. nat. Peter Müller, Dresden
Prof. Dr. rer. nat. Hellmut Zimmer, Dresden (†)

MIX
Papier aus verantwortungsvollen Quellen
FSC® C083411

Alle in diesem Buch enthaltenen Informationen wurden nach bestem Wissen zusammengestellt und mit Sorgfalt geprüft und getestet. Dennoch sind Fehler nicht ganz auszuschließen. Aus diesem Grund sind die im vorliegenden Buch enthaltenen Informationen mit keiner Verpflichtung oder Garantie irgendeiner Art verbunden. Autor(en, Herausgeber) und Verlag übernehmen infolgedessen keine Verantwortung und werden keine daraus folgende oder sonstige Haftung übernehmen, die auf irgendeine Weise aus der Benutzung dieser Informationen – oder Teilen davon – entsteht.
Ebenso wenig übernehmen Autor(en, Herausgeber) und Verlag die Gewähr dafür, dass die beschriebenen Verfahren usw. frei von Schutzrechten Dritter sind. Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek:
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über
http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt.
Alle Rechte, auch die der Übersetzung, des Nachdruckes und der Vervielfältigung des Buches, oder Teilen daraus, vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf ohne schriftliche Genehmigung des Verlages in irgendeiner Form (Fotokopie, Mikrofilm oder ein anderes Verfahren) – auch nicht für Zwecke der Unterrichtsgestaltung – reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden.

© 2021 Carl Hanser Verlag München
Internet: www.hanser-fachbuch.de

Lektorat: Dipl.-Ing. Natalia Silakova-Herzberg
Herstellung: Anne Kurth
Covergestaltung: Max Kostopoulos
Coverkonzept: Marc Müller-Bremer, www.rebranding.de, München
Titelbild: © Prof. Dr. Dr. Rolf Martin
Satz: Dr. Steffen Naake, Brand-Erbisdorf
Druck und Bindung: CPI books GmbH, Leck
Printed in Germany

Print-ISBN 978-3-446-46287-8
E-Book-ISBN 978-3-446-46734-7

Vorwort zur 2. Auflage

Aus langjähriger Lehrerfahrung an einer Hochschule sowie von meinem eigenen Studium her weiß ich, wie sehr sich Studierende ausführliche Musterlösungen zu Problemaufgaben wünschen. Und tatsächlich ist es eine gute Möglichkeit, sich anhand vorgerechneter Aufgaben in die Methodik eines Fachgebiets einzuarbeiten. Aus diesem Grund habe ich gerne zugesagt, als mir vom Verlag angeboten wurde, das beliebte Übungsbuch der Professoren Heinemann, Krämer, Müller und Zimmer neu herauszugeben.

Für die vorliegende Neuauflage wurden alle Aufgaben und deren Lösungen überarbeitet und teilweise durch neue ersetzt; dabei wurde aber die bewährte Struktur beibehalten. Die Teilgebiete entsprechen dem üblichen Fächerkanon, der sich an der Experimentalphysik orientiert. Probleme, wie sie in der theoretischen Physik oder Spezialvorlesungen wie Technische Mechanik, Technische Schwingungslehre etc. behandelt werden, sind nicht Gegenstand dieses Buches.

Um die Einarbeitung in die verschiedenen Teilgebiete der Physik zu erleichtern, wurde jeder Abschnitt mit einem kurzen Vorspann versehen, in dem die relevanten Beziehungen prägnant dargestellt sind. In der Elektrizitätslehre wurde die Wechselstromrechnung mithilfe komplexer Zeiger eingeführt. In der Optik wurden die in der Technischen Optik üblichen Vorzeichenregeln der DIN 1335 konsequent angewandt.

Bei fast allen Aufgaben ließ es sich realisieren, dass die Lösungen bis zur letzten Teilfrage mit allgemeinen Beziehungen durchgerechnet werden, sodass im Endergebnis nur die angegebenen Eingangsdaten zu finden sind. Beim praktischen Rechnen dagegen werden häufig Zahlenwerte der Teile a), b) … verwendet, um weitere Teile zu lösen. Dadurch verliert man aber leicht den Zusammenhang, wie das Endergebnis von den Eingangsgrößen abhängt.

Ich bedanke mich für die gute Betreuung durch Frau Natalia Silakova vom Carl Hanser Verlag. Bei meiner Frau bedanke ich mich für ihre Geduld und den Freiraum, den sie mir während der Arbeit an diesem Werk eingeräumt hat.

Meinen Leserinnen und Lesern wünsche ich Erkenntnisgewinn beim Bearbeiten von Übungsaufgaben und die Befriedigung, die man erhält, wenn man ein schwieriges Problem gelöst hat.

Köngen, im Oktober 2020 Rolf Martin

Inhalt

M Mechanik

M 1 Eindimensionale Kinematik des Punktes

Die Kinematik beschreibt die Bewegung von Körpern, ohne nach der Bewegungsursache (Kräfte, Drehmomente) zu fragen. Häufig spielt die Ausdehnung der Körper keine Rolle, so dass sie vereinfacht als punktförmig behandelt werden können. Bei einem ausgedehnten Körper kann man auch einen speziellen Punkt, z. B. den Schwerpunkt, stellvertretend für den Körper betrachten.

Unter *eindimensional* wird eine Bewegung verstanden, wenn eine einzige Variable ausreicht, um den Ort des Punktes in Abhängigkeit von der Zeit zu beschreiben. Dies ist beispielsweise der Fall bei geradliniger Bewegung, aber auch bei geführter Bewegung auf einer krummlinigen Bahn, wie bei Schienenfahrzeugen oder Autos, die der Straße folgen. Hier wird der Weg $s(t)$ längs der Bahn gemessen. Bei bekannter Abhängigkeit des Weges von der Zeit, folgen die Geschwindigkeit $v(t)$ und die Beschleunigung $a(t)$ durch Ableiten (Tabelle M 1.1). Umgekehrt ergeben sich die Geschwindigkeit und der Ort durch Integration aus der Beschleunigung. Bei der vektoriellen Beschreibung in Abschnitt M 2 sind die Bahngrößen die Tangentialkomponenten der Vektoren $\vec{r}$, $\vec{v}$ und $\vec{a}$.

Tabelle M 1.1 Beziehungen zwischen kinematischen Größen

Bahngrößen		Winkelgrößen	
Weg	s	Winkel	$\varphi = \frac{s}{r}$
Geschwindigkeit	$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$	Winkelgeschwindigkeit	$\omega = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \frac{v}{r}$
Beschleunigung	$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}$	Winkelbeschleunigung	$\alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} = \frac{a}{r}$

Völlig gleichartige Zusammenhänge beschreiben die Bewegung eines Punktes auf einer Kreisbahn mit Radius r. Hier benutzt man sinnvollerweise Winkelgrößen. Sie sind ebenfalls in Tabelle M 1.1 zusammengestellt.

Für den einfachen Fall konstanter Beschleunigung a_0 bzw. Winkelbeschleunigung α_0 sind die Ergebnisse der Integration in Tabelle M 1.2 angegeben.

Tabelle M 1.2 Geschwindigkeit und Weg bei konstanter Beschleunigung

Bahngrößen	Winkelgrößen
$v(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} a(\tau)\,\mathrm{d}\tau = v_0 + a_0(t - t_0)$	$\omega(t) = \omega_0 + \int_{t_0}^{t} \alpha(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \omega_0 + \alpha_0(t - t_0)$
$s(t) = s_0 + \int_{t_0}^{t} v(\tau)\,\mathrm{d}\tau = s_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a_0(t - t_0)^2$	$\varphi(t) = \varphi_0 + \int_{t_0}^{t} \omega(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \varphi_0 + \omega_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\alpha_0(t - t_0)^2$

M 1.1 Massenpunkt auf einer Geraden

Ein punktförmiger Körper bewegt sich mit konstanter Beschleunigung längs der x-Achse. Er befindet sich zur Zeit $t = 0$ am Ort x_0 und hat dort die Geschwindigkeit v_0.

a) Wo befindet sich der Körper zur Zeit t_1?

b) Welche Geschwindigkeit v_1 hat er dort?

c) Zu welcher Zeit und an welchem Ort erfolgt die Umkehr der Bewegungsrichtung?

d) Skizzieren Sie das $x(t)$- und das $v(t)$-Digramm.

$x_0 = 6{,}0\ \mathrm{m}$ $\quad v_0 = -5{,}0\ \mathrm{m/s}$ $\quad a_0 = 2{,}0\ \mathrm{m/s^2}$ $\quad t_1 = 3{,}0\ \mathrm{s}$

---

a) $\underline{x_1 = x(t_1) = x_0 + v_0 t_1 + \frac{1}{2}a_0 t_1^2} = \underline{\underline{0}}$

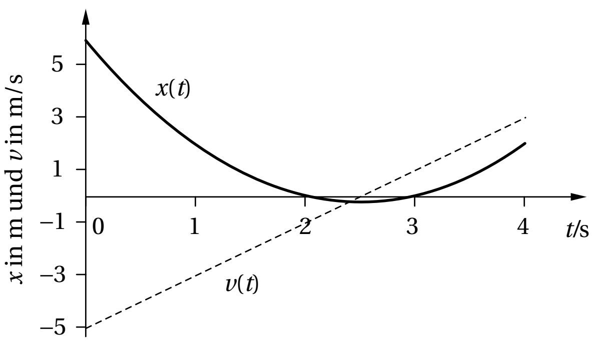
b) $\underline{v_1 = v_0 + a_0 t_1} = \underline{\underline{1{,}0\ \mathrm{m/s}}}$

c) Die Geschwindigkeit muss am Umkehrpunkt null sein: $v_0 + a_0 t_2 = 0$ liefert

$$t_2 = -\frac{v_0}{a_0} = 2{,}5\ \mathrm{s}$$

$$\underline{x_2 = x(t_2) = x_0 + v_0 t_2 + \frac{1}{2}a_0 t_2^2} = \underline{\underline{-0{,}25\ \mathrm{m}}}$$

d)



M 1.2 Schwingung

Ein schwingender Körper hat die Geschwindigkeit $v_x(t) = v_m \cos(2\pi t/T)$. Er befindet sich zur Zeit $t_0 = T/4$ am Ort x_0.

Geben Sie den Ort x und die Beschleunigung a_x des Körpers als Funktion der Zeit t an!

$$v_x(t) = v_m \cos\left(2\pi \frac{t}{T}\right)$$

$$x(t) = \int v_x \, dt$$

$$x(t) = \frac{v_m T}{2\pi} \sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right) + C$$

$$x\left(\frac{T}{4}\right) = x_0 = \frac{v_m T}{2\pi} \sin \frac{\pi}{2} + C$$

$$C = x_0 - \frac{v_m T}{2\pi}$$

$$\underline{x(t) = \frac{v_m T}{2\pi} \left(\sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right) - 1\right) + x_0}$$

$$a_x(t) = \frac{d v_x}{dt}$$

$$\underline{a_x(t) = -2\pi \frac{v_m}{T} \sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right)}$$

M 1.3 Kraftfahrzeug

Ein Kraftfahrzeug nähert sich einer Verkehrsampel mit verminderter Geschwindigkeit. Beim Umschalten der Ampel auf Grün beschleunigt es während der Zeit t_1 gleichmäßig mit a und legt dabei die Strecke s_1 zurück.

Wie groß sind die Geschwindigkeiten v_0 und v_1 am Anfang und am Ende der Beschleunigungsphase?

$a = 0{,}94$ m/s² $\qquad t_1 = 5{,}3$ s $\qquad s_1 = 60$ m

$$s_1 = \frac{a}{2} t_1^2 + v_0 t_1 \qquad (s_0 = 0)$$

$$\Rightarrow \quad \underline{v_0 = \frac{s_1}{t_1} - \frac{a t_1}{2}} = \underline{\underline{32 \text{ km/h}}}$$

$$v_1 = a t_1 + v_0$$

$$\Rightarrow \quad \underline{v_1 = \frac{s_1}{t_1} + \frac{a t_1}{2}} = \underline{\underline{50 \text{ km/h}}}$$

M 1.4 Notbremsen

Beim Notbremsen wird ein mit einer Geschwindigkeit v_{x0} fahrender Zug auf einer Strecke von $x_0 = 0$ bis x_1 zum Stehen gebracht.

a) Wie groß ist die konstante Bremsbeschleunigung a_x und wie lange dauert der Bremsvorgang?

b) Stellen Sie den Verlauf der Bewegung im $x(t)$-, $v_x(t)$- und $a_x(t)$-Diagramm dar!

$x_1 = 260$ m $\qquad v_{x0} = 90$ km/h

---

a) $x = \frac{a_x}{2} t^2 + v_{x0} t \qquad (x_0 = 0)$

$v_x = a_x t + v_{x0}$

$x_1 = \frac{a_x}{2} t_1^2 + v_{x0} t_1$

$v_{x1} = 0 = a_x t_1 + v_{x0}$

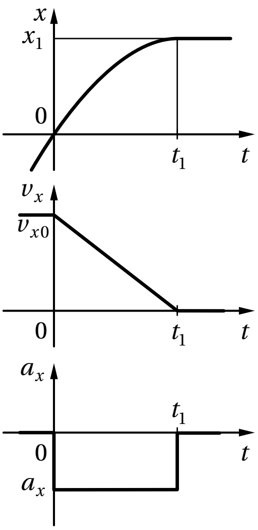
$\Rightarrow \quad t_1 = -\frac{v_{x0}}{a_x}$

$x_1 = \frac{v_{x0}^2}{2a_x} - \frac{v_{x0}^2}{a_x} = -\frac{v_{x0}^2}{2a_x}$

$\underline{a_x = -\frac{v_{x0}^2}{2x_1}} = \underline{\underline{-1{,}20\ \mathrm{m/s^2}}}$

$\underline{t_1 = -\frac{v_{x0}}{a_x} = \frac{2x_1}{v_{x0}}} = \underline{\underline{21\ \mathrm{s}}}$

b)



M 1.5 Senkrechter Wurf

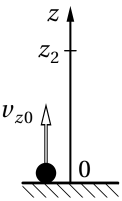
Ein Körper wird von der Erdoberfläche aus ($z_0 = 0$) mit der Anfangsgeschwindigkeit v_{z0} senkrecht nach oben abgeschossen.

a) Welche Geschwindigkeit v_{z1} hat er in der Höhe z_1?

b) Welche Maximalhöhe z_2 erreicht er und wie groß ist die Steigzeit?

c) Skizzieren Sie den Verlauf des Wurfes im $z(t)$- und $v_z(t)$-Diagramm!

$v_{z0} = 20$ m/s $\qquad z_1 = 5{,}0$ m $\qquad g = 9{,}81$ m/s^2



a) $z = -\frac{g}{2}t^2 + v_{z0}t \qquad (z_0 = 0)$

$$v_z = -gt + v_{z0} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{v_{z0} - v_z}{g}$$

$$z = -\frac{(v_{z0} - v_z)^2}{2g} + v_{z0}\frac{(v_{z0} - v_z)}{g} = \frac{v_{z0}^2 - v_z^2}{2g}$$

$$v_z^2 = v_{z0}^2 - 2gz$$

$$\underline{v_{z1} = +\sqrt{v_{z0}^2 - 2gz_1}} = \underline{\underline{+17{,}4\ \mathrm{m/s}}}$$

$$\underline{v_{z1}^* = -\sqrt{v_{z0}^2 - 2gz_1}} = \underline{\underline{-17{,}4\ \mathrm{m/s}}}$$

b) Aus a):

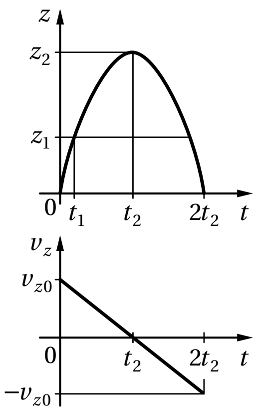
$$z = \frac{v_{z0}^2 - v_z^2}{2g}$$

mit $z = z_2$ und $v_z = v_{z2} = 0$

$$\underline{z_2 = \frac{v_{z0}^2}{2g}} = \underline{\underline{20{,}4\ \mathrm{m}}}$$

Steigzeit: $\underline{t_2 = \frac{v_{zo}}{g}} = \underline{\underline{2\ \mathrm{s}}}$

c)



M 1.6 Testfahrzeuge

Zwei Testfahrzeuge beginnen gleichzeitig eine geradlinige Bewegung mit der Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 0$ am gleichen Ort.

Das Fahrzeug A bewegt sich mit der Beschleunigung $a_{\mathrm{A}} = a_0 = \mathrm{const}$, das Fahrzeug B mit der Beschleunigung $a_{\mathrm{B}} = kt; \quad k = \mathrm{const}$.

Beide Fahrzeuge legen in der Zeit t_1 die Strecke s_1 zurück.

a) Skizzieren Sie den Verlauf beider Bewegungen im $a(t)$-, $v(t)$- und $s(t)$-Diagramm!

b) Berechnen Sie die Zeit t_1 und die Strecke s_1!

c) Welche Geschwindigkeiten $v_{\mathrm{A}1}$ und $v_{\mathrm{B}1}$ haben die Fahrzeuge am Ende der Strecke s_1 erreicht?

d) Nach welcher Zeit t_2 haben beide Fahrzeuge die gleiche Geschwindigkeit v_2 erreicht?

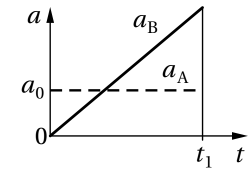
Gegeben: a_0, k

---

a) $a_A = a_0 = \text{const}$

$v_A = a_0 t \qquad (v_{A0} = 0)$

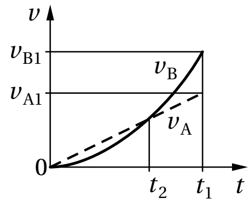
$s_A = \dfrac{a_0}{2} t^2 \qquad (s_{A0} = 0)$



$a_B = kt$

$v_B = \dfrac{k}{2} t^2 \qquad (v_{B0} = 0)$

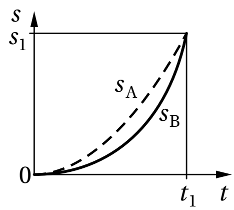
$s_B = \dfrac{k}{6} t^3 \qquad (s_{B0} = 0)$



b) $s_1 = s_{A1} = s_{B1}$

$s_1 = \dfrac{a_0}{2} t_1^2 = \dfrac{k}{6} t_1^3$

$\underline{t_1 = 3\dfrac{a_0}{k}}; \quad \underline{s_1 = \dfrac{9}{2}\dfrac{a_0^3}{k^2}}$



c) $v_{A1} = a_0 t_1 = \underline{3\dfrac{a_0^2}{k}}$

$v_{B1} = \dfrac{k}{2} t_1^2 = \underline{\dfrac{9}{2}\dfrac{a_0^2}{k}}$

d) $v_{A2} = v_{B2}$

$a_0 t_2 = \dfrac{k}{2} t_2^2 \quad \Rightarrow \quad \underline{t_2 = 2\dfrac{a_0}{k}}$

M 1.7 Güterzug

Ein Güterzug passiert auf einem Nebengleis mit der konstanten Geschwindigkeit v_0' einen Bahnhof. Zur gleichen Zeit $t_0 = 0$ fährt ein Personenzug in derselben Richtung ab. Die Beschleunigung des Personenzuges nimmt von a_0 (zur Zeit $t = 0$) linear mit der Zeit bis auf null (zur Zeit t_1) ab. Dann fährt er mit konstanter Geschwindigkeit v_1 weiter und überholt den Güterzug.

a) Zu welcher Zeit t_2 fährt der Personenzug am Güterzug vorbei?

b) In welcher Entfernung s_2 vom Bahnhof geschieht das?

c) Wie groß ist die Relativgeschwindigkeit $\Delta v = v_2 - v_0'$ beim Überholen?

d) Skizzieren Sie das $s(t)$-, das $v(t)$- und das $a(t)$-Diagramm beider Bewegungen!

$v_0' = 54\ \text{km/h} \qquad t_1 = 160\ \text{s} \qquad a_0 = 0{,}25\ \text{m/s}^2$

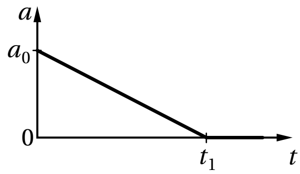
---

a) *Güterzug:* $s'(t) = v_0' t$

Personenzug:

Allgemeiner Ansatz für $a(t)$:

$a = bt + a_0$



Bestimmung der Konstanten b $(t = t_1)$:

$0 = bt_1 + a_0$

$\Rightarrow \quad b = -\dfrac{a_0}{t_1}$

$$a = a_0\left(1 - \frac{t}{t_1}\right) \qquad (t \leqq t_1)$$

Der Überholvorgang liegt im Bereich $t \geqq t_1$. Ermittlung $s(t)$:

$t \geqq t_1$: $\quad a = 0$

$v(t) = v_1$

$$s - s_1 = \int_{t_1}^{t} v_1 \, \mathrm{d}t$$

$$s(t) = v_1(t - t_1) + s_1 \qquad (*)$$

Bestimmung der Anfangsbedingungen s_1 und v_1:

$$t \leqq t_1: \quad v - v_0 = \int_0^t a_0\left(1 - \frac{t}{t_1}\right) \mathrm{d}t \qquad v_0 = 0$$

$$v(t) = a_0\left(t - \frac{t^2}{2t_1}\right)$$

$$\Rightarrow \quad v_1 = a_0 \frac{t_1}{2}$$

$$s - s_0 = \int_0^t a_0\left(t - \frac{t^2}{2t_1}\right) \mathrm{d}t \qquad s_0 = 0$$

$$s(t) = a_0\left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6t_1}\right)$$

$$\Rightarrow \quad s_1 = a_0 \frac{t_1^2}{3}$$

Damit wird $(*)$:

$$s(t) = \frac{a_0 t_1}{2}(t - t_1) + a_0 \frac{t_1^2}{3} = \frac{a_0 t_1}{2}\left(t - \frac{t_1}{3}\right)$$

Bedingung für das Einholen:

$s(t_2) = s'(t_2)$

$$\frac{a_0 t_1}{2}\left(t_2 - \frac{t_1}{3}\right) = v_0' t_2$$

$$t_2\left(\frac{a_0 t_1}{2} - v_0'\right) = \frac{a_0 t_1^2}{6}$$

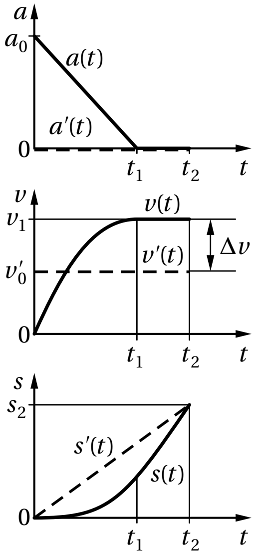
$$\underline{t_2 = \frac{t_1}{3\left(1 - \dfrac{2v_0'}{a_0 t_1}\right)}} = \underline{\underline{213 \text{ s}}}$$

b) $s_2 = s_2' = \underline{v_0' t_2} = \underline{\underline{3{,}2\ \text{km}}}$

c) $\Delta v = v_2 - v_2' = v_1 - v_0'$

$\underline{\Delta v = \dfrac{a_0 t_1}{2} - v_0'} = \underline{\underline{18\ \text{km/h}}}$

d)



M 1.8 Schienenfahrzeug

Ein Schienenfahrzeug fährt mit konstanter Geschwindigkeit v_0. Nach Abschalten des Triebwerkes zur Zeit $t_0 = 0$ wird das Fahrzeug im Wesentlichen durch den Luftwiderstand gebremst; die Beschleunigung ist geschwindigkeitsabhängig: $a = -Kv^2$.

a) Nach welcher Zeit t_1 ist die Geschwindigkeit auf v_1 abgesunken?

b) Welche Strecke s_1 wurde in der Zeit t_1 zurückgelegt?

$v_0 = 120\ \text{km/h} \qquad K = 3{,}75 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^{-1} \qquad v_1 = 60\ \text{km/h}$

---

a) $a = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -Kv^2$

$$\frac{\mathrm{d}v}{v^2} = -K\,\mathrm{d}t$$

$$\int_{v_0}^{v} \frac{\mathrm{d}v}{v^2} = -K \int_0^t \mathrm{d}t$$

$$\left[-\frac{1}{v}\right]_{v_0}^{v} = -Kt$$

$$\frac{1}{v_0} - \frac{1}{v} = -Kt \qquad (*)$$

$$\frac{1}{v_0} - \frac{1}{v_1} = -Kt_1$$

$$\underline{t_1 = \frac{1}{K}\left(\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_0}\right)} = \underline{\underline{80\ \text{s}}}$$

b) Die Gleichung (∗) liefert:

$$v(t) = \frac{v_0}{1 + v_0 K t}$$

Zurückgelegter Weg durch Integration:

$$s(t) = v_0 \int_0^t \frac{\mathrm{d}\tau}{1 + v_0 K \tau}$$

Substitution: $1 + v_0 K \tau = z$, $\mathrm{d}\tau = \dfrac{\mathrm{d}z}{v_0 K}$

$$s\,(t) = \frac{1}{K} \int_1^{1+v_0 K t} \frac{\mathrm{d}z}{z} = \frac{1}{K} \ln\,(1 + v_0 K t)$$

$$s_1 = s\,(t_1) = \frac{1}{K} \ln\,(1 + v_0 K t_1) = \underline{\frac{1}{K} \ln \frac{v_0}{v_1}} = \frac{1}{K} \ln 2 = \underline{\underline{1{,}85 \text{ km}}}$$

M 1.9 Rennwagen

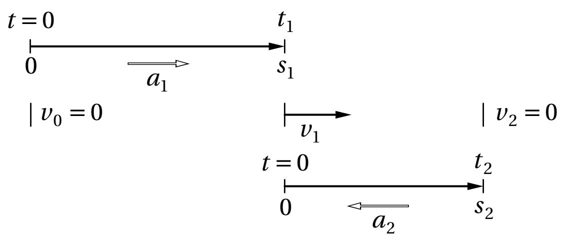
Ein Rennwagen durchfährt zwischen zwei Haarnadelkurven eine Strecke s_0, wobei Anfangs- und Endgeschwindigkeit annähernd gleich null seien. Die als konstant angesehene Beschleunigung ist a_1, die ebenfalls als konstant vorausgesetzte Verzögerung ist a_2.

a) Welche minimale Zeit t_0 benötigt der Wagen für die Strecke s_0?

b) Welche Höchstgeschwindigkeit v_1 erreicht er auf dieser Strecke?

$s_0 = 120$ m $\qquad a_1 = 2{,}5 \text{ m/s}^2 \qquad a_2 = -5{,}0 \text{ m/s}^2$

Zur Vereinfachung wird in der Bremsphase die Zeit- und Wegmessung neu bei null begonnen:



Anfahren:

$$s_1 = \frac{a_1}{2} t_1^2 \tag{1}$$

$$v_1 = a_1 t_1 \tag{2}$$

Bremsen:

$$s_2 = \frac{a_2}{2} t_2^2 + v_1 t_2 \tag{3}$$

$$v_2 = 0 = a_2 t_2 + v_1 \tag{4}$$

Gesamtbewegung:

$$s_0 = s_1 + s_2 \tag{5}$$

$$t_0 = t_1 + t_2 \tag{6}$$

(4) mit (2): $a_1 t_1 = -a_2 t_2$

$$\Rightarrow \quad t_2 = -\frac{a_1}{a_2} t_1 \qquad (7)$$

(5) mit (3) und (2):

$$s_0 - s_1 = \frac{a_2}{2} t_2^2 + a_1 t_1 t_2 \qquad (8)$$

(8) mit (7) und (1):

$$s_0 = \frac{a_1}{2} t_1^2 - \frac{a_1^2}{2a_2} t_1^2 = \frac{a_1}{2} t_1^2 \left(1 - \frac{a_1}{a_2}\right)$$

$$t_1 = \sqrt{\frac{2 s_0 a_2}{a_1 (a_2 - a_1)}} \qquad (9)$$

a) (6) mit (7) und (9):

$$t_0 = t_1 - \frac{a_1}{a_2} t_1 = t_1 \frac{a_2 - a_1}{a_2}$$

$$\underline{t_0 = \sqrt{\frac{2 s_0 (a_2 - a_1)}{a_1 a_2}}} = \underline{\underline{12\ \mathrm{s}}}$$

b) (2) mit (9):

$$\underline{v_1 = \sqrt{\frac{2 s_0 a_1 a_2}{a_2 - a_1}}} = \underline{\underline{72\ \mathrm{km/h}}}$$

M 1.10 Rotor

Ein Rotor läuft aus dem Stand hoch, wobei die Winkelbeschleunigung folgender Funktion gehorcht:

$$\alpha(t) = \alpha_0 \left[1 - \sin\left(\frac{\pi}{2 t_1} t\right)\right]$$

Nach der Zeit t_1 ist die Enddrehzahl n_1 erreicht und der Rotor läuft mit konstanter Drehzahl weiter.

Wie viele Umdrehungen hat der Rotor während des Anlaufvorgangs ausgeführt?

$t_1 = 5\ \mathrm{s} \qquad n_1 = 1\,800\ \mathrm{min}^{-1}$

Erste Integration zur Bestimmung der Winkelgeschwindigkeit:

$$\omega(t) = \int_0^t \alpha(\tau)\ \mathrm{d}\tau = \alpha_0 \left[t + \frac{2 t_1}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2 t_1} t\right) - \frac{2 t_1}{\pi}\right]$$

$$\omega_1 = 2\pi n_1 = \omega(t_1) = \alpha_0 t_1 \left(1 - \frac{2}{\pi}\right)$$

liefert

$$\alpha_0 = \frac{2\pi n_1}{t_1 \left(1 - \frac{2}{\pi}\right)} = 103{,}7\ \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}^2}$$

Die zweite Integration ergibt den Drehwinkel

$$\varphi_1 = \varphi(t_1) = \int_0^{t_1} \omega(t)\ \mathrm{d}t = \alpha_0 t_1^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} - \frac{2}{\pi}\right)$$

Mit dem obigen Ergebnis von α_0 ergibt sich

$$\varphi_1 = \frac{2\pi n_1 t_1}{\pi - 2}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} - 2\right) = 697 \text{ rad}$$

Damit wird die Zahl der Umdrehungen

$$\underline{N = \frac{\varphi_1}{2\pi} = \frac{n_1 t_1}{\pi - 2}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} - 2\right)} = \underline{\underline{111}}$$

M 1.11 Drehmaschine

Eine Drehmaschine rotiert mit der Drehzahl n_0. Sie wird mit konstanter Winkelbeschleunigung (-verzögerung) α_0 abgebremst und kommt nach N Umdrehungen zum Stillstand.

Wie groß ist die Winkelbeschleunigung und wie lange dauert der Bremsvorgang?

$N = 10 \qquad n_0 = 480 \text{ min}^{-1}$

Aus den allgemeinen Formen für die Winkelgeschwindigkeit und den Drehwinkel

$$\omega(t) = \omega_0 + \alpha_0 t \quad \text{und} \quad \varphi(t) = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha_0 t^2$$

wird am Ende des Bremsvorgangs zur Zeit t_1:

$$\omega(t_1) = 0 = \omega_0 + \alpha_0 t_1 \tag{1}$$

$$\varphi(t_1) = N \cdot 2\pi = \omega_0 t_1 + \frac{1}{2}\alpha_0 t_1^2 \tag{2}$$

Setzt man $t_1 = -\frac{\omega_0}{\alpha_0}$ aus (1) in (2) ein, erhält man die zeitunabhängige Beziehung

$$N \cdot 2\pi = -\frac{\omega_0^2}{2\alpha_0}$$

und damit

$$\underline{\alpha_0 = -\frac{\pi n_0^2}{N}} = \underline{\underline{20{,}1 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}}}$$

Zeitdauer:

$$\underline{t_1 = -\frac{\omega_0}{\alpha_0}} = \underline{\underline{\frac{2N}{n_0} = 2{,}5 \text{ s}}}$$

M 2 Zwei- und dreidimensionale Bewegung

M 2.1 Auto auf Parabelflug

Am 26.1.2009 fuhr in Limbach-Oberfrona, Sachsen, ein Auto über einen gefrorenen Erdwall der Höhe y_0 und flog im Abstand x_1 in der Höhe y_1 in das Dach einer Kirche.

Bestimmen Sie den Abflugwinkel β_0 und die Abfluggeschwindigkeit v_0 des Autos unter Vernachlässigung der Luftreibung und unter der Voraussetzung, dass

a) das Auto mit horizontaler Flugbahn im Dach landet,

b) eine Kurve mit minimaler Abfluggeschwindigkeit durchflogen wird.

$y_0 = 80 \text{ cm} \qquad y_1 = 7 \text{ m} \qquad x_1 = 30 \text{ m}$

---

a) Die x- und y-Koordinaten der Bahnkurve lauten:

$$x(t) = v_0 \cos\beta_0 \cdot t$$

$$y(t) = y_0 + v_0 \sin\beta_0 \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$$

Eliminieren der Zeit:

$$t = \frac{x}{v_0 \cos\beta_0}$$

Wurfparabel:

$$y(x) = y_0 + x \tan\beta_0 - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2\beta_0} x^2$$

Zielpunkt:

$$y_1 = y_0 + x_1 \tan\beta_0 - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2\beta_0} x_1^2$$

Horizontales Eintreffen im Zielpunkt bedingt:

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)_{x_1} = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \tan\beta_0 - \frac{g}{v_0^2 \cos^2\beta_0} x$$

$\tan\beta_0 = \dfrac{g}{v_0^2 \cos^2\beta_0} x_1$ eingesetzt in die Gl. des Zielpunkts liefert

$y_1 = y_0 + \dfrac{1}{2} x_1 \tan\beta_0$ und damit

$$\underline{\beta_0 = \arctan\left(\frac{2\,(y_1 - y_0)}{x_1}\right) = \underline{\underline{22{,}5^\circ}}}$$

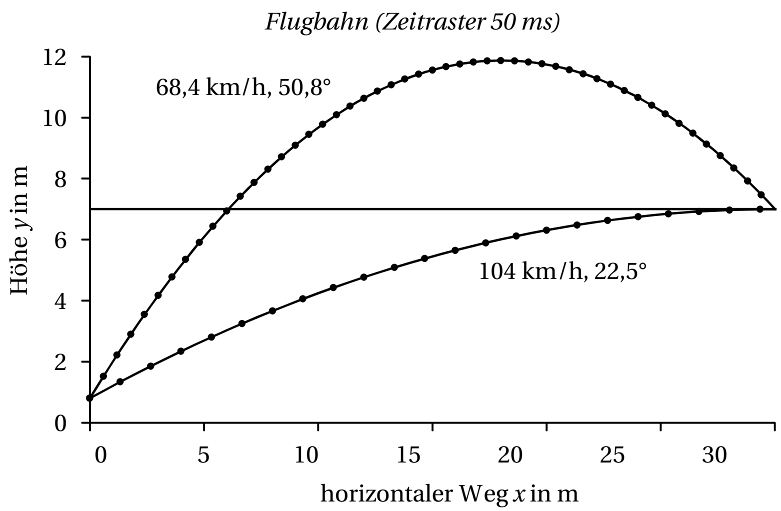
Die Geschwindigkeit folgt durch Auflösung der Gl. für den Zielpunkt:

$$v_0 = \sqrt{\frac{g x_1^2}{2 \cos^2\beta_0 \,(x_1 \tan\beta_0 - y_1 + y_0)}}$$

$$\underline{v_0 = \sqrt{\frac{g\left(x_1^2 + 4\,(y_1 - y_0)^2\right)}{2\,(y_1 - y_0)}}} = \underline{\underline{28{,}9\ \frac{\text{m}}{\text{s}} = 104\ \frac{\text{km}}{\text{h}}}}$$

Das Diagramm zeigt die Flugbahn mit der Zeit als Parameter. Der Flug dauert

$$t_1 = \frac{x_1}{v_0 \cos\beta_0} = 1{,}12 \text{ s}$$



b) Die Gl. für die Startgeschwindigkeit wird der Einfachheit halber umgeformt zu

$$v_0^2 = \frac{g x_1^2}{2\cos^2\beta_0\,(x_1\tan\beta_0 + y_0 - y_1)}$$

Gesucht ist das Minimum von v_0 und damit auch das Minimum von v_0^2.

Ableitung nach Quotienten- und Produktregel:

$$\frac{\mathrm{d}v_0^2}{\mathrm{d}\beta_0} = \frac{-2gx_1^2\left[-2\cos\beta_0\sin\beta_0\,(x_1\tan\beta_0 + y_0 - y_1)\right] + x_1}{\text{Nenner}^2}$$

Nullsetzen des Zählers liefert die Beziehung

$$x_1 = 2\cos\beta_0\sin\beta_0\,(x_1\tan\beta_0 + y_0 - y_1)$$

Diese Gleichung hat keine geschlossene Lösung für den Winkel β_0, kann aber z. B. auf einem programmierbaren oder grafischen Taschenrechner numerisch gelöst werden. Es ergibt sich:

$$\beta_0 = 50{,}838^\circ \quad \text{und damit} \quad v_0 = 19{,}01\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 68{,}4\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}.$$

(Der Winkel ist so genau angegeben, weil er relativ kritisch in das Ergebnis für die Startgeschwindigkeit eingeht.)

Der Flug dauert

$$t_1 = \frac{x_1}{v_0\cos\beta_0} = 2{,}5\ \mathrm{s}$$

Die Flugbahn ist ebenfalls in obigem Diagramm eingezeichnet.

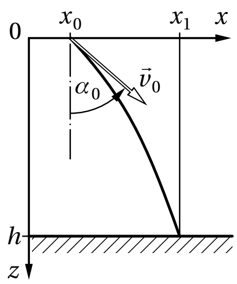
M 2.2 Wasserspeier

Aus einem Wasserspeier fließt Regenwasser mit der Geschwindigkeit v_0 unter einem Winkel α_0 gegenüber der Vertikalen ab. Der Ausfluss befindet sich in der Höhe h über dem Erdboden und in der Entfernung x_0 von der Gebäudewand.

In welcher Entfernung x_1 von der Gebäudewand trifft das Wasser am Erdboden auf?

$v_0 = 0{,}80\ \mathrm{m/s} \qquad \alpha_0 = 60^\circ \qquad h = 12\ \mathrm{m} \qquad x_0 = 0{,}75\ \mathrm{m}$

Ort-Zeit-Funktionen:



$$x(t) = v_{x0}t + x_0; \qquad v_{x0} = v_0 \sin\alpha_0$$

$$z(t) = \frac{g}{2}t^2 + v_{z0}t; \qquad v_{z0} = v_0 \cos\alpha_0$$

Auftreffpunkt:

$$x_1 = v_0 \sin\alpha_0 \, t_1 + x_0$$

$$h = \frac{g}{2}t_1^2 + v_0 \cos\alpha_0 \, t_1$$

t_1 aus h berechnen:

$$t_1^2 + \frac{2v_0\cos\alpha_0}{g}t_1 - \frac{2h}{g} = 0$$

$$t_1 = -\frac{v_0\cos\alpha_0}{g} + \sqrt{\frac{v_0^2\cos^2\alpha_0 + 2gh}{g^2}} \qquad (t_1 > 0)$$

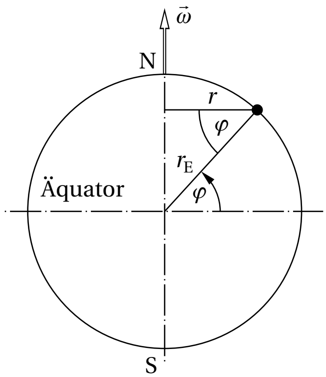
t_1 in x_1 einsetzen:

$$\underline{x_1 = x_0 + \frac{v_0^2\sin\alpha_0\cos\alpha_0}{g}\left(\sqrt{1+\frac{2gh}{v_0^2\cos^2\alpha_0}} - 1\right)} = \underline{\underline{1{,}8\ \text{m}}}$$

M 2.3 Erdrotation

Wie groß ist die Radialbeschleunigung (Zentripetalbeschleunigung) a_r für einen auf der Erdoberfläche liegenden Körper am 51. Breitengrad infolge der Erdumdrehung?

Mittlerer Erdradius: 6371 km Sonnentag: 86 400 s Sterntag: 86 164 s



$$a_\text{r} = \omega^2 r$$

$$r = r_\text{E}\cos\varphi$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$T = d^* \quad \text{(Sterntag!)}$$

$$\underline{a_\text{r} = \frac{4\pi^2}{d^{*2}}r_\text{E}\cos\varphi} = \underline{\underline{0{,}0213\ \text{m/s}^2}}$$

M 2.4 Riesenrad

Ein Riesenrad hat die Umlaufdauer T.

a) Wie groß sind Geschwindigkeit v_0 und die Radialbeschleunigung a_r einer Person im Abstand r von der Drehachse?

b) Welche Bahnbeschleunigung a_s hat dieselbe Person, wenn das Riesenrad nach Abschalten des Antriebs bei gleichmäßiger Verzögerung noch eine volle Umdrehung ausführt?

$T = 12\ \text{s} \qquad r = 5{,}6\ \text{m}$

a) $v_0 = \omega_0 r = \underline{\frac{2\pi r}{T}} = \underline{\underline{2{,}9\ \mathrm{m/s}}}$

$a_\mathrm{r} = \omega_0^2 r = \underline{\frac{4\pi^2 r}{T^2}} = \underline{\underline{1{,}5\ \mathrm{m/s^2}}}$

b) Verzögerungsphase:

$\omega(t) = \omega_0 + \alpha t \qquad (\alpha < 0)$

$\varphi(t) = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$

Stillstand:

$0 = \omega_0 + \alpha t_1 \quad \Rightarrow \quad t_1 = -\frac{\omega_0}{\alpha}$

$2\pi = \omega_0 t_1 + \frac{1}{2}\alpha t_1^2 = -\frac{\omega_0^2}{2\alpha}$

Winkelbeschleunigung:

$\alpha = -\frac{\omega_0^2}{4\pi} = -\frac{\pi}{T^2} = -0{,}0218\ \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s^2}}$

Bahnbeschleunigung:

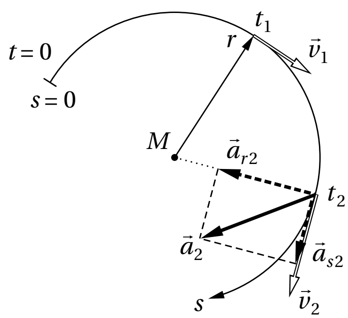
$a_\mathrm{s} = \alpha \cdot r = -0{,}122\ \mathrm{m/s^2}$

M 2.5 Eisenbahnzug

Ein Zug fährt auf einer Strecke mit dem Krümmungsradius r gleichmäßig beschleunigt an. Nach der Zeit t_1 hat er die Geschwindigkeit v_1.

Gesucht: Tangential-, Radial- und Gesamtbeschleunigung nach der Fahrzeit t_2.

$r = 1200\ \mathrm{m} \qquad t_1 = 90\ \mathrm{s} \qquad v_1 = 54\ \mathrm{km/h} \qquad t_2 = 150\ \mathrm{s}$



$a_\mathrm{s} = \mathrm{const}$

$v(t) = a_\mathrm{s} t \qquad (v = 0)$

$v_1 = a_\mathrm{s} t_1$

$\underline{a_\mathrm{s} = \frac{v_1}{t_1}} = \underline{\underline{0{,}17\ \mathrm{m/s^2}}}$

$a_\mathrm{r} = \frac{v^2}{r}; \quad v_2 = a_\mathrm{s} t_2$

$a_\mathrm{r2} = \frac{v_2^2}{r} = \frac{a_\mathrm{s}^2 t_2^2}{r}$

$\underline{a_\mathrm{r2} = \frac{v_1^2}{r}\left(\frac{t_2}{t_1}\right)^2} = \underline{\underline{0{,}52\ \mathrm{m/s^2}}}$

$a = \sqrt{a_\mathrm{s}^2 + a_\mathrm{r}^2}$

$\underline{a_2 = \sqrt{a_\mathrm{s}^2 + a_\mathrm{r2}^2}} = \underline{\underline{0{,}55\ \mathrm{m/s^2}}}$

M 2.6 Schraubenmutter

Eine Schraubenmutter an einem rotierenden Rad bewegt sich auf einem Kreis (Radius r) in vertikaler Ebene nach der Winkel-Zeit-Funktion $\varphi(t) = (\alpha/2) \cdot t^2 + \omega_0 t + \varphi_0$. Zur Zeit t_1 löst sich beim Winkel φ_1 die Mutter vom Rad.

a) Wie groß sind die Winkelbeschleunigung α und die Winkelgeschwindigkeit ω_1 zur Zeit t_1?

b) Wie lautet der Ortsvektor $\vec{r}_1$ zur Zeit t_1 und wie der Vektor $\vec{\omega}_1$ der Winkelgeschwindigkeit im x, y, z-Koordinatensystem?

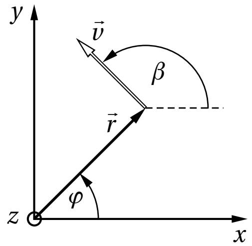
c) Bestimmen Sie den Anfangsort (x_1, y_1) und die Anfangsgeschwindigkeit unter Angabe der Richtung (v_1 und β_1) bei der anschließenden Wurfbewegung!

$r = 10$ cm $\qquad t_1 = 2{,}0$ s

$\varphi_1 = \dfrac{125}{3}\pi \; (= 7500°)$

$\varphi_0 = \dfrac{\pi}{2} \; (= 90°)$

$\omega_0 = 10\pi\ \text{s}^{-1} \quad (f_0 = 5{,}0\ \text{s}^{-1})$



---

a) $\varphi_1 = \dfrac{\alpha}{2} t_1^2 + \omega_0 t_1 + \varphi_0$

$$\underline{\alpha = \frac{2}{t_1}\left(\frac{\varphi_1 - \varphi_0}{t_1} - \omega_0\right)} = \underline{\underline{33\ \text{s}^{-2}}}$$

$$\omega(t) = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \alpha t + \omega_0$$

$$\omega_1 = \alpha t_1 + \omega_0$$

$$\underline{\omega_1 = \frac{2(\varphi_1 - \varphi_0)}{t_1} - \omega_0} = \underline{\underline{98\ \text{s}^{-1}}}$$

b) $$\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} r\cos\varphi_1 \\ r\sin\varphi_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Vektoren der Winkelgrößen stehen senkrecht auf der Ebene der Rotation:

$$\vec{\omega}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_1 \end{pmatrix}$$

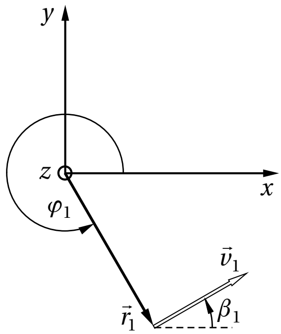
c) $x_1 = r\cos\varphi_1 = 5{,}0$ cm,
$y_1 = r\sin\varphi_1 = -8{,}66$ cm

$$\vec{v}_1 = \vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1 = \begin{pmatrix} -r\omega_1\sin\varphi_1 \\ r\omega_1\cos\varphi_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v_{1x} = -r\omega_1\sin\varphi_1 = 8{,}48\ \text{m/s}$$

$$v_{1y} = r\omega_1\cos\varphi_1 = 4{,}90\ \text{m/s}$$

$$\underline{v_1 = \sqrt{v_{1x}^2 + v_{1y}^2}} = \underline{\underline{9{,}8\ \text{m/s}}}$$



$$\tan \beta_1 = \frac{v_{1y}}{v_{1x}} = -\cot \varphi_1$$

$$\underline{\underline{\beta_1 = 30^\circ}}$$

M 2.7 Karussell

Ein Karussell beginnt seine Drehbewegung. Die zeitabhängige Winkelbeschleunigung folgt der Funktion $\alpha(t) = \alpha_0 - \beta t$. Wenn die Winkelbeschleunigung den Wert null erreicht hat, läuft das Karussell mit konstanter Drehzahl n_2 weiter.

a) Welche Gesamtbeschleunigung a_1 erfährt eine Person, die sich im Abstand r von der Drehachse befindet, zum Zeitpunkt t_1?

b) In welcher Zeit t_2 ist die konstante Drehzahl n_2 erreicht und wie groß ist diese?

c) Mit welcher Bahngeschwindigkeit v_2 bewegt sich die Person für $t \geqq t_2$?

$r = 8{,}5$ m $\quad t_1 = 20$ s $\quad \alpha_0 = 0{,}036$ rad/s^2 $\quad \beta = 1{,}2 \cdot 10^{-3}$ rad/s^3

---

a) Winkelgeschwindigkeit:

$$\omega(t) = \int_0^t \alpha(\tau)\, \mathrm{d}\tau = \alpha_0 t - \frac{1}{2}\beta t^2$$

$$\omega_1 = \alpha_0 t_1 - \frac{1}{2}\beta t_1^2 = 0{,}48\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Drehzahl: $n_1 = \omega_1/2\pi = 0{,}0764\ \text{s}^{-1} = 4{,}58\ \text{min}^{-1}$

Radial- oder Zentripetalbeschleunigung:

$$a_{\text{r}1} = r\omega_1^2 = 1{,}96\ \text{m/s}^2$$

Bahnbeschleunigung:

$$a_{\text{s}1} = r\alpha_1 = r\left(\alpha_0 - \beta t_1\right) = 0{,}102\ \text{m/s}^2$$

Gesamtbeschleunigung (die Bahnbeschleunigung ist vernachlässigbar klein):

$$a_1 = \sqrt{a_{\text{r}1}^2 + a_{\text{s}1}^2} = 1{,}96\ \text{m/s}^2$$

b) $\alpha(t_2) = 0 = \alpha_0 - \beta t_2$ liefert

$$\underline{t_2 = \alpha_0/\beta} = \underline{\underline{30\ \text{s}}}$$

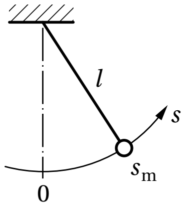
c) $$\omega_2 = \alpha_0 t_2 - \frac{1}{2}\beta t_2^2 = \frac{\alpha_0^2}{2\beta}$$

$$\underline{v_2 = r\omega_2 = \frac{r\alpha_0^2}{2\beta}} = \underline{\underline{4{,}6\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}}$$

M 2.8 Pendel

Die Ort-Zeit-Funktion eines Pendelkörpers ist für kleine Ausschläge $s(t) = s_{\text{m}} \cos \omega t$. Bestimmen Sie die Radialbeschleunigung a_{r} und die Bahnbeschleunigung a_{s} zu den Zeiten t_1 und t_2! T ist die Schwingungsdauer des Pendels: $T = 2\pi\sqrt{l/g}$, $\quad \omega = 2\pi/T$.

$l = 100$ cm $\qquad s_\mathrm{m} = 2{,}0$ cm $\qquad t_1 = 0 \qquad t_2 = T/4$



$$a_\mathrm{r} = \frac{v^2}{l}$$

$$v = \dot{s} = -\omega s_\mathrm{m} \sin \omega t \qquad \omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$a_\mathrm{s} = \ddot{s} = -\omega^2 s_\mathrm{m} \cos \omega t$$

$$t_1 = 0\colon \quad v_1 = \dot{s}_1 = 0 \qquad \underline{\underline{a_{\mathrm{r}1} = 0}}$$

$$a_{\mathrm{s}1} = \ddot{s}_1 = -\omega^2 s_\mathrm{m} \qquad \underline{a_{\mathrm{s}1} = -g\frac{s_\mathrm{m}}{l}} = \underline{\underline{-20\ \mathrm{cm/s^2}}}$$

$$t_2 = \frac{T}{4}\colon \quad v_2 = \dot{s}_2 = -\omega s_\mathrm{m} \qquad \underline{a_{\mathrm{r}2} = g\left(\frac{s_\mathrm{m}}{l}\right)^2} = \underline{\underline{0{,}39\ \mathrm{cm/s^2}}}$$

$$a_{\mathrm{s}2} = \ddot{s}_2 = 0 \qquad \underline{a_{\mathrm{s}2} = 0}$$

M 2.9 Beschleunigungen

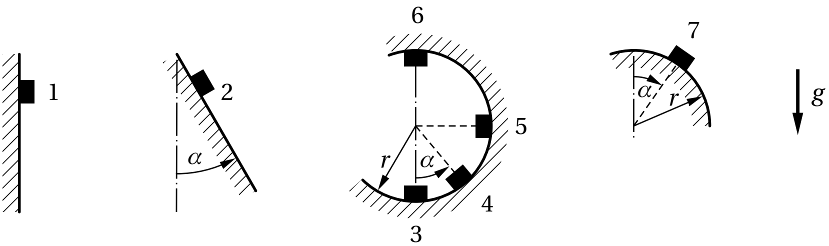
Der Betrag der Gesamtbeschleunigung a des Körpers ist für jeden der Fälle 1 bis 7 anzugeben, wenn

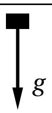
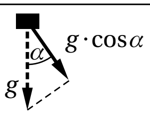
a) $v = 0$ (d. h., der Körper wird gerade freigegeben) und

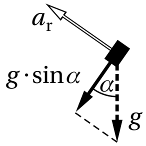
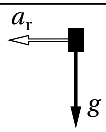
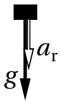
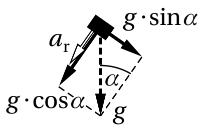
b) $v \neq 0$

angenommen wird.

$a = 30^\circ$ (Reibung nicht berücksichtigen.)



		a) $v = 0$	b) $v \neq 0$
Fall 1		$\underline{\underline{a = g}}$	$\underline{\underline{a = g}}$
Fall 2		$a = g\cos\alpha$ $a = \frac{g}{2}\sqrt{3}$	$a = \frac{g}{2}\sqrt{3}$

		a) $v = 0$	b) $v \neq 0$
Fall 3		$\underline{\underline{a = 0}}$	$\underline{\underline{a = \frac{v^2}{r}}}$
Fall 4		$a = g \sin\alpha$ $\underline{\underline{a = \frac{g}{2}}}$	$a = \sqrt{g^2 \sin^2\alpha + a_r^2}$ $\underline{\underline{a = \sqrt{\frac{g^2}{4} + \frac{v^4}{r^2}}}}$
Fall 5		$\underline{\underline{a = g}}$	$\underline{\underline{a = \sqrt{g^2 + a_r^2}}}$ $\underline{\underline{a = \sqrt{g^2 + \frac{v^4}{r^2}}}}$
Fall 6		$\underline{\underline{a = g}}$	$\underline{\underline{a = \frac{v^2}{r}}}$ $\quad (v^2/r > g)$ $\underline{\underline{a = g}}$ $\quad (v^2/r \leqq g)$
Fall 7		$a = g \sin\alpha$ $\underline{a = \frac{g}{2}}$	$a = \sqrt{g^2 \sin^2\alpha + a_r^2}$ $\quad (a_r < g\cos\alpha)$ $\underline{\underline{a = \sqrt{\frac{g^2}{4} + \frac{v^4}{r^2}}}}$ $\quad \left(\frac{v^2}{r} < \frac{g}{2}\sqrt{3}\right)$ $\underline{\underline{a = g}}$ $\quad \left(\frac{v^2}{r} \geqq \frac{g}{2}\sqrt{3}\right)$

M 2.10 Bahnkurve

Der Ort eines Punktes, der sich in der x, y-Ebene bewegt, ist gegeben durch den Ortsvektor $\vec{r}(t)$.

a) Zeichnen Sie die Bahnkurve des Punktes im Zeitintervall $-1\ \mathrm{s} \leqq t \leqq 3\ \mathrm{s}$.

b) Geben Sie eine allgemeine Beziehung der Entfernung des Körpers vom Koordinatenursprung an. Wie groß ist der Abstand zum Zeitpunkt t_2?

c) Wie lautet die allgemeine Beziehung für den Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}(t)$? Wie groß ist die Geschwindigkeit zu den Zeiten t und t_2? Zeichnen Sie die Vektoren in das Diagramm ein.

d) Wie lautet der Vektor der Beschleunigung $\vec{a}(t)$? Tragen Sie die Vektoren zu den Zeiten t und t_2 in das Diagramm ein.

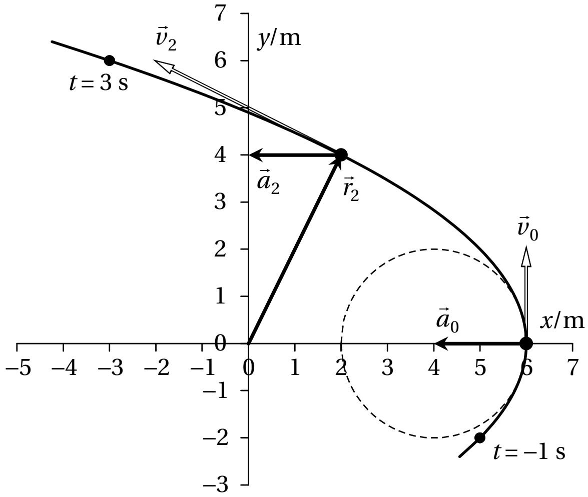
e) Wie groß sind die Normalbeschleunigung und die Tangentialbeschleunigung zu den Zeiten t und t_2?

f) Wie groß ist der Krümmungsradius der Parabel im Scheitel? Zeichnen Sie den Krümmungskreis in das Diagramm ein.

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 6\ \mathrm{m} - 1\ \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot t^2 \\ 2\ \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot t \end{pmatrix} \qquad t_2 = 2\ \mathrm{s} \qquad t_0 = 0$$

a) Wertetabelle:

t/s	−1	0	1	2	3
x/m	5	6	5	2	−3
y/m	−2	0	2	4	6



b) $r(t) = |\vec{r}(t)| = \sqrt{36 - 8t^2/\mathrm{s}^2 + 1t^4/\mathrm{s}^4}\ \mathrm{m}$

$\underline{r_2 = r\,(2\ \mathrm{s})} = \underline{\underline{\sqrt{20}\ \mathrm{m} = 4{,}47\ \mathrm{m}}}$

c) $\vec{v}(t) = \dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} -2\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot t \\ 2\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \end{pmatrix}$

$\underline{\underline{\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\ \mathrm{m/s} \end{pmatrix}}}, \qquad \underline{\underline{\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -4\ \mathrm{m/s} \\ 2\ \mathrm{m/s} \end{pmatrix}}}$

d) $\vec{a}(t) = \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} -2\ \mathrm{m/s^2} \\ 0 \end{pmatrix}$

$\underline{\vec{a}_0 = \vec{a}_2} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -2\ \mathrm{m/s^2} \\ 0 \end{pmatrix}}}$

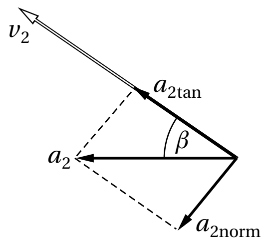
e) $\vec{a}_0 = \begin{pmatrix} -2\ \mathrm{m/s^2} \\ 0 \end{pmatrix}$ ist bereits die Normalbeschleunigung zur Zeit $t = 0$, die Tangentialbeschleunigung ist null.

Die Geschwindigkeit $\vec{v}_2$ hat die Richtung der Tangente.

$\tan\beta = \dfrac{v_{2y}}{|v_{2x}|} = 0{,}5 \quad \Rightarrow \quad \beta = 26{,}6^\circ$

$\underline{a_{2\mathrm{norm}} = |\vec{a}_2|\sin\beta} = \underline{\underline{0{,}894\ \mathrm{m/s^2}}}$

$\underline{a_{2\mathrm{tan}} = |\vec{a}_2|\cos\beta} = \underline{\underline{1{,}79\ \mathrm{m/s^2}}}$



f) Für die Normalbeschleunigung gilt $a_{\text{norm}} = v^2/R$, dabei ist R der Krümmungsradius der Bahnkurve im jeweiligen Punkt.

Der Krümmungsradius der Parabel im Scheitel beträgt

$$\underline{R_0 = \frac{v_0^2}{a_0}} = \underline{\underline{2\ \text{m}}}$$

M 2.11 Segelflugzeug

Wenn ein Segelflugzeug in eine Thermik gerät (starker Aufwind), versucht der Pilot, sich möglichst lange in diesem Gebiet aufzuhalten, um Höhe zu gewinnen. Er macht dies, indem er auf einem Kreis mit Radius R fliegt. Das Flugzeug gewinnt mit der Steiggeschwindigkeit v_z an Höhe und bewegt sich somit auf einer Schraube nach oben.

a) Wie lautet in einem kartesischen Koordinatensystem der Ortsvektor $\vec{r}(t)$, wenn zur Zeit $t = 0$ der Ort durch $\vec{r}_0$ beschrieben wird und die Schraube im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen wird? Wo befindet sich das Flugzeug zur Zeit t_1? Wie weit ist es zur Zeit t_1 vom Koordinatenursprung entfernt?

Die Geschwindigkeit des Flugzeugs in der x, y-Ebene ist v_{F}.

b) Wie lautet der Vektor $\vec{v}(t)$ der Geschwindigkeit sowie der Betrag $|\vec{v}(t)|$; wie groß ist $\vec{v}_1$ zur Zeit t_1?

c) Berechnen Sie den Vektor $\vec{a}(t)$ der Beschleunigung und interpretieren Sie das Ergebnis geometrisch. Tragen Sie die gesuchten Vektoren in eine Skizze ein.

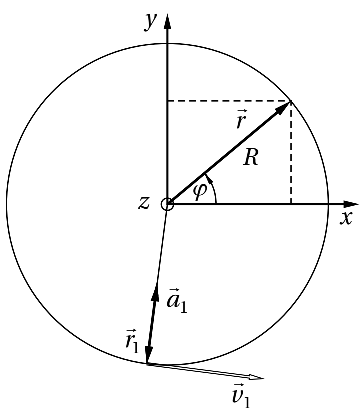
$$R = 125\ \text{m} \qquad \vec{r}_0 = \begin{pmatrix} R \\ 0 \\ z_0 \end{pmatrix} \qquad z_0 = 200\ \text{m} \qquad v_z = 2\ \text{m/s} \qquad v_{\text{F}} = 90\ \text{km/h} \qquad t_1 = 3\ \text{min}$$

---

a) $$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} R\cos\varphi \\ R\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\cos\omega t \\ R\sin\omega t \\ z_0 + v_z t \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} R\cos\left(\frac{v_{\text{F}}}{R}t\right) \\ R\sin\left(\frac{v_{\text{F}}}{R}t\right) \\ z_0 + v_z t \end{pmatrix}$$

$$\underline{\vec{r}_1 = \vec{r}(t_1)} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -16 \\ -124 \\ 560 \end{pmatrix}\ \text{m}}}$$



Der Abstand vom Ursprung ist

$$|\vec{r}| = \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}$$

$$= \sqrt{R^2 + (z_0 + v_z t)^2}$$

$$|\vec{r}_1| = \underline{\underline{574\ \text{m}}}$$

b) $$\vec{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} -v_\mathrm{F} \sin\left(\frac{v_\mathrm{F}}{R} t\right) \\ v_\mathrm{F} \cos\left(\frac{v_\mathrm{F}}{R} t\right) \\ v_z \end{pmatrix}$$

$$|\vec{v}(t)| = \sqrt{v_\mathrm{F}^2 + v_z^2} = 25{,}1\ \mathrm{m/s} = 90{,}3\ \mathrm{km/s}$$

$$\underline{\vec{v}_1 = \vec{v}(t_1)} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 24{,}8 \\ -3{,}2 \\ 2 \end{pmatrix}\ \mathrm{m/s}}}$$

c) $$\vec{a}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} -\frac{v_\mathrm{F}^2}{R} \cos\left(\frac{v_\mathrm{F}}{R} t\right) \\ -\frac{v_\mathrm{F}^2}{R} \sin\left(\frac{v_\mathrm{F}}{R} t\right) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\vec{a}_1 = \vec{a}\,(t_1)} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0{,}64 \\ 4{,}96 \\ 0 \end{pmatrix}\ \mathrm{m/s^2}}}$$

$\vec{a}(t)$ hat keine z-Komponente, verläuft also in der x, y-Ebene und weist immer zum Kreismittelpunkt. $\vec{a}(t)$ ist die Zentripetalbeschleunigung der Kreisbewegung.

$$\underline{|\vec{a}| = \frac{v_\mathrm{F}^2}{R}} = \underline{\underline{5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}}$$

M 3 Newton'sche Axiome, Bewegungsgleichung

Isaac Newton fasste die Grundlagen der Mechanik 1687 in seinem Werk „Philosophiae naturalis principia mathematica" in drei Axiomen zusammen, wobei Erkenntnisse von Galileo Galilei und anderen mit einflossen. In der Encyclopædia Britannica, 9th Edition, 1875, liest man:

1. *Every body continues in its state of rest, or of uniform motion in a straight line, except in so far as it is compelled by force to change that state.*
2. *Change of (quantity of) motion is proportional to force, and takes place in the straight line in which the force acts.*
3. *To every action there is always an equal and contrary reaction; or the mutual actions of any two bodies are always equal and oppositely directed.*

Die *quantity of motion* hieß in der deutschen Literatur *Bewegungsgröße* und wird heutzutage als *Impuls* bezeichnet: $\vec{p} = m\vec{v}$. Das zweite Axiom lautet daher:

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$$

Eine Kraft bewirkt eine zeitliche Änderung des Impulses eines Körpers. Die durch einen Kraftstoß hervorgerufene Impulsänderung beträgt

$$\Delta\vec{p} = \int \vec{F}(t)\,\mathrm{d}t$$

Bei konstanter Masse ergibt sich das meist zitierte Gesetz

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

Das zweite Axiom wird auch als *Grundgesetz der Dynamik* oder *Newton'sche Bewegungsgleichung* bezeichnet. Die Bewegungsgleichung ist eine Differenzialgleichung zweiter Ordnung bezüglich der Zeit für den Ortsvektor $\vec{r}(t)$. Durch Integration lässt sich $\vec{r}(t)$ bestimmen.

M 3.1 Ungleichmäßig beschleunigte Bewegung

Eine Punktmasse bewegt sich unter dem Einfluss der Kraft $F_x = bt$ auf einer Geraden. b ist eine Konstante. Die Bewegung beginnt zur Zeit $t_0 = 0$ am Ort x_0 mit der Geschwindigkeit v_{x0}.

Gesucht: Beschleunigung a_{x1}, Geschwindigkeit v_{x1} und Ort x_1 zur Zeit t_1

$m = 2{,}0$ kg $\quad b = 20$ N/s $\quad t_1 = 2{,}0$ s $\quad x_0 = 0 \quad v_{x0} = 0$

$$ma_x = bt$$

$$a_x(t) = \frac{b}{m}t \qquad \Rightarrow \quad \underline{a_{x1} = \frac{b}{m}t_1} = \underline{\underline{20\ \mathrm{m/s^2}}}$$

$$v_x(t) = \int a_x(t)\,\mathrm{d}t$$

$$v_x(t) = \frac{b}{2m}t^2 \quad (v_{x0} = 0) \qquad \Rightarrow \quad \underline{v_{x1} = \frac{b}{2m}t_1^2} = \underline{\underline{20\ \mathrm{m/s}}}$$

$$x(t) = \int v_x(t)\,\mathrm{d}t$$

$$x(t) = \frac{b}{6m}t^3 \quad (x_0 = 0) \qquad \Rightarrow \quad \underline{x_1 = \frac{b}{6m}t_1^3} = \underline{\underline{13\ \mathrm{m}}}$$

M 3.2 Frontalaufprall

Beim Frontalaufprall eines Straßenfahrzeuges der Masse m mit der Geschwindigkeit v_0 auf ein festes Hindernis kommt das Fahrzeug innerhalb der Zeit Δt zur Ruhe. Welche mittlere Kraft $\overline{F}$ muss das Hindernis während des Aufpralls mindestens aufnehmen?

$m = 800$ kg $\quad v_0 = 90$ km/h $\quad \Delta t = 0{,}02$ s

---

$$\Delta p = \int F\,\mathrm{d}t$$

$$mv_0 = \overline{F}\,\Delta t$$

$$\underline{\overline{F} = \frac{mv_0}{\Delta t}} = \underline{\underline{1{,}0 \cdot 10^6\ \mathrm{N}}}$$

M 3.3 Kraftstoß

Ein Körper der Masse m hat die Geschwindigkeit v_0 und bewegt sich kräftefrei.

Wie groß wird seine Geschwindigkeit v_1, wenn von der Zeit $t_0 = 0$ an bis zur Zeit t_1

a) eine konstante Kraft des Betrages F_0 entgegen der Bewegungsrichtung auf ihn einwirkt?

b) die Kraft $F = -(F_0 + bt)$ wirksam wird?

$F_0 = 400$ N $\quad b = -5{,}0 \cdot 10^4$ N/s $\quad v_0 = 2{,}0$ m/s $\quad m = 1{,}0$ kg $\quad t_1 = 0{,}010$ s

---

$$\Delta p = mv_1 - mv_0 = \int_0^{t_1} F(t)\,\mathrm{d}t$$

$$v_1 = \frac{1}{m}\int_0^{t_1} F(t)\,\mathrm{d}t + v_0$$

a) $$v_1 = \frac{1}{m}\Big[-F_0 t\Big]_0^{t_1} + v_0$$

$$\underline{v_1 = -\frac{F_0}{m}t_1 + v_0} = \underline{\underline{-2{,}0\ \mathrm{m/s}}}$$

b) $$v_1 = \frac{1}{m}\left[-F_0 t - \frac{b}{2}t^2\right]_0^{t_1} + v_0$$

$$\underline{v_1 = -\frac{t_1}{m}\left(F_0 + \frac{b}{2}t_1\right) + v_0} = \underline{\underline{+0{,}5\ \mathrm{m/s}}}$$

M 3.4 Schnellzug

Ein Schnellzug besteht aus einer Lokomotive der Masse m_L und N Wagen der Masse m_W. Der Haftreibungskoeffizient (Räder, Schienen) ist μ_0. Alle Achsen der Lokomotive werden angetrieben. Berechnen Sie

a) die maximal mögliche Beschleunigung a_m auf waagerechter Strecke,

b) die maximale Steigung ($\tan\alpha$), die der Zug mit konstanter Geschwindigkeit überwinden kann!

$m_L = 82{,}5$ t $\quad m_W = 43$ t $\quad N = 8 \quad \mu_0 = 0{,}15$

---

a) $$(m_L + Nm_W)a = F$$

$$F = \mu_0 m_L g$$

$$\underline{a = \frac{\mu_0 m_L}{m_L + Nm_W}}\,g = \underline{\underline{0{,}28\ \mathrm{m/s^2}}}$$

b) $ma = F \qquad m = m_L + Nm_W$

$v = \text{const} \quad \Rightarrow \quad a = 0 \quad \Rightarrow \quad F = 0$

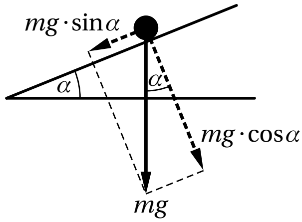
$\Rightarrow \quad F = F_H - F_R = 0$

$$F_H = (m_L + Nm_W)g\sin\alpha$$

$$F_R = \mu_0 m_L g\cos\alpha$$

$$(m_L + Nm_W)g\sin\alpha = \mu_0 m_L g\cos\alpha$$

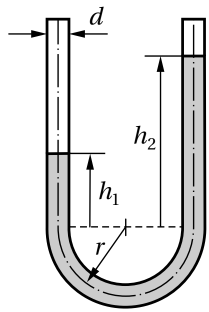
$$\underline{\tan\alpha = \frac{\mu_0 m_L}{m_L + Nm_W}} = 0{,}029 = \underline{\underline{2{,}9\,\%}}$$



M 3.5 U-Rohr

In einem oben offenen U-Rohr steht eine Quecksilbersäule in beiden Schenkeln im Augenblick der Beobachtung ungleich hoch. Die Abmessungen des U-Rohres sind der Skizze zu entnehmen. Welche Beschleunigung a hat die Quecksilbersäule im dargestellten Augenblick?

$h_1 = 100$ mm $\quad h_2 = 150$ mm $\quad r = 30$ mm $\quad d \ll r$



$$ma = F$$

$$m = \varrho A(h_1 + h_2 + \pi r)$$

$$F = \varrho g A(h_2 - h_1)$$

$$a = \frac{F}{m} = \frac{h_2 - h_1}{h_1 + h_2 + \pi r}\, g = \underline{\underline{1{,}4 \text{ m/s}^2}}$$

M 3.6 Kegelpendel

Eine Kugel der Masse m hängt an einem Faden der Länge l und bewegt sich auf einer horizontalen Kreisbahn mit dem Radius r (Kegelpendel).

a) Wie groß ist die Winkelgeschwindigkeit ω der umlaufenden Kugel?

b) Welche Kraft F wirkt im Faden?

$m = 20$ g $\quad l = 50$ cm $\quad r = 40$ cm

Komponentenzerlegung der Gewichtskraft:

$\vec{F}_G = \vec{F}_r + \vec{F}$

$$F_G = mg$$

a) $ma_r = F_r$

$$a_r = \omega^2 r$$

Aus der Skizze:

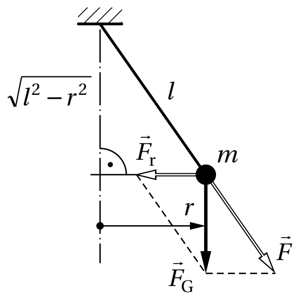
$$\frac{F_r}{mg} = \frac{r}{\sqrt{l^2 - r^2}} \quad \text{(ähnliche Dreiecke)}$$

$$m\omega^2 r = \frac{r}{\sqrt{l^2 - r^2}}\, mg$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\sqrt{l^2 - r^2}}} = \underline{\underline{5{,}7 \text{ s}^{-1}}}$$

b) $$\frac{F}{mg} = \frac{l}{\sqrt{l^2 - r^2}} \quad \text{(ähnliche Dreiecke)}$$

$$F = \frac{l}{\sqrt{l^2 - r^2}}\, mg = \underline{\underline{0{,}33 \text{ N}}}$$



M 3.7 Schräglage

a) Welche Schräglage (Winkel α_R gegenüber der Vertikalen) hat ein Radfahrer, der eine Kreisbahn (Radius r_R) mit der Geschwindigkeit v_R durchfährt?

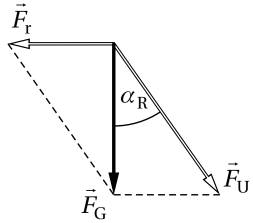
b) Ein Flugzeug soll mit gleicher Schräglage $\alpha_F = \alpha_R$, aber mit der Geschwindigkeit v_F fliegen. Wie groß ist der Kurvenradius r_F?

(Die Bewegungen finden in einer horizontalen Ebene statt.)

$v_R = 36$ km/h $\quad r = 20$ m $\quad v_F = 900$ km/h

---

a) Komponentenzerlegung der Gewichtskraft:



$\vec{F}_G = \vec{F}_r + \vec{F}_U$

$F_G = mg$

Radialkomponente $\vec{F}_r$ erzeugt Radialbeschleunigung:

$$F_r = ma_r = m\frac{v_R^2}{r_R}$$

Unterlagekraft $\vec{F}_U$ wird durch die Straße aufgenommen (Kräftegleichgewicht).

$$\tan\alpha_R = \frac{F_r}{F_G}$$

$$\underline{\tan\alpha_R = \frac{v_R^2}{r_R g}} \qquad \underline{\underline{\alpha_R = 27°}}$$

b) $\tan\alpha_F = \tan\alpha_R$

$$\frac{v_F^2}{r_F g} = \frac{v_R^2}{r_R g}$$

$$\underline{r_F = r_R\left(\frac{v_F}{v_R}\right)^2} = \underline{\underline{12{,}5\text{ km}}}$$

M 3.8 Talsenke

Ein Pkw fährt auf einem kurvenfreien Streckenabschnitt mit der Geschwindigkeit v_0 durch eine Talsenke (Krümmungsradius r_1) und danach über eine Bergkuppe (Krümmungsradius r_2). Der Fahrer hat die Masse m.

a) Wie groß ist die Gewichtskraft F_G des Fahrers?

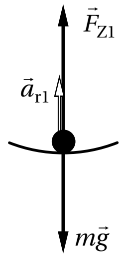
b) Wie groß sind Radialkraft (Zentripetalkraft) F_{r1} und Zwangskraft (Kraft zwischen Fahrer und Sitz) F_{Z1} für den Fahrer in der Talsenke?

c) Wie groß sind Radialkraft F_{r2} und Zwangskraft F_{Z2} für den Fahrer auf der Bergkuppe?

d) Bei welcher Geschwindigkeit v_1 verliert der Pkw auf der Bergkuppe die Bodenhaftung?

$r_1 = 135$ m $\quad m = 80$ kg $\quad r_2 = 68$ m $\quad v_0 = 72$ km/h

---



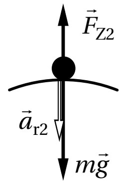
a) $\underline{F_G = mg} = \underline{\underline{0{,}78\ \mathrm{kN}}}$

b) $F_{r1} = ma_{r1}$

$$\underline{F_{r1} = m\frac{v_0^2}{r_1}} = \underline{\underline{0{,}24\ \mathrm{kN}}}$$

$$ma_{r1} = F_{Z1} - F_G$$

$$\underline{F_{Z1} = m\left(g + \frac{v_0^2}{r_1}\right)} = \underline{\underline{1{,}02\ \mathrm{kN}}}$$



c) $F_{r2} = ma_{r2}$

$$\underline{F_{r2} = m\frac{v_0^2}{r_2}} = \underline{\underline{0{,}47\ \mathrm{kN}}}$$

$$ma_{r2} = F_G - F_{Z2}$$

$$\underline{F_{Z2} = m\left(g - \frac{v_0^2}{r_2}\right)} = \underline{\underline{0{,}31\ \mathrm{kN}}}$$

d) $F_{Z3} = mg - m\dfrac{v_1^2}{r_2} = 0$

$$\underline{v_1 = \sqrt{g r_2}} = \underline{\underline{93\ \mathrm{km/h}}}$$

M 3.9 Kraftvektoren

Ein Körper der Masse m erfährt unter dem Einfluss von drei Kräften die Beschleunigung $\vec{a}$. Bestimmen Sie die Kraft $\vec{F}_3$, wenn die Kräfte $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ gegeben sind. Welchen Betrag hat die resultierende Kraft?

$$m = 2\ \mathrm{kg} \qquad \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \qquad \vec{F}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{N} \qquad \vec{F}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{N}$$

$\vec{F}_{res} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = m\vec{a}$ liefert

$$\underline{\vec{F}_3 = m\vec{a} - \vec{F}_1 - \vec{F}_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \mathrm{N} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{N} - \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{N} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -3 \\ -7 \\ -2 \end{pmatrix} \mathrm{N}}}$$

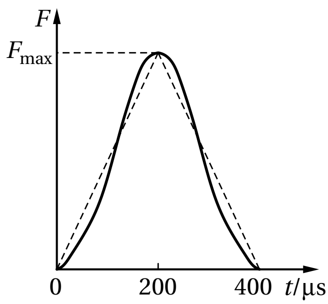
$$\underline{\left|\vec{F}_{res}\right| = m\,|a|} = \underline{\underline{2 \cdot \sqrt{2}\ \mathrm{N}}}$$

M 3.10 Golfschlag

Ein Golfball der Masse m wird durch einen Golfschläger abgeschlagen und erhält dadurch die Geschwindigkeit v. Der Zeitverlauf der Kraft $F(t)$, die der Schläger auf den Ball ausübt, ist in nebenstehendem Bild dargestellt.

Bestimmen Sie die maximal wirksame Kraft F_{max} zwischen Schläger und Ball. Nähern Sie dazu den tatsächlichen glockenförmigen Kraftverlauf durch eine Dreiecksfunktion an.

$m = 42\ g \qquad v = 80\ \mathrm{m/s}$



Nach Newton entspricht das Zeitintegral der Kraft der Impulsänderung:

$\int F(t)\,\mathrm{d}t = \Delta p = mv$ ist näherungsweise

$\frac{1}{2}\Delta t \cdot F_{\max} = mv$

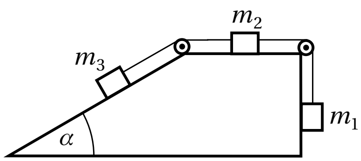
$\underline{F_{\max} = \frac{2mv}{\Delta t}} = \underline{\underline{16{,}8\ \mathrm{kN}}}$

M 3.11 Seilkräfte

Die Körper der Massen m_1, m_2 und m_3 können sich reibungsfrei bewegen; Rollenmassen und Seilmasse werden vernachlässigt.

a) Mit welcher Beschleunigung a bewegen sich die Körper?

b) Wie groß sind die Seilkräfte F_{12} und F_{32} während der Bewegung?



$m_1 = 250$ g $\quad m_2 = 250$ g

$m_3 = 300$ g $\quad \alpha = 30°$

---

a) $ma = F$

$m = m_1 + m_2 + m_3$ (Gesamtmasse)

$F = m_1 g - m_3 g \sin\alpha$ (Summe der äußeren Kräfte)

$(m_1 + m_2 + m_3)\,a = m_1 g - m_3 g \sin\alpha$

$\underline{a = \frac{m_1 - m_3 \sin\alpha}{m_1 + m_2 + m_3} g} = \underline{\underline{1{,}23\ \mathrm{m/s^2}}}$

b) Bewegungsgleichung für m_1:

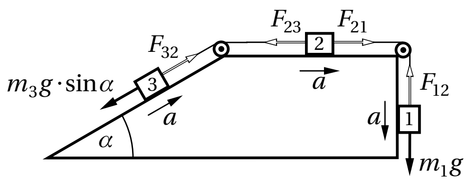
$m_1 a = m_1 g - F_{12}$

$\underline{F_{12} = m_1(g - a)} = \underline{\underline{2{,}15\ \mathrm{N}}}$

Bewegungsgleichung für m_3:

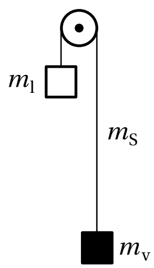
$m_3 a = F_{32} - m_3 g \sin\alpha$

$\underline{F_{32} = m_3(g\sin\alpha + a)} = \underline{\underline{1{,}84\ \mathrm{N}}}$



M 3.12 Förderanlage

Bei einer Förderanlage hat der leere Förderkorb die Masse m_1, der beladene die Masse m_v und das Förderseil die Masse m_S. Die Masse des Förderrades wird vernachlässigt. Zu Beginn der Bewegung ist der leere Korb ganz oben, der volle ganz unten; die gesamte Seilmasse befindet sich näherungsweise auf der rechten Seite.



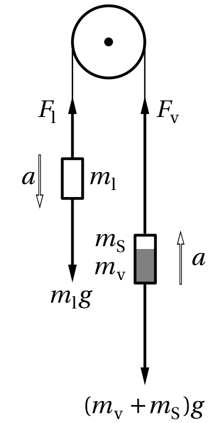
a) Welche Kraft F_A muss im Augenblick des Anfahrens vom Förderrad auf das Seil übertragen werden, um den beladenen Korb anzuheben (Anfahrbeschleunigung a) und gleichzeitig den leeren Korb hinabzubefördern?

b) Aus Sicherheitsgründen darf die Seilkraft den Betrag F_{Sm} nicht überschreiten. Überprüfen Sie, ob diese Bedingung während des Anfahrens erfüllt ist!

$m_\mathrm{l} = 10$ t $\quad m_\mathrm{v} = 12$ t $\quad m_\mathrm{S} = 12{,}8$ t $\quad a = 1{,}2\ \mathrm{m/s^2}$ $\quad F_{\mathrm{Sm}} = 280$ kN

---

a) Das Förderrad bringt die Differenz der Seilkräfte auf:



$F_\mathrm{A} = F_\mathrm{v} - F_\mathrm{l}$

Ermittlung der Seilkräfte
mit der Bewegungsgleichung:

$m_\mathrm{l}a = m_\mathrm{l}g - F_\mathrm{l}$

$F_\mathrm{l} = m_\mathrm{l}(g - a)$

$(m_\mathrm{S} + m_\mathrm{v})a = F_\mathrm{v} - (m_\mathrm{S} + m_\mathrm{v})g$

$F_\mathrm{v} = (m_\mathrm{S} + m_\mathrm{v})(a + g)$

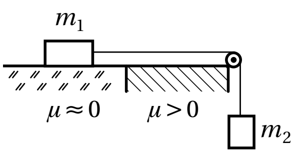
$\underline{F_\mathrm{A} = (m_\mathrm{S} + m_\mathrm{v})(a + g) + m_\mathrm{l}(a - g)} = \underline{\underline{187\ \mathrm{kN}}}$

b) Die größte Seilkraft F_S tritt am Förderrad auf der Seite des vollen Förderkorbes auf:

$\underline{F_\mathrm{S} = F_\mathrm{v} = (m_\mathrm{S} + m_\mathrm{v})(a + g)} = \underline{\underline{273\ \mathrm{kN} < F_{\mathrm{Sm}}}}$

M 3.13 Fadenkraftdifferenz

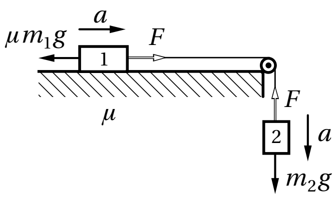
Ein auf einer horizontalen Platte gleitender Körper (Masse m_1) wird durch einen Faden über eine Rolle von einem frei herabhängenden Körper (Masse m_2) gezogen. (Rollen- und Fadenmasse nicht berücksichtigen.)



Um welchen Wert ΔF ändert sich die Fadenkraft, wenn der gleitende Körper von einer Glasplatte (Gleitreibungzahl $\mu \approx 0$) auf raues Holz ($\mu > 0$) gelangt?

$m_1 = 12$ g $\quad m_2 = 30$ g $\quad \mu = 0{,}6$

Körper 1 auf dem Holz:
(Bewegungsgleichungen)



$$m_1 a = F - \mu m_1 g$$

$$m_2 a = m_2 g - F$$

$$\Rightarrow \frac{F}{m_1} - \mu g = g - \frac{F}{m_2}$$

$$F\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) = g\,(1 + \mu)$$

$$F = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\,(1 + \mu)\,g$$

Körper 1 auf Glas ($\mu = 0$):

$$F_0 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$$

Fadenkraftdifferenz:

$$\Delta F = F - F_0$$

$$\underline{\Delta F = \mu \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g} = \underline{\underline{0{,}050\ \mathrm{N}}}$$

M 3.14 Kette

Eine Kette der Masse m und der Gesamtlänge l liegt gestreckt auf einer Tischplatte, sodass ein Stück der Länge x überhängt. Die Gleitreibungszahl ist μ.

a) Stellen Sie die Bewegungsgleichung für das Abrutschen der Kette vom Tisch auf. Wie groß ist die Beschleunigung?

b) Welche Zugkraft muss die Kette an der Tischkante übertragen?

c) Welches Stück x_0 der Kette muss anfangs mindestens überhängen, wenn die Kette von selbst ins Rutschen kommen soll (Haftreibungszahl μ_0)?

---

a) $m a_x = F_x$

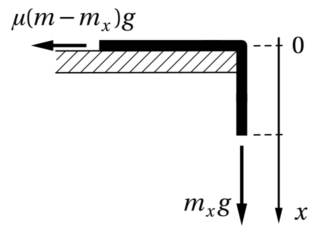
$$m a_x = m_x g - \mu (m - m_x) g$$

$$\frac{m_x}{m} = \frac{x}{l}$$

$$m a_x = mg \frac{x}{l} - \mu mg \left(1 - \frac{x}{l}\right)$$

$$\underline{a_x = (1 + \mu) \frac{x}{l} g - \mu g}$$

m_x ist die Masse des überhängenden Kettenteils.



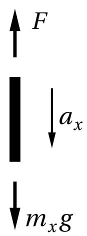
b) Bewegungsgleichung des überhängenden Kettenteils:

$$m_x a_x = m_x g - F$$

$$F = m_x (g - a_x)$$

$$F = mg \frac{x}{l} \left[1 + \mu - (1 + \mu) \frac{x}{l}\right]$$

$$\underline{F = \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right) (1 + \mu) mg}$$



c) Bewegungsgleichung mit $\mu \to \mu_0$ und $a_x \geqq 0$:

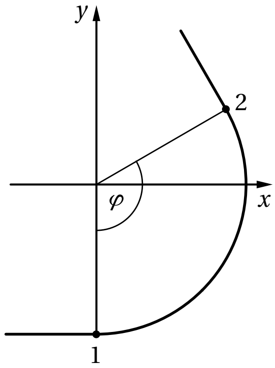
$$0 = (1 + \mu_0) \frac{x_0}{l} g m - \mu_0 m g$$

$$\frac{x_0}{l} (1 + \mu_0) = \mu_0$$

$$\underline{x_0 = \frac{\mu_0 l}{1 + \mu_0}}$$

M 3.15 Kurvenfahrt

Ein Auto der Masse m fährt auf horizontaler Fahrbahn zwischen den Punkten 1 und 2 mit konstantem Geschwindigkeitsbetrag v durch eine Kurve mit dem Radius R und dem Winkel φ



a) Zeigen Sie durch eine vektorielle Beschreibung der Kurvenfahrt, dass die auftretende Impulsänderung durch die Zentripetalkraft F_{zp} verursacht wird und berechnen Sie diese.

b) Wie groß muss der Reibungskoeffizient μ zwischen Reifen und Straße mindestens sein, damit die Kurve durchfahren werden kann?

c) Wie groß ist der Kraftstoß $\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t)\,\mathrm{d}t$ und welche Richtung hat er?

$m = 1000$ kg $\qquad v = 50$ km/h $\qquad R = 100$ m $\qquad \varphi = 120°$

---

a) Ortsvektor:

$$\vec{r}(t) = R\begin{pmatrix} \sin\omega t \\ -\cos\omega t \end{pmatrix}$$

$$\omega = \frac{v}{R}$$

Geschwindigkeitsvektor:

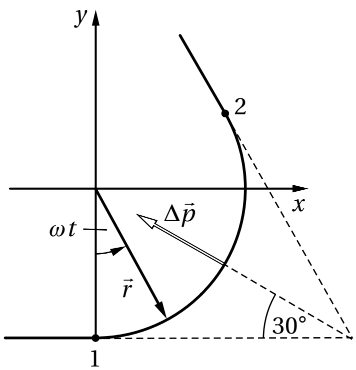
$$\vec{v}(t) = R\omega\begin{pmatrix} \cos\omega t \\ \sin\omega t \end{pmatrix} = v\begin{pmatrix} \cos\omega t \\ \sin\omega t \end{pmatrix}$$

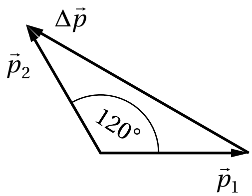
Impulsvektor:

$$\vec{p}(t) = mv\begin{pmatrix} \cos\omega t \\ \sin\omega t \end{pmatrix}$$

Newton'sches Grundgesetz:

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = mv\omega\begin{pmatrix} -\sin\omega t \\ \cos\omega t \end{pmatrix}$$





Die Kraft ist in jedem Moment dem Ortsvektor $\vec{r}$ entgegengesetzt gerichtet und weist zum Kreismittelpunkt hin. Sie ist die Zentrifugalkraft

$$\underline{F_{\text{zp}} = mR\omega^2 = \frac{mv^2}{R}} = \underline{\underline{1929\ \text{N}}}$$

b) $F_{\text{R}} \geqq F_{\text{zp}}$ oder $\mu mg \geqq mv^2/R$

$$\underline{\mu \geqq \frac{v^2}{gR}} = \underline{\underline{0{,}2}}$$

c) Der Kraftstoß entspricht der kompletten Impulsänderung:

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t)\,\mathrm{d}t = \Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = mv\left[\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cos 0 \\ \sin 0 \end{pmatrix}\right]$$

$$\Delta\vec{p} = mv \begin{pmatrix} -3/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

$$|\Delta\vec{p}| = \underline{\underline{24\ \text{kN}\cdot\text{s}}}$$

Der Vektor liegt auf der Winkelhalbierenden.

M 4 Arbeit, Energie, Leistung

Wird ein Körper unter Einwirkung einer Kraft $\vec{F}$ um das Wegelement $\mathrm{d}\vec{s}$ verschoben, so wird die Arbeit

$$\mathrm{d}W = \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{s}$$

verrichtet. Aus dem Differenzial der Arbeit folgt durch Integration die Arbeit bei endlicher Verschiebung:

$$W_{12} = \int_1^2 \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{s}$$

Die Leistung gibt die verrichtete Arbeit pro Zeit an:

$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \vec{F}\,\vec{v}$$

Wird einem System durch konservative Kräfte (keine Reibung) Arbeit zugeführt, so wird dadurch die Energie E des Systems erhöht:

$$\Delta E = E_2 - E_1 = W_{12}$$

In einem abgeschlossenen System ($W = 0$) bleibt der Energieinhalt konstant. Innerhalb des Systems können aber verschiedene Energieformen ineinander umgewandelt werden (Energieerhaltungssatz):

$$E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = \text{const}, \qquad \Delta E_{\text{kin}} = -\Delta E_{\text{pot}}$$

Verschiedene Energieformen sind in der Mechanik kinetische und potenzielle Energie.

Beispiele:

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2$$

$E_{\text{pot}} = mgh$ (Lageänderung im Schwerefeld, Nullpunkt muss definiert werden)

$E_{\text{pot}} = \frac{1}{2}ks^2$ (Spannenergie einer Feder)

Bei Drehbewegungen ist das Differenzial der Arbeit das Produkt aus Drehmoment und Verdrillungswinkel:

$$\mathrm{d}W = \vec{M}\,\mathrm{d}\vec{\varphi}$$

Die Leistung beträgt

$$P = \vec{M}\,\vec{\omega}$$