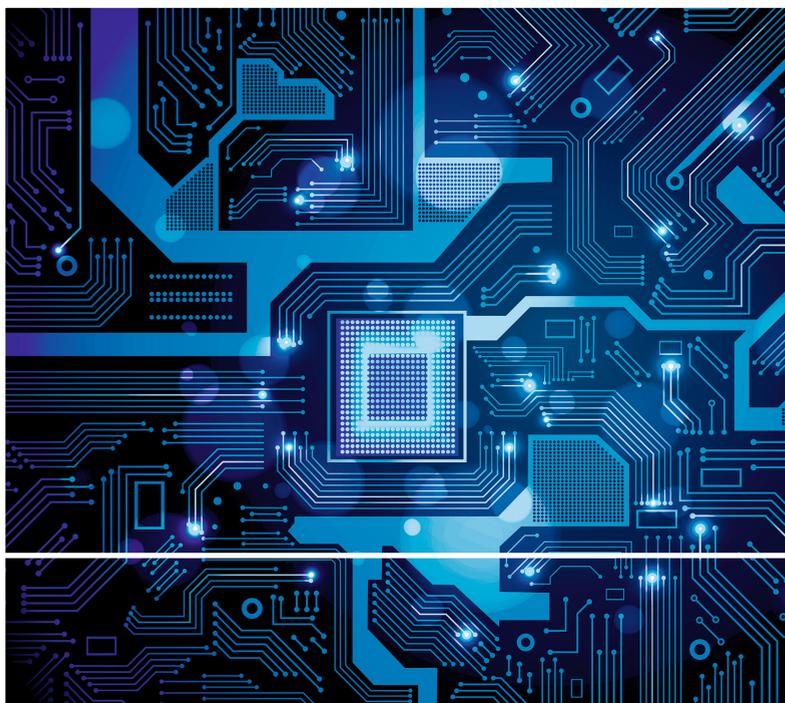


Uwe Probst

# Leistungselektronik für Bachelors

Grundlagen und praktische Anwendungen



5., aktualisierte und erweiterte Auflage

HANSER





**bleiben Sie auf dem Laufenden!**

Hanser Newsletter informieren Sie regelmäßig über neue Bücher und Termine aus den verschiedenen Bereichen der Technik. Profitieren Sie auch von Gewinnspielen und exklusiven Leseproben. Gleich anmelden unter

**[www.hanser-fachbuch.de/newsletter](http://www.hanser-fachbuch.de/newsletter)**



Uwe Probst

# Leistungselektronik für Bachelors

Grundlagen und praktische Anwendungen

5., aktualisierte und erweiterte Auflage

HANSER

## Der Autor:

Prof. Dr.-Ing. Uwe Probst

Fachbereich Elektro- und Informationstechnik, Technische Hochschule Mittelhessen



Alle in diesem Buch enthaltenen Informationen wurden nach bestem Wissen zusammengestellt und mit Sorgfalt geprüft und getestet. Dennoch sind Fehler nicht ganz auszuschließen. Aus diesem Grund sind die im vorliegenden Buch enthaltenen Informationen mit keiner Verpflichtung oder Garantie irgendeiner Art verbunden. Autor(en, Herausgeber) und Verlag übernehmen infolgedessen keine Verantwortung und werden keine daraus folgende oder sonstige Haftung übernehmen, die auf irgendeine Weise aus der Benutzung dieser Informationen – oder Teilen davon – entsteht.

Ebenso wenig übernehmen Autor(en, Herausgeber) und Verlag die Gewähr dafür, dass die beschriebenen Verfahren usw. frei von Schutzrechten Dritter sind. Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek:

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt.

Alle Rechte, auch die der Übersetzung, des Nachdruckes und der Vervielfältigung des Buches, oder Teilen daraus, sind vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf ohne schriftliche Genehmigung des Verlages in irgendeiner Form (Fotokopie, Mikrofilm oder ein anderes Verfahren) – auch nicht für Zwecke der Unterrichtsgestaltung – reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden.

© 2022 Carl Hanser Verlag München

Internet: [www.hanser-fachbuch.de](http://www.hanser-fachbuch.de)

Lektorat: Frank Katzenmayer

Herstellung: Frauke Schafft

Covergestaltung: Max Kostopoulos

Coverkonzept: Marc Müller-Bremer, [www.rebranding.de](http://www.rebranding.de), München

Titelbild: © shutterstock.com/LIORIKI

Satz: Eberl & Koesel Studio GmbH, Krugzell

Druck und Bindung: CPI books GmbH, Leck

Printed in Germany

Print-ISBN 978-3-446-47281-5

E-Book-ISBN 978-3-446-47367-6

## Vorwort zur 5. Auflage

Dieses Buch richtet sich an Studierende und Mitarbeiter der elektrotechnischen Fakultäten an Universitäten und Fachhochschulen sowie an Ingenieure in der Praxis, die sich einen Einblick in die Wirkungsweise von leistungselektronischen Bauelementen und Schaltungen verschaffen wollen.

Ziel dieses Buches ist es, die Erläuterungen anhand von Beispielen und überschaubaren Übungsaufgaben zielgerichtet zu strukturieren sowie mit einfach handhabbaren und über das Internet zugänglichen Simulationsprogrammen der beiden virtuellen Labore für „Leistungselektronik“ und „elektronischer Antriebstechnik“ zu unterstützen.

Die Inhalte basieren auf der gleichnamigen Vorlesung „Leistungselektronik“, die ich seit 2002 an der Technischen Hochschule Mittelhessen in dieser Form anbiete. Mathematische Grundlagen, die für das Verständnis und die Auslegung leistungselektronischer Schaltungen unerlässlich sind, werden im ersten Kapitel vorgestellt. Das Kapitel 2 ist den Leistungshalbleitern gewidmet. Kapitel 3 enthält eine umfassende Beschreibung der netzgeführten Stromrichter und ihrer Funktionsweise. Klassische Gleichstromsteller und ihre Steuerverfahren, die eine Grundlage moderner Schaltnetzteile bilden, sind Gegenstand von Kapitel 4. In Kapitel 5 werden die Grundschaltungen der Gleichstromsteller zu ein- und dreiphasigen spannungseinprägenden Wechselrichtern und den zugehörigen Steuerverfahren erweitert. Neben einigen zusätzlichen Beispielen stellt die 5. Auflage aktive Gleichrichter vor. Sie ermöglichen eine Netzurückspeisung, wenn Antriebe im Bremsbetrieb kurzzeitig als Generator arbeiten.

Kapitel 6 gibt eine Einführung in das Themengebiet der Mehrpunktumrichter. Die Grundlagen des weichen Schaltens unter Nutzung von Resonanzkreisen finden sich in Kapitel 7.

Die in den virtuellen Laboren verfügbaren Simulationsmodelle decken nahezu alle besprochenen Schaltungen ab. Sie zeigen die charakteristischen Zeitverläufe der Zustandsgrößen, die für die Schaltung entscheidend sind. Zusätzlich bieten sie eine animierte Darstellung der jeweils leitenden Schaltungszweige und erleichtern so das Verständnis ihrer Funktionsweise. Da die meisten Browser herkömmliche Java-Applets aufgrund von Sicherheitsbedenken nicht mehr unterstützen, werden sie beim Start automatisch in JavaScript übersetzt und dann ausgeführt. Dadurch ist gewährleistet, dass beide virtuellen Labore weiterhin verwendet werden können.

Ich danke meinem Lektor Frank Katzenmayer für die unkomplizierte Kommunikation und Dr. Malte Probst für das sorgfältige Korrigieren der neuen Manuskriptteile. Schließlich gebührt ein besonderer Dank meiner Familie, die die Arbeit immer unterstützt hat.

Gießen, im Januar 2022

Uwe Probst

URL des virtuellen Labors „Leistungselektronik“:

<https://homepages.thm.de/~hg13555/Datenbank/lei/index.php/de/>



URL des virtuellen Labors „elektronische Antriebstechnik“:

<https://homepages.thm.de/~hg13555/Datenbank/aat/index.php/de/>



# Inhalt

<b>1</b>	<b>Einführung in die Leistungselektronik .....</b>	<b>13</b>
1.1	Grundlagen .....	13
1.2	Eigenschaften des Schaltbetriebs .....	15
1.2.1	Gleich-, Wechsel-, Mischgrößen .....	16
1.2.2	Arithmetischer Mittelwert .....	17
1.2.3	Effektivwert .....	19
1.2.4	Gesamteffektivwert, Klirrfaktor, Formfaktor und Welligkeit .....	22
1.2.5	Überschlägige Berechnung bei einfachen Kurvenverläufen .....	24
1.3	Leistungsbilanz bei Stromrichtern .....	29
1.3.1	Leistungsfaktor bei sinusförmigen Größen .....	29
1.3.2	Fourier-Analyse .....	31
1.3.3	Blindleistung bei Stromrichtern .....	32
1.4	Betriebsquadranten .....	38
1.5	Lösungen .....	39
<b>2</b>	<b>Leistungshalbleiter .....</b>	<b>44</b>
2.1	Grundlagen der Halbleiterphysik .....	44
2.1.1	Eigenleitfähigkeit .....	47
2.1.2	Dotierung .....	48
2.1.3	Feld- und Diffusionsstrom .....	50
2.1.4	Kombination von P- und N-dotierten Halbleitern zum PN-Übergang .....	50
2.1.4.1	Raumladungszone beim stromlosen PN-Übergang .....	51
2.1.4.2	Raumladungszone beim PN-Übergang in Durchlassrichtung .....	53
2.1.4.3	Raumladungszone beim PN-Übergang in Sperrrichtung .....	54
2.1.5	PiN-Übergang .....	54
2.2	Neue Halbleitermaterialien .....	56
2.2.1	Halbleiter mit großem Bandabstand .....	56
2.2.2	Anwendungsgebiete .....	57
2.3	Vergleich von idealen und realen Schaltern .....	58
2.4	Diode .....	62
2.5	Thyristor .....	65

2.6	Transistoren .....	68
2.6.1	MOSFET (Unipolar-Transistor) .....	68
2.6.2	Bipolar-Transistor .....	73
2.6.3	IGBT .....	74
2.6.4	Parasitäre Elemente .....	80
2.6.5	Schaltverhalten .....	84
2.6.6	Latch-Up .....	88
2.6.7	Ersatzschaltbild .....	88
2.6.8	Gemeinsamkeiten von Transistoren .....	89
2.7	GaN-Transistoren .....	92
2.8	Abschaltbare Thyristoren .....	95
2.8.1	Gate-Turn-Off-Thyristor (GTO) .....	95
2.8.2	Integrated-Gate-Commutated-Thyristor (IGCT) .....	96
2.9	Schutz von Leistungshalbleitern .....	96
2.9.1	Spannungsbelastbarkeit .....	97
2.9.2	Überspannungsschutz .....	98
2.9.3	Schutz gegen Überstrom und Kurzschluss .....	103
2.9.4	Ein- und Ausschaltentlastung bei Transistoren .....	104
2.10	Erwärmung und Kühlung von Leistungshalbleitern .....	107
2.10.1	Durchlassverluste bei Thyristoren und Dioden .....	108
2.10.2	Verluste bei Transistoren .....	110
2.10.2.1	Durchlassverluste .....	110
2.10.2.2	Schaltverluste .....	112
2.10.3	Wärmetransport und Auslegung der Kühlung .....	113
2.11	Datenblattangaben für Dioden und Transistoren .....	119
2.11.1	Verwendete Kurzzeichen und Indizes in Datenblättern .....	119
2.11.2	Angabe von Kenndaten und Grenzwerten .....	121
2.11.3	Gleichrichterioden .....	122
2.11.3.1	Grenzwerte (Absolute maximum ratings) .....	122
2.11.3.2	Kenndaten (Characteristics) .....	124
2.11.4	Thyristoren .....	125
2.11.4.1	Grenzwerte .....	126
2.11.4.2	Kenndaten .....	126
2.11.5	Transistormodule .....	128
2.11.5.1	Grenzwerte für Transistor-Module .....	129
2.11.5.2	Kenndaten .....	130
2.12	Lösungen .....	134
<b>3</b>	<b>Stromrichterschaltungen mit Dioden und Thyristoren .....</b>	<b>139</b>
3.1	Einpuls-Gleichrichter M1 .....	139
3.1.1	Aufbau der Schaltung .....	139
3.1.2	Funktionsweise der ungesteuerten M1U-Schaltung .....	140
3.1.3	Funktionsweise der gesteuerten M1C-Schaltung .....	142
3.2	Zweiphasige Mittelpunktschaltung M2 .....	145
3.2.1	Aufbau und Funktionsweise .....	145
3.2.2	Stromglättung .....	149
3.2.3	Steuergesetz im nicht lückenden Betrieb .....	153

3.3	Dreiphasige Mittelpunktschaltung M3 .....	154
3.3.1	M3-Schaltung bei ohmscher Last .....	154
3.3.1.1	Steuergesetz im nicht lückenden Betrieb .....	160
3.3.1.2	Steuergesetz im Lückbetrieb .....	161
3.3.2	M3-Schaltung bei idealer Glättung .....	162
3.3.3	Glättungsdrossel .....	166
3.3.4	Wechselrichterbetrieb .....	168
3.3.5	Auswirkung und Berechnung der Kommutierung .....	170
3.3.5.1	Kommutierung bei netzgeführten Stromrichtern .....	170
3.3.5.2	Auswirkung der Überlappung .....	174
3.3.5.3	Wechselrichtergrenze .....	177
3.3.5.4	Gleichspannungsersatzschaltbild für Mittelwerte .....	178
3.3.6	Mittelpunktschaltungen mit verbundenen Anoden .....	180
3.3.7	Netzströme und Transformatorbauleistung .....	182
3.4	Brückenschaltungen netzgeführter Stromrichter .....	184
3.4.1	Vollgesteuerte Drehstrombrückenschaltung B6C .....	185
3.4.2	Brückenschaltung B2C .....	189
3.5	Umkehrstromrichter .....	192
3.6	Lösungen .....	195

**4 Gleichstromsteller ..... 203**

4.1	Einführung .....	203
4.2	Tiefsetzsteller .....	206
4.2.1	Grundschialtung .....	206
4.2.2	Realer Tiefsetzsteller .....	208
4.2.3	Dimensionierung des LC-Filters .....	209
4.2.4	Stromwelligkeit .....	210
4.2.5	Betrieb mit lückendem Strom .....	214
4.3	Hochsetzsteller .....	219
4.3.1	Grundlegende Arbeitsweise .....	219
4.3.2	Betrieb mit lückendem Strom .....	223
4.4	Mehrquadrantensteller .....	224
4.4.1	Zweiquadrantensteller mit Stromumkehr .....	225
4.4.2	Zweiquadrantensteller mit Spannungsumkehr .....	227
4.5	Vollbrücke .....	233
4.5.1	Allgemeine Einführung .....	234
4.5.2	Pulsweitenmodulation .....	237
4.5.2.1	Pulsweitenmodulation mit zwei Spannungsniveaus (PWM2) .....	238
4.5.2.2	PWM mit drei Spannungsniveaus (PWM3) .....	241
4.6	Ansteuerschaltungen für MOS-Transistoren .....	251
4.6.1	Grundlagen .....	251
4.6.2	CMOS-Gatter .....	253
4.6.3	Gegentaktstufe .....	254
4.6.4	Beschleunigtes Abschalten .....	254
4.6.5	Treiber-ICs .....	255
4.6.6	Potenzialfreie Ansteuerung mit Impulsübertrager .....	256
4.7	Lösungen .....	260

<b>5</b>	<b>Umrichter mit Gleichspannungs-Zwischenkreis .....</b>	<b>272</b>
5.1	Einführung .....	272
5.2	Einphasige spannungseinprägende Wechselrichter .....	275
5.2.1	Halbbrücke mit Grundfrequenztaktung .....	275
5.2.2	Vierquadrantensteller mit Grundfrequenztaktung .....	278
5.2.3	Steuerverfahren zur Verstellung von Frequenz und Amplitude .	281
5.2.3.1	Pulsamplitudenmodulation .....	281
5.2.3.2	Vierquadrantensteller mit Unterschwingungsverfahren .....	281
5.2.4	Anwendungen .....	293
5.3	Dreiphasiger spannungseinprägender Wechselrichter .....	293
5.3.1	Grundlegender Aufbau und Steuerverfahren .....	293
5.3.1.1	Grundfrequenztaktung .....	294
5.3.1.2	Unterschwingungsverfahren .....	302
5.3.1.3	Raumzeigermodulation .....	309
5.3.1.4	Weitere Steuerverfahren .....	316
5.3.1.5	Flattop-Verfahren .....	318
5.3.2	Ergänzende Komponenten .....	319
5.4	Einsatzgebiete und Anwendungen .....	320
5.4.1	Elektronische Antriebstechnik .....	321
5.4.2	Netzeinspeisung regenerativ erzeugter Energien .....	322
5.4.3	Aktive Gleichrichter .....	323
5.4.3.1	Einführung .....	323
5.4.3.2	Netzanschluss und Ersatzschaltbilder .....	326
5.4.3.3	Raumzeiger und Koordinatensysteme .....	328
5.4.3.4	Regelung des aktiven Gleichrichters .....	334
5.5	Lösungen .....	341
<b>6</b>	<b>Mehrpunkt-Wechselrichter .....</b>	<b>347</b>
6.1	Grundlagen und Schaltungsvarianten .....	347
6.2	Dreipunkt-Wechselrichter .....	351
6.2.1	Einphasiger Dreipunkt-Halbbrücken-Wechselrichter .....	352
6.2.1.1	Pulsweitenmodulation der Dreipunkt-Halbbrücke .....	356
6.2.1.2	Steuergesetz und Ausgangsspannung .....	360
6.2.1.3	Spannungs- und Stromverläufe bei der PWM .....	360
6.2.1.4	Bedeutung der Klemmdioden .....	361
6.2.2	Dreiphasiger Dreipunkt-Wechselrichter .....	362
6.2.2.1	Schaltzustände und Ausgangsspannungen .....	363
6.2.2.2	Spannungsraumzeiger .....	367
6.2.2.3	Modulationsverfahren und Steuergesetz .....	371
6.2.2.4	Auswirkung von Verriegelungszeiten auf die Ausgangsspannung .....	372
6.3	Lösungen .....	376

<b>7</b>	<b>Resonantes Schalten .....</b>	<b>381</b>
	7.1 Motivation .....	381
	7.2 Grundlegende Analyse von LC-Kreisen .....	384
	7.3 Grundstrukturen für weiches Schalten .....	393
	7.4 Tiefsetzsteller mit ZCS .....	397
	7.5 Tiefsetzsteller mit ZVS .....	404
	7.6 Lösungen .....	408
<b>A1</b>	<b>Fachbegriffe Deutsch-Englisch/Englisch-Deutsch .....</b>	<b>411</b>
<b>A2</b>	<b>Formelzeichen und Abkürzungen .....</b>	<b>418</b>
<b>A3</b>	<b>Glossar .....</b>	<b>422</b>
	<b>Literatur .....</b>	<b>425</b>
	<b>Index .....</b>	<b>429</b>



# 1

## Einführung in die Leistungselektronik

### ■ 1.1 Grundlagen

#### Lernziele

Die Lernenden ...

- unterscheiden die Begriffe schalten, steuern, umrichten, gleichrichten,
- begründen die Vorteile des Schaltbetriebs,
- kennen die unterschiedlichen Einsatzgebiete der Leistungselektronik.

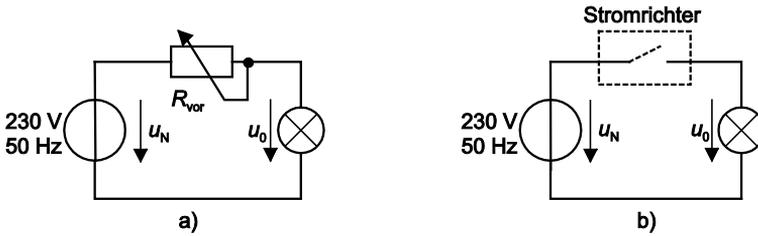
Die Leistungselektronik ist ein wesentliches Teilgebiet der Automatisierungstechnik. Zudem findet man sie in vielen anderen Bereichen des täglichen Lebens. Moderne Traktionsanwendungen (U-Bahnen, Straßenbahnen, ICE), einfache drehzahlregelbare elektrische Bohrmaschinen, Computernetzteile oder der Dimmer zur Helligkeitssteuerung von Glühlampen basieren auf leistungselektronischen Schaltungen. Zunehmend mehr Haushaltsgeräte (Waschmaschinen, Kühlschränke, Geschirrspüler) werden zur Verbesserung ihres Wirkungsgrades mit Motoren ausgestattet, deren Drehzahl über Stromrichter energieeffizient gesteuert werden kann.

Gegenwärtig beträgt der Anteil der elektrischen Energie am Gesamtenergieverbrauch etwa 40%, wird aber bis 2040 auf 60% anwachsen. Gleichzeitig wird der Anteil der elektrischen Energie, die über leistungselektronische Schaltungen gesteuert wird, von 40% im Jahr 2000 auf 80% im Jahr 2015 ansteigen. Damit entwickelt sich die Leistungselektronik zu einer der Schlüsseltechnologien der kommenden Jahre.

Leistungselektronische Schaltungen werden eingesetzt, um möglichst verlustarm elektrische Energie einer Spannungsebene in elektrische Energie mit einer anderen Spannung umzuwandeln.

Am Beispiel der Helligkeitssteuerung einer Glühlampe wird dies deutlich: Sie leuchtet umso heller, je größer der Strom ist, der durch den Glühdraht fließt. Um die Höhe des Stromes und damit die Leuchtstärke der Lampe zu beeinflussen, muss die Spannung, mit der die Lampe versorgt wird, geändert werden können.

Bild 1.1 zeigt dafür prinzipiell verschiedene Möglichkeiten auf. Im Teilbild a) wird ein einstellbarer Vorwiderstand verwendet. Je nach Stellung des Schleifers fällt am Vorwiderstand ein mehr oder weniger großer Teil der Netzspannung ab. Die Spannung  $u_0$  an der Lampe ist um diesen Betrag kleiner als die Netzspannung. Somit kann durch Verändern der Schleiferstellung die Größe der Spannung  $u_0$  gesteuert werden.



**Bild 1.1** Helligkeitssteuerung einer Glühlampe a) mit Vorwiderstand b) mit Schaltbetrieb (Dimmer)

$$u_0 = \frac{R_{\text{Glühlampe}}}{R_{\text{Vor}} + R_{\text{Glühlampe}}} \cdot u_N$$

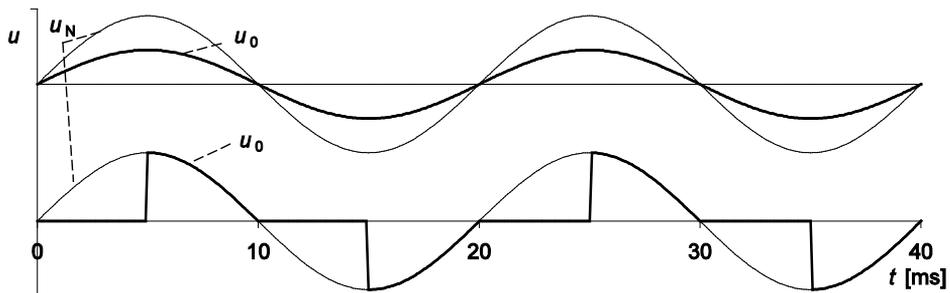
Unabhängig von der Stellung des Schleifers fließt hierbei immer Strom durch Lampe und Vorwiderstand. Diese Art der Helligkeitssteuerung ist nicht optimal, weil der Spannungsabfall am Vorwiderstand in Verbindung mit dem fließenden Strom in Wärme umgesetzt wird und somit Energie nutzlos verloren geht.

In Bild 1.1 b) wird statt des Vorwiderstandes als einfachste Variante eines Stromrichters ein elektronischer Schalter verwendet. Ist der Schalter geschlossen, so liegt die Netzspannung an der Lampe. Ist der Schalter geöffnet, dann ist die Spannung an der Lampe null und es fließt kein Strom. Diese Betriebsart heißt Schaltbetrieb.

$$\text{Schalter ein: } u_0 = u_N \quad \text{Schalter aus: } u_0 = 0$$

Die grundlegenden Unterschiede zwischen beiden Betriebsarten werden in den Zeitverläufen in Bild 1.2 deutlich. Ist der Widerstandswert des Vorwiderstandes gleich dem der Lampe, so erhält man für  $u_0(t)$  den oberen Zeitverlauf. Wird der Schalter 5 ms nach jedem Nulldurchgang der Netzspannung bis zum nächsten Spannungsnulldurchgang geschlossen und danach wieder geöffnet, ergibt sich für die Spannung  $u_0(t)$  an der Lampe der unten dargestellte Zeitverlauf.

Beide Zeitverläufe führen zu unterschiedlichen Helligkeiten der Lampe im Vergleich zum Betrieb mit voller Netzspannung. Anstatt mit Vorwiderstand kann die Helligkeit beim Schaltbetrieb ebenso durch Verändern der Einschaltdauer des Schalters relativ zur Periodendauer der Netzspannung gesteuert werden.



**Bild 1.2** Zeitverläufe von  $u_0(t)$ : oben mit Vorwiderstand; unten mit Schaltbetrieb

Dadurch fließt beim Schaltbetrieb aber nur zeitweise Strom; der Vorwiderstand und die damit verbundenen Verluste entfallen. An diesem einfachen Beispiel wird bereits deutlich, wie wichtig der Schaltbetrieb für die Leistungselektronik ist. Auch wenn der Schalter zunächst idealisierend als verlustfrei angesehen wird, erhält man als qualitatives Ergebnis dieser einführenden Betrachtung:



Durch den *Schaltbetrieb* (switching mode) bleiben die Verluste in Stromrichtern gering. Die erreichbaren Wirkungsgrade sind sehr hoch.

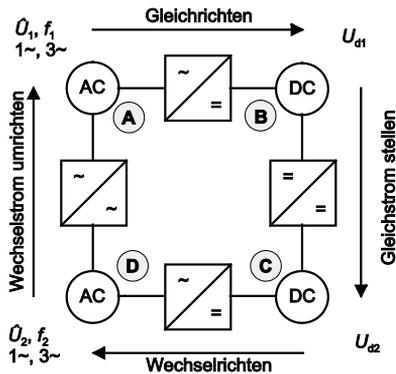


Bild 1.3 Anwendungsgebiete der Leistungselektronik

Bild 1.3 fasst die Anwendungsgebiete der Leistungselektronik zusammen. Neben der Amplitudenverstellung von Gleich-, Wechsel- oder Drehspannungen (Stellen) ermöglicht sie auch die Umwandlung von Wechsel- oder Drehspannung in Gleichspannung (Gleichrichten) und die Erzeugung von Wechsel- oder Drehspannungen mit variabler Frequenz und Amplitude aus Gleichspannungen (Wechselrichten). Des Weiteren kann eine Wechsel- oder Drehspannung einer Amplitude und Frequenz in eine Wechsel- oder Drehspannung anderer Amplitude und anderer Frequenz gewandelt werden (Umrichten). Dazu werden unterschiedliche Schaltungen eingesetzt.

## 1.2 Eigenschaften des Schaltbetriebs

### Lernziele

Die Lernenden ...

- kennen die Unterschiede zwischen Mittel- und Effektivwert,
- berechnen Mittel- und Effektivwerte von Strömen und Spannungen für Zeitverläufe, die für die Leistungselektronik charakteristisch sind,
- berechnen Kenngrößen (Welligkeit, Klirrfaktor) von Schaltungen.

### 1.2.1 Gleich-, Wechsel-, Mischgrößen

Die Gemeinsamkeit aller Schaltungen der Leistungselektronik ist der Schaltbetrieb. Daraus resultiert, dass sich Spannungs- und Stromverläufe, die das Schaltungsverhalten beschreiben, aus Teilabschnitten mit teilweise sprungförmigen Übergängen zusammensetzen. Man erkennt dies am Zeitverlauf von  $u_o(t)$  in Bild 1.2 unten.

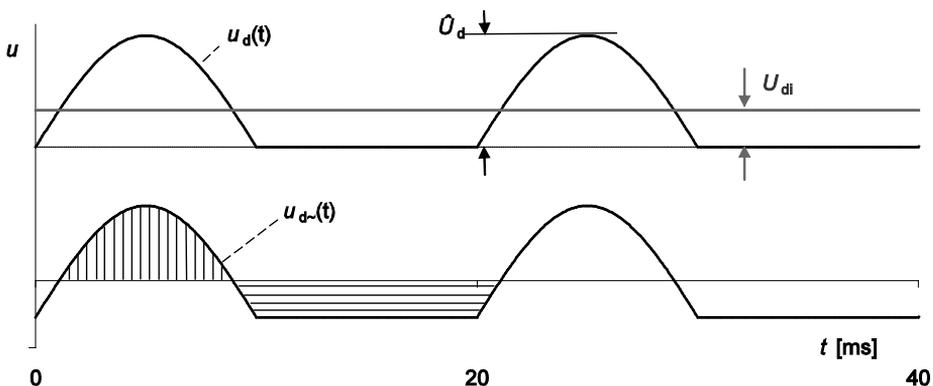
Der Prozess besteht hier aus zwei Teilen der sinusförmigen Netzspannung für  $5 \text{ ms} < t < 10 \text{ ms}$  und  $15 \text{ ms} < t < 20 \text{ ms}$  sowie null während der restlichen Zeit und ist eine reine Wechselgröße. Typische Zeitverläufe bei anderen Schaltungen der Leistungselektronik können sich aus reinen Gleich- oder reinen Wechselgrößen oder Kombinationen von beiden zusammensetzen. Besteht ein Zeitverlauf aus Gleich- und Wechselanteilen, spricht man von einer Mischgröße.

Bild 1.4 zeigt den Verlauf einer solchen Mischspannung  $u_d(t)$ . Sie besteht nur aus den positiven Halbwellen einer sinusförmigen Spannung und hat daher einen positiven Mittelwert. Dieser arithmetische Mittelwert  $U_d$  der Spannung  $u_d(t)$  wird auch Gleichanteil genannt. Er entspricht dem Flächeninhalt zwischen dem Zeitverlauf  $u_d(t)$  und der Zeitachse  $t$ , wobei Flächen oberhalb der Zeitachse positiv und Flächen unterhalb der Zeitachse negativ gezählt werden. Dieser Flächeninhalt wird auch als Spannungs-Zeit-Fläche bezeichnet.

Subtrahiert man den Mittelwert  $U_d$  vom Zeitverlauf  $u_d(t)$ , so ergibt sich der Wechselanteil  $u_{d-}(t)$  der Mischgröße. Dieser Wechselanteil zeichnet sich dadurch aus, dass positive und negative Spannungs-Zeit-Flächen gleich groß sind. Insgesamt kann man sich vorstellen, dass eine Mischgröße aus der Addition eines reinen Wechselanteils zu einem Gleichanteil entsteht.

$$u_d(t) = U_d + u_{d-}(t) \quad (1.1)$$

Die Zeitverläufe, um die es in der Leistungselektronik geht, können Gleich-, Wechsel- oder Mischgrößen sein, die ihrerseits Mittelwert, Effektivwert und Scheitelwert haben. Um den Überblick zu behalten, werden alle zeitlich veränderlichen Größen ( $u_d(t)$ ,  $u_{d-}(t)$  in Bild 1.4) mit Kleinbuchstaben bezeichnet. Größen, die nicht zeitabhängig sind (Scheitelwert  $\hat{U}_d$ , Mittelwert  $U_d$  in Bild 1.4), erhalten Großbuchstaben.



**Bild 1.4** Zeitverlauf einer Mischspannung, oben: Mischspannung  $u_d(t)$ , arithmetischer Mittelwert  $U_d$ ; unten: Wechselanteil  $u_{d-}(t)$

Zur Beschreibung von Mischgrößen wird in der Leistungselektronik eine ganze Reihe unterschiedlicher Begriffe verwendet. Die wichtigsten werden in den folgenden Abschnitten erläutert.

## 1.2.2 Arithmetischer Mittelwert

Der arithmetische Mittelwert eines Zeitverlaufs wird auch Gleichanteil genannt. Um ihn zu berechnen, muss die Spannungs-Zeit-Fläche – also der Flächeninhalt zwischen dem Zeitverlauf der Spannung und der Zeitachse – bestimmt werden.

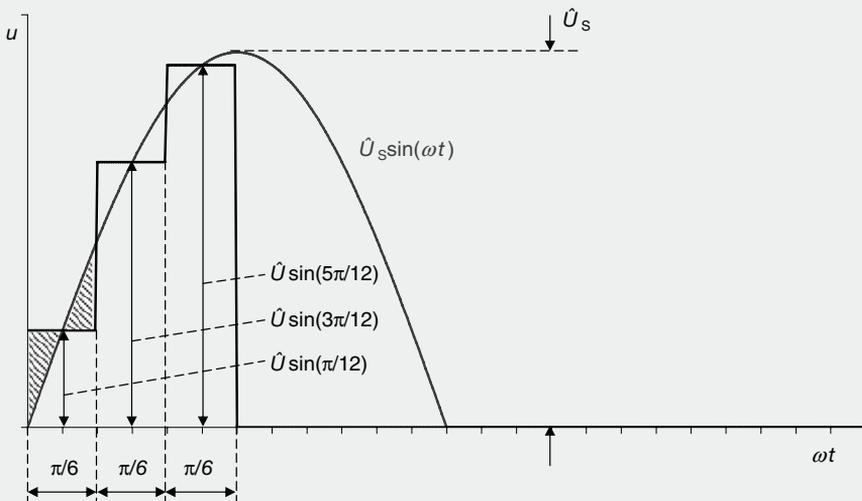
### Näherungsweise Berechnung

Zunächst wird an einem Beispiel eine überschlägige Berechnung vorgenommen und anschließend auf die exakte mathematische Darstellung erweitert [Felderhoff06].



#### Beispiel 1.1 Berechnung der Spannungs-Zeit-Fläche einer Sinushalbwellen

Zur überschlägigen Berechnung wird die Sinushalbwellen nach Bild 1.5 durch eine Treppenfunktion angenähert. Die Gesamtfläche ergibt sich durch die Summation der einzelnen Flächeninhalte der Treppenstufen. Aufgrund der Symmetrie der Halbwellen zu  $\pi/2$  genügt es, die Treppenstufen der ersten Viertelperiode zu summieren und das Ergebnis zu verdoppeln.



**Bild 1.5** Mittelwertberechnung durch Treppenfunktion

Im Beispiel wird die Näherung durch drei Rechtecke vorgenommen. Jedes von ihnen hat die Breite  $\pi/6$ . Die Höhe ergibt sich aus dem Wert der Sinushalbwellen genau in der Mitte des jeweiligen Rechtecks. Für die drei eingezeichneten Rechtecke betragen die Höhen  $\hat{U}\sin(\pi/12)$ ,  $\hat{U}\sin(3\pi/12)$  sowie  $\hat{U}\sin(5\pi/12)$ . Der Flä-

cheninhalt  $F/2$  der Viertelperiode entspricht näherungsweise der Summe der drei Rechteckflächen und ergibt sich zu

$$\frac{F}{2} = \left[ \frac{\pi}{6} \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) + \frac{\pi}{6} \sin\left(\frac{3 \cdot \pi}{12}\right) + \frac{\pi}{6} \sin\left(\frac{5 \cdot \pi}{12}\right) \right] \cdot \hat{U}_s$$

$$F = 2 \cdot \left[ \frac{\pi}{6} \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) + \frac{\pi}{6} \sin\left(\frac{3 \cdot \pi}{12}\right) + \frac{\pi}{6} \sin\left(\frac{5 \cdot \pi}{12}\right) \right] \cdot \hat{U}_s$$

Der Flächeninhalt der Halbperiode ist doppelt so groß wie der der Viertelperiode. Dividiert man den Flächeninhalt  $F$  durch die Periodendauer  $2\pi$ , so erhält man den überschlägigen arithmetischen Mittelwert. Je kleiner die Breite der Treppenstufen, umso genauer wird die Annäherung der Überschlagsrechnung.

$$U_d = \frac{F}{2\pi} = \frac{2 \cdot \left[ \frac{\pi}{6} \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) + \frac{\pi}{6} \sin\left(\frac{3 \cdot \pi}{12}\right) + \frac{\pi}{6} \sin\left(\frac{5 \cdot \pi}{12}\right) \right] \cdot \hat{U}_s}{2\pi} = 0.321 \cdot \hat{U}_s$$

Anhand der schraffierten Dreiecke in Bild 1.5 wird das Prinzip der Näherung deutlich. Werden die Rechtecke ausreichend schmal, so sind die Flächeninhalte der beiden schraffierten Dreiecke etwa gleich groß. Damit entspricht die Summe der Rechteckflächen näherungsweise der Fläche unter der Sinushalbwellen.

### Mathematisch exakte Berechnung

Wesentlich genauer und mathematisch exakt geschieht die Bestimmung des Mittelwertes durch das bestimmte Integral nach Gl. (1.2).

$$U_d = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T \hat{U}_s \cdot \sin \omega t \cdot dt = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \hat{U}_s \cdot \sin \omega t \cdot d\omega t \quad (1.2)$$

Angewendet auf Beispiel 1.1 der pulsierenden Gleichspannung ergibt sich für deren arithmetischen Mittelwert folgende exakte Lösung:

$$U_d = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{\pi} \hat{U}_s \cdot \sin \omega t \cdot d\omega t + \int_{\pi}^{2\pi} 0 \cdot d\omega t = \frac{\hat{U}_s}{2\pi} \cdot [-\cos \omega t]_0^{\pi} = \frac{\hat{U}_s}{2\pi} \cdot [ -(-1) - (-1) ] = \frac{\hat{U}_s}{\pi}$$

$$U_d = 0.318 \cdot \hat{U}_s$$

Die Abweichung zwischen der exakten Lösung und dem Ergebnis aus Beispiel 1.1 ist vergleichsweise gering.



Der *arithmetische Mittelwert* (arithmetic mean value, arithmetic average value) eines Zeitverlaufs ist der in ihm enthaltene Gleichanteil. Mathematisch entspricht er dem Flächeninhalt der Kurve bezogen auf die Zeitachse.

Allgemein wird der arithmetische Mittelwert mit Großbuchstaben bezeichnet. In Halbleiterdatenblättern verwendet man den Index AV (Average Value) für Mittelwerte. Das wird auch in diesem Buch so gehandhabt.

### 1.2.3 Effektivwert

Aufgrund des ohmschen Gesetzes hängt bei linearen Stromkreisen die umgesetzte Leistung quadratisch von Strom oder Spannung ab.

$$p = \frac{u^2}{R} \qquad p = i^2 \cdot R$$



Sind Strom und Spannung keine Gleichgrößen, sondern periodische zeitabhängige Größen, so muss zur Leistungsberechnung der quadratische Mittelwert verwendet werden. Dieser heißt *Effektivwert* und wird im Englischen Root Mean Square genannt.

Mathematisch ergibt sich der Effektivwert als Mittelwert des quadrierten Zeitverlaufs.

$$U_{\text{RMS}} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T u^2(t) \cdot dt} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} u^2(\omega t) \cdot d\omega t} \quad (1.3)$$

Effektivwerte werden u. a. benötigt, um die Wärmebelastung von Halbleitern und die Ausgangsleistung von Wechselrichtern zu berechnen sowie Transformatoren auszulegen.

Im Deutschen dient der Index „eff“ zur Kennzeichnung von Effektivwerten. Halbleiterdatenblätter sind üblicherweise in Englisch verfasst. Dort wird der Begriff Root Mean Square als Bezeichnung für den Effektivwert benutzt. Daher lautet die Indexbezeichnung für Effektivwertangaben in Datenblättern meist RMS. Die Bezeichnung RMS für den Effektivwert wird auch in diesem Buch gebraucht.



#### Beispiel 1.2 Angabe der Strombelastbarkeit

Zur Beschreibung der Strombelastbarkeit gibt man im Datenblatt den maximalen Effektivwert  $I_{\text{TRMSM}}$  des Bauelementstroms an. Die Indizes haben folgende Bedeutung:

- T: Bauelementtyp, beispielsweise Thyristor
- RMS: Root Mean Square (quadratischer Mittelwert)
- M: maximal

$I_{\text{TRMSM}}$  bezeichnet demnach den maximal zulässigen Effektivwert, mit dem der Thyristor belastet werden darf.



### Beispiel 1.3 Effektivwert einer sinusförmigen Spannung

Es soll der Effektivwert des Zeitverlaufs  $\hat{U}\sin(\omega t)$  aus Bild 1.6 berechnet werden.

#### Lösung:

Zunächst muss der Zeitverlauf  $u(\omega t)$  quadriert werden.

$$u(\omega t) = \hat{U} \cdot \sin \omega t \Rightarrow u^2(\omega t) = (\hat{U} \cdot \sin \omega t)^2 = \hat{U}^2 \cdot \sin^2 \omega t$$

Anschließend wird der quadrierte Zeitverlauf nach Gl. (1.3) integriert.

$$U_{\text{RMS}} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} (\hat{U} \cdot \sin \omega t)^2 \cdot d\omega t} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \hat{U}^2 \cdot \sin^2 \omega t \cdot d\omega t}$$

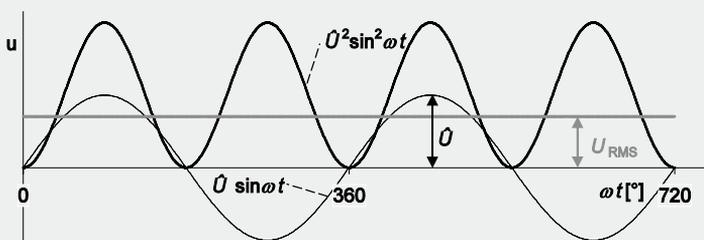
Am einfachsten entnimmt man die Lösung der Integration einer mathematischen Tabelle.

$$U_{\text{RMS}} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \cdot \hat{U}^2 \cdot \left[ -\frac{1}{2} \sin(\omega t) \cdot \cos(\omega t) + \frac{\omega t}{2} \right]_0^{2\pi}}$$

Setzt man die Integrationsgrenzen ein, so ergibt sich der bekannte Zusammenhang zwischen Scheitel- und Effektivwert bei sinusförmigen Größen.

$$U_{\text{RMS}} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \cdot \hat{U}^2 \cdot \left[ \left( -\frac{1}{2} \sin(2\pi) \cdot \cos(2\pi) + \frac{2\pi}{2} \right) - \left( -\frac{1}{2} \sin(0) \cdot \cos(0) + \frac{0}{2} \right) \right]}$$

$$U_{\text{RMS}} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \cdot \hat{U}^2 \cdot \left[ 0 + \frac{2\pi}{2} - (0) + \frac{0}{2} \right]} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \cdot \hat{U}^2 \cdot \frac{2\pi}{2}} = \sqrt{\frac{\hat{U}^2}{2}} = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}}$$



**Bild 1.6** Sinusförmige Spannung  $\hat{U}\sin\omega t$ , quadrierte sinusförmige Spannung  $\hat{U}^2\sin^2(\omega t)$  und Effektivwert  $U_{\text{RMS}}$  für  $\hat{U} = 2 \text{ V}$



### Übung 1.1

Berechnen Sie den Effektivwert der sinusförmigen Halbwellen in Bild 1.7.

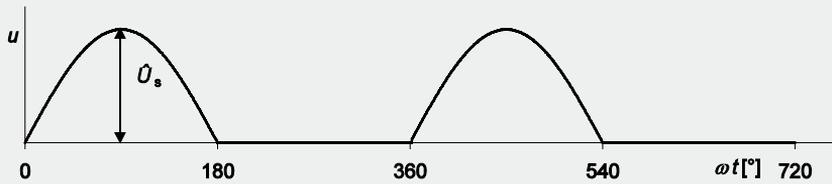


Bild 1.7 Zeitverlauf zur Übung 1.1



### Übung 1.2

Berechnen Sie Effektivwert und Mittelwert der angeschnittenen sinusförmigen Halbwellen in Bild 1.8 in Abhängigkeit vom Winkel  $\alpha$ .



Verwenden Sie zur Lösung das Applet „Charakteristische Zeitverläufe“.

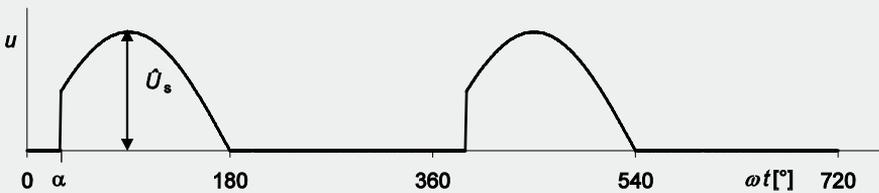


Bild 1.8 Zeitverlauf zur Übung 1.2



### Übung 1.3

Berechnen Sie den Effektivwert und Mittelwert der sinusförmigen Halbwellen in Bild 1.9.

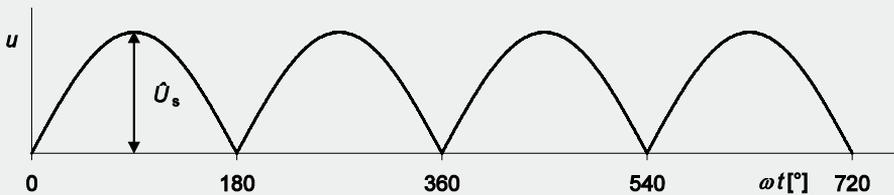


Bild 1.9 Zeitverlauf zur Übung 1.3



### Übung 1.4

Berechnen Sie Effektivwert und Mittelwert der sinusförmigen Halbwellen in Bild 1.10 in Abhängigkeit vom Winkel  $\alpha$ .



Verwenden Sie zur Lösung das Applet „Charakteristische Zeitverläufe“.

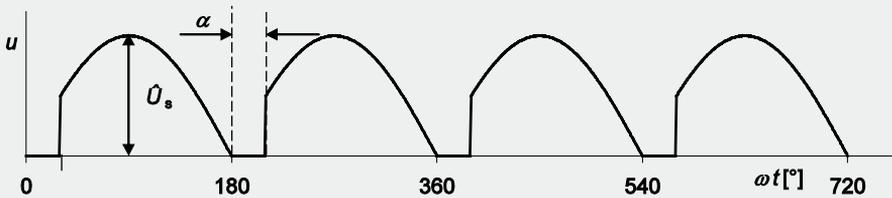


Bild 1.10 Zeitverlauf zur Übung 1.4



### Übung 1.5

Berechnen Sie den Effektivwert des Stromverlaufs aus Bild 1.11 in Abhängigkeit von  $\tau$ ,  $T$  und  $I_d$ .



Kontrollieren Sie Ihre Lösung mit dem Applet „Charakteristische Zeitverläufe“.

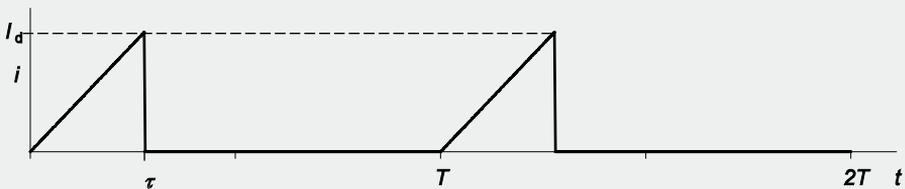


Bild 1.11 Zeitverlauf zur Übung 1.5

## 1.2.4 Gesamteffektivwert, Klirrfaktor, Formfaktor und Welligkeit

Ausgehend von Mittelwert und Effektivwert sind weitere Begriffe üblich, um Mischgrößen zu beschreiben.

### Gesamteffektivwert

Nach Gl. (1.1) kann eine Mischspannung als Addition von Gleich- und Wechselanteil aufgefasst werden. Der Gesamteffektivwert der Mischgröße setzt sich daher zusammen aus dem quadratischen Mittelwert des Gleichanteils  $U_d$  und dem Effektivwert des Wechselanteils  $U_{\text{RMS,-}}$ . Somit gilt:

$$U_{\text{RMS,ges}}^2 = U_d^2 + U_{\text{RMS,-}}^2 \quad \Rightarrow \quad U_{\text{RMS,ges}} = \sqrt{U_d^2 + U_{\text{RMS,-}}^2} \quad (1.4)$$



Der *Gesamteffektivwert* einer Mischgröße ergibt sich aus der geometrischen Summe der Einzeleffektivwerte.

### Welligkeit

Bei Gleichrichtern ist von Interesse, wie viel Wechselspannungsanteile in der gleichgerichteten Spannung enthalten sind.



Bezieht man den Effektivwert des Wechselanteils (ripple content) auf den Gleichanteil (DC component), so bekommt man ein Maß für den prozentualen Wechselspannungsgehalt der Mischgröße. Dieses Maß wird als *Welligkeit* (ripple) bezeichnet und kann für Spannungen und Ströme gleichermaßen verwendet werden.

$$w_u = \frac{U_{\text{RMS,-}}}{U_d} = \sqrt{\frac{U_{\text{RMS,ges}}^2 - U_d^2}{U_d^2}} = \sqrt{\frac{U_{\text{RMS,ges}}^2}{U_d^2} - 1} \quad (1.5)$$

$$w_i = \frac{I_{\text{RMS,-}}}{I_d} = \sqrt{\frac{I_{\text{RMS,ges}}^2}{I_d^2} - 1}$$

Für reine Gleichgrößen wird  $w = 0$ . Reine Wechselgrößen zeichnen sich dadurch aus, dass kein Gleichanteil vorhanden ist und  $w$  sehr groß wird.

### Klirrfaktor

Leistungselektronische Schaltungen ermöglichen auch die Umwandlung von Gleich- in Wechselspannungen. Bei dieser Umwandlung entstehen allerdings neben der Wechselspannung mit der gewünschten Frequenz zusätzliche Spannungskomponenten mit anderen Frequenzen. Diese werden als Oberschwingungen bezeichnet und sind unerwünscht. Um die Güte eines solchen Wechselrichters zu beurteilen, wird der Begriff Klirrfaktor ( $K$ ) verwendet. Er bezeichnet das prozentuale Verhältnis zwischen dem Effektivwert aller Oberschwingungen und dem Gesamteffektivwert. Ebenso wie die Welligkeit kann er für Spannungen und Ströme angegeben werden. Die englische Bezeichnung lautet Total Harmonic Distortion (*THD*), verwendet aber als Bezugsgröße den Effektivwert der Grundschwingung. Der Index  $u$  wird für Spannungen, der Index  $i$  für Ströme verwendet.

$$K_u = \frac{U_{\text{RMS,OS}}}{U_{\text{RMS}}} \quad K_i = \frac{I_{\text{RMS,OS}}}{I_{\text{RMS}}}$$

$$THD_u = \frac{U_{\text{RMS,OS}}}{U_{\text{RMS,1}}} \quad THD_i = \frac{I_{\text{RMS,OS}}}{I_{\text{RMS,1}}}$$

### Formfaktor

Unter dem Formfaktor  $F$  versteht man das Verhältnis zwischen dem Gesamteffektivwert einer elektrischen Größe und ihrem arithmetischen Mittelwert.

$$F = \frac{U_{d,RMS}}{U_d}$$

### 1.2.5 Überschlägige Berechnung bei einfachen Kurvenverläufen

Bei Zeitverläufen, die während einer Periode lediglich zwei diskrete Werte annehmen, können sowohl Mittelwert als auch Effektivwert auch ohne aufwändige Integralrechnung angegeben werden.

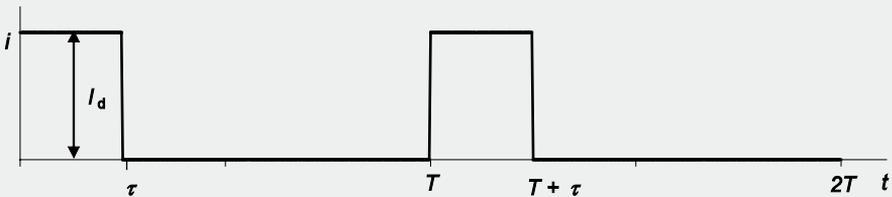


#### Beispiel 1.4 Berechnung von Mittel- und Effektivwert

Berechnen Sie Mittelwert und Effektivwert des rechteckigen Stromverlaufs in Bild 1.12.



Verwenden Sie zur Lösung das Applet „Charakteristische Zeitverläufe“.



**Bild 1.12** Zeitverlauf zum Beispiel 1.4

#### Lösung:

Der Mittelwert des Stromverlaufs ergibt sich zu

$$I_{d,AV} = \frac{1}{T} \cdot \left( \int_0^{\tau} I_d \cdot dt + \int_{\tau}^T 0 \cdot dt \right) = \frac{I_d}{T} [t]_0^{\tau} = \frac{I_d}{T} \tau$$

Definiert man das Tastverhältnis  $D = \tau / T$ , so erhält man

$$I_{d,AV} = D \cdot I_d$$

Allgemein berechnet man den Effektivwert des Stromverlaufs mit Gl. (1.3). Setzt man auch hier wieder den Tastgrad  $D$  ein, so ergibt sich

$$I_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \left( \int_0^{\tau} I_d^2 \cdot dt + \int_{\tau}^T 0 \cdot dt \right)} = \sqrt{\frac{I_d^2}{T} \cdot [t]_0^{\tau}} = I_d \cdot \sqrt{\frac{\tau}{T}} = I_d \cdot \sqrt{D}$$

Diese Ergebnisse können verallgemeinert werden. Ist  $a(t)$  ein Zeitverlauf, der während  $t < \tau$  den Wert  $A$  und während der restlichen Zeit der Periode  $T$  den Wert  $0$  annimmt, so beträgt dessen Mittelwert  $A_{AV}$

$$A_{AV} = \frac{\tau}{T} \cdot A = D \cdot A$$

Für den Effektivwert  $A_{RMS}$  des Zeitverlaufs gilt dagegen:

$$A_{RMS} = \sqrt{\frac{\tau}{T}} \cdot A = \sqrt{D} \cdot A$$

In manchen Fällen kann man den zu untersuchenden Zeitverlauf in Teilverläufe zerlegen. Dies lohnt immer dann, wenn Mittel- und Effektivwerte dieser Teilverläufe einfach berechnet werden können.



### Beispiel 1.5 Mittel- und Effektivwert des Stromverlaufs in Bild 1.13

Für den gegebenen Zeitverlauf sind in Abhängigkeit von  $\tau$ ,  $T$  und  $I_d$  der Mittelwert und der Effektivwert anzugeben.



Kontrollieren Sie Ihre Lösung mit dem Applet „Charakteristische Zeitverläufe“.

#### Lösung:

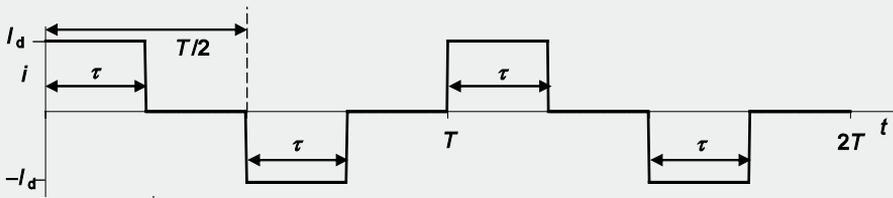
Es handelt sich um einen reinen Wechselstrom. Daher ist der Mittelwert gleich null. Der Effektivwert beträgt:

$$I_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \left( \int_0^{\tau} I_d^2 dt + \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2} + \tau} I_d^2 dt \right)} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \left( [I_d^2 \cdot t]_0^{\tau} + [I_d^2 \cdot t]_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2} + \tau} \right)}$$

$$I_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \left[ (I_d^2 \cdot \tau - I_d^2 \cdot 0) + (I_d^2 \cdot (\frac{T}{2} + \tau) - I_d^2 \cdot \frac{T}{2}) \right]}$$

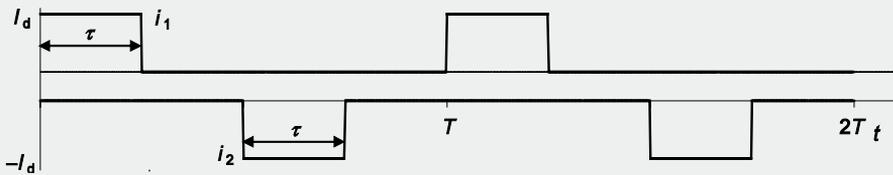
$$I_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \left[ (I_d^2 \cdot \tau) + (I_d^2 \cdot \frac{T}{2} - I_d^2 \cdot \frac{T}{2} + I_d^2 \cdot \tau) \right]}$$

$$I_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \left[ (I_d^2 \cdot \tau) + (I_d^2 \cdot \tau) \right]} = I_d \cdot \sqrt{\frac{2\tau}{T}}$$



**Bild 1.13** Zeitverlauf zu Beispiel 1.5

Einfacher wird die Berechnung, wenn man den vorliegenden Stromverlauf  $i(t)$  aus Bild 1.13 in zwei Anteile  $i_1(t)$  und  $i_2(t)$  wie in Bild 1.14 zerlegt, die zusammengesetzt wieder den ursprünglichen Zeitverlauf ergeben.



**Bild 1.14** Zeitverlauf zerlegt in zwei Einzelverläufe, zu Beispiel 1.5

Für jeden Teilverlauf  $i_1(t)$  und  $i_2(t)$  können jetzt Mittel- und Effektivwert vereinfacht berechnet werden. Der Gesamtmittelwert ergibt sich aus der Summe der einzelnen Mittelwerte.

$$I_{1,AV} = \frac{\tau}{T} \cdot I_d \quad \text{und} \quad I_{2,AV} = \frac{\tau}{T} \cdot (-I_d)$$

$$I_{AV} = I_{1,AV} + I_{2,AV} = \frac{\tau}{T} \cdot [I_d + (-I_d)] = 0$$

Ähnliches gilt für den Gesamteffektivwert. Allerdings müssen die Effektivwerte der Teilverläufe vor der Addition quadriert werden. Der Gesamteffektivwert entspricht der Wurzel aus dieser Summe.

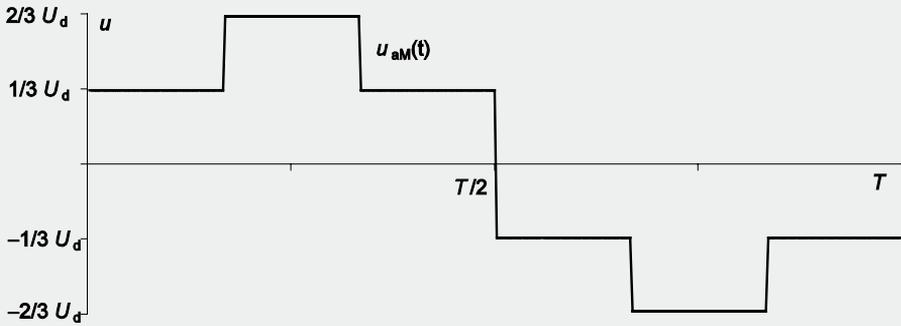
$$I_{1,RMS} = \sqrt{\frac{\tau}{T}} \cdot I_d \quad \text{und} \quad I_{2,RMS} = \sqrt{\frac{\tau}{T}} \cdot I_d$$

$$I_{RMS} = \sqrt{(I_{1,RMS})^2 + (I_{2,RMS})^2} = \sqrt{\frac{\tau}{T} \cdot I_d^2 + \frac{\tau}{T} \cdot I_d^2} = \sqrt{\frac{2\tau}{T}} I_d$$



### Übung 1.6

Berechnen Sie den Gesamteffektivwert der Spannung  $u_{\text{aM}}(t)$ , der im Zeitverlauf in Bild 1.15 enthalten ist.



**Bild 1.15** Zeitverlauf zu Übung 1.6

### Abschätzung bei komplexen Kurvenverläufen

Wenn man nur an einer groben Abschätzung interessiert ist, können komplizierte Zeitverläufe häufig durch einen einfacheren Verlauf angenähert werden. Ist beispielsweise die Änderung  $i_b - i_a$  des Stromverlaufs aus Bild 1.16 ausreichend klein, dann kann der eigentlich trapezförmige Verlauf als nahezu rechteckförmig mit der Amplitude  $\frac{1}{2} (i_b + i_a)$  angesehen werden. Unter dieser Annahme ergeben sich folgende Näherungswerte für Mittel- und Effektivwert (vgl. dazu die Ergebnisse der Übung 1.7):

$$I_{\text{AV}} = \frac{\tau}{T} \cdot \frac{1}{2} (i_b + i_a) = D \cdot \frac{1}{2} (i_b + i_a) \quad \text{sowie}$$

$$I_{\text{RMS}} = \sqrt{\frac{\tau}{T}} \cdot \frac{1}{2} (i_b + i_a) = \sqrt{D} \cdot \frac{1}{2} (i_b + i_a)$$



### Übung 1.7

Ermitteln Sie den Effektivwert des Kurvenverlaufs aus Bild 1.16 mit Hilfe der Ergebnisse von Beispiel 1.4 und Übung 1.5.



Kontrollieren Sie Ihre Lösung mit dem Applet „Charakteristische Zeitverläufe“.

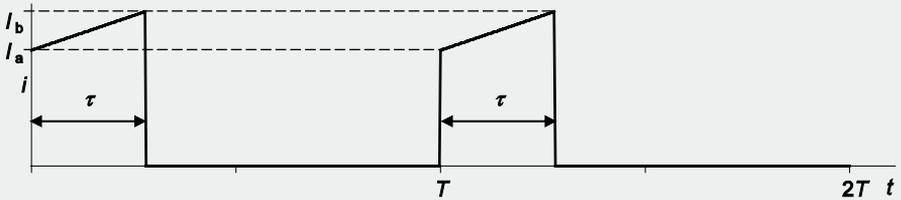


Bild 1.16 Zeitverlauf zur Übung 1.7



### Übung 1.8

Ermitteln Sie den  $THD_u$  des Spannungsverlaufes  $u(t)$  aus Bild 1.17.

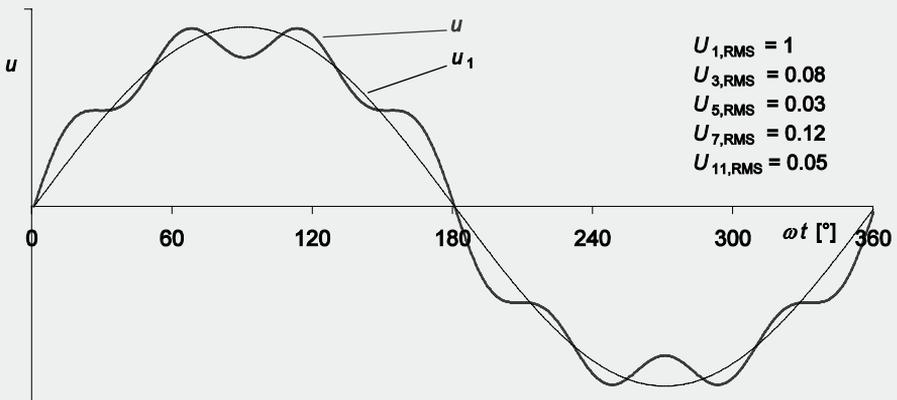


Bild 1.17 Zeitverlauf zur Übung 1.8

## 1.3 Leistungsbilanz bei Stromrichtern

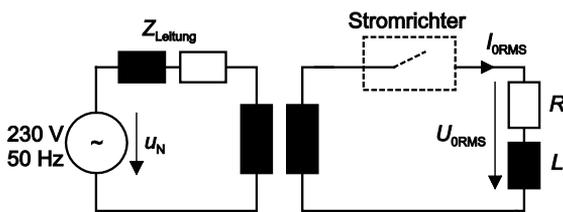
### Lernziele

Die Lernenden ...

- kennen die Ursachen für den Blindleistungsbedarf bei Stromrichtern,
- benennen unterschiedliche Arten der Blindleistung bei Stromrichtern,
- berechnen den Grundschwingungsleistungsfaktor,
- berechnen Blindleistungen bei einfachen Stromrichtern.

### 1.3.1 Leistungsfaktor bei sinusförmigen Größen

Elektrische Verbraucher entnehmen dem speisenden Wechselstromnetz einen Strom  $I_{\text{ORMS}}$ . Alle Anlagenteile, die zwischen dem Netz und dem Verbraucher liegen (Zuleitungen, Transformatoren, Stromrichter), werden mit diesem Strom  $I_{\text{ORMS}}$  belastet. Dabei ist es völlig unerheblich, ob zwischen Strom und Spannung am Anschlusspunkt des Verbrauchers ein Phasenunterschied besteht oder nicht. Für die Verluste, die in den Anlagenteilen entstehen, welche dem Verbraucher vorgeschaltet sind, ist der Effektivwert des fließenden Stromes maßgeblich.



**Bild 1.18** Ohmsch-induktiver Verbraucher mit Stromrichter und Anlagenteilen

Die vom Verbraucher entnommene Scheinleistung  $S$  wird definiert als

$$S = U_{\text{ORMS}} \cdot I_{\text{ORMS}}$$

Die vom Verbraucher umgesetzte Wirkleistung  $P$  ist kleiner als die Scheinleistung  $S$ , wenn Strom und Spannung am Verbraucher nicht phasengleich sind. Für diesen häufigen Fall gilt:

$$\lambda = \frac{P}{S}$$

Nur wenn sowohl der Verbraucherstrom  $i_0(t)$  als auch die Verbraucherspannung  $u_0(t)$  rein sinusförmige Größen sind, kann man von einem Phasenverschiebungswinkel  $\phi$  sprechen. In diesem Fall gelten die grundlegenden Beziehungen

$$\lambda = \frac{P}{S} = \cos \phi \quad S^2 = P^2 + Q^2 \quad \text{mit} \quad P = S \cdot \cos \phi \quad \text{und} \quad Q = S \cdot \sin \phi$$

Stromrichter arbeiten vorwiegend im Schaltbetrieb. Nach Bild 1.2 unten resultieren aus dem Schaltbetrieb Strom- und Spannungsverläufe, die keinen rein sinusförmigen Verlauf mehr darstellen, sondern Oberschwingungen enthalten.



### Beispiel 1.6 Ermittlung von Wirk-, Blind- und Scheinleistung

Ermitteln Sie die bei Schaltbetrieb nach Bild 1.2 unten im Verbraucher nach Bild 1.1 b) umgesetzte Wirk-, Blind- und Scheinleistung, wenn der Widerstand der Glühlampe  $10 \Omega$  beträgt und der Stromrichter verlustfrei arbeitet.

#### Lösung:

Die Glühlampe ist ein rein ohmscher Verbraucher. Daher gilt für die Wirkleistung

$$P = U_{\text{ORMS}} \cdot I_{\text{ORMS}}$$

Die erforderlichen Effektivwerte wurden in Übung 1.4 ermittelt und betragen für  $\alpha = 90^\circ$

$$U_{\text{ORMS}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{2} \cdot 230 \text{ V})^2}{\pi} \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot \pi - \frac{1}{2} \cdot \alpha + \frac{1}{4} \cdot \sin(2\alpha) \right]}$$

$$U_{\text{ORMS}} = \sqrt{2} \cdot 230 \text{ V} \cdot \sqrt{\left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi} \cdot \alpha + \frac{1}{4\pi} \cdot \sin(2\alpha) \right]}$$

$$U_{\text{ORMS}} = \sqrt{2} \cdot 230 \text{ V} \cdot \sqrt{\left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4\pi} \cdot \sin(\pi) \right]} = \frac{\sqrt{2} \cdot 230 \text{ V}}{2} = 162.6 \text{ V}$$

Der Strom ist aufgrund der ohmschen Last in Phase mit der Spannung; daher kann der Stromeffektivwert aus dem Effektivwert der Spannung ermittelt werden.

$$I_{\text{ORMS}} = \frac{U_{\text{ORMS}}}{R} = \frac{162.6 \text{ V}}{10 \Omega} = 16.26 \text{ A}$$

Daraus ergibt sich die Wirkleistung

$$P = U_{\text{ORMS}} \cdot I_{\text{ORMS}} = 162.6 \text{ V} \cdot 16.26 \text{ A} = 2644 \text{ W}$$

Die Scheinleistung, die das Netz bereitstellt, resultiert aus der Netzspannung  $U_N$  und dem Effektivwert des Stromes  $I_{\text{ORMS}}$

$$S = U_N \cdot I_{\text{ORMS}} = 230 \text{ V} \cdot 16.26 \text{ A} = 3740 \text{ VA}$$

Für die Blindleistung erhält man nun

$$Q = \sqrt{S^2 - P^2} = \sqrt{(3740 \text{ VA})^2 - (2644 \text{ W})^2} = 2645 \text{ Var}$$

Daraus berechnet sich der Leistungsfaktor zu  $\lambda = 0.707$ .



Bei Stromrichteranwendungen treten Blindleistungen auch dann auf, wenn eine rein ohmsche Last angeschlossen ist. Die Begriffe *Wirk-*, *Blind-* und *Scheinleistung* (active power, reactive power, apparent power) sowie der *Leistungsfaktor* (power factor) müssen daher für Anwendungen der Leistungselektronik erweitert werden.

Nach DIN 1301 Teil 1 vom Oktober 2002 werden für die verschiedenen Leistungsarten unterschiedliche Einheiten benutzt. Die elektrische Wirkleistung wird in W angegeben. Für die elektrische Blindleistung wird Var verwendet; Angaben zur Scheinleistung erhalten die Dimension VA.

### 1.3.2 Fourier-Analyse

Der französische Mathematiker Fourier hat nachgewiesen, dass jede nicht sinusförmige, aber periodische Funktion der Periodendauer  $T$  durch eine unendliche Summe sinusförmiger Teilschwingungen dargestellt werden kann.

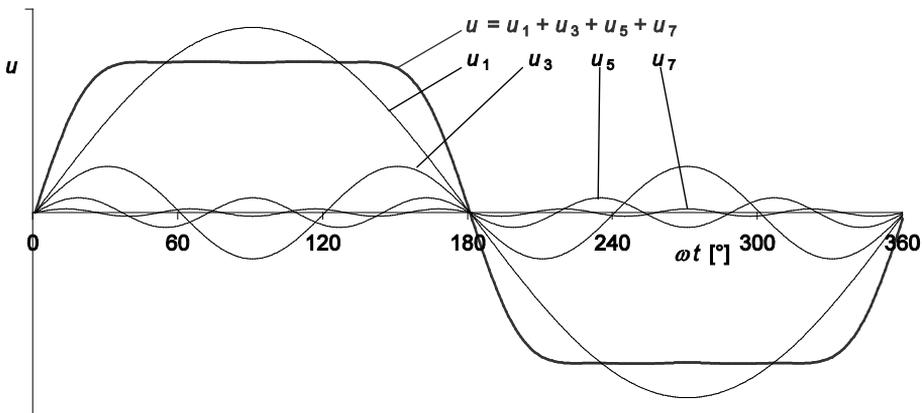
Ein solcher Zusammenhang ist in Bild 1.19 gezeigt und wird Fourier-Synthese genannt. Addiert man die Spannungen  $u_1(t)$ ,  $u_3(t)$ ,  $u_5(t)$  und  $u_7(t)$ , so ergibt sich die schwarz gezeichnete Spannung  $u(t)$ , die einer Rechteckspannung schon sehr ähnlich sieht. In diesem Beispiel gilt für die sinusförmigen Teilspannungen:

$$u_1(t) = \hat{U}_1 \cdot \sin(1 \cdot \omega t) \quad \text{mit } \hat{U}_1 = 1 \quad \text{sowie } \phi_1 = 0^\circ$$

$$u_3(t) = \hat{U}_3 \cdot \sin(3 \cdot \omega t - \phi_3) \quad \text{mit } \hat{U}_3 = 0.25 \quad \text{sowie } \phi_3 = 0^\circ$$

$$u_5(t) = \hat{U}_5 \cdot \sin(5 \cdot \omega t - \phi_5) \quad \text{mit } \hat{U}_5 = 0.08 \quad \text{sowie } \phi_5 = 0^\circ$$

$$u_7(t) = \hat{U}_7 \cdot \sin(7 \cdot \omega t - \phi_7) \quad \text{mit } \hat{U}_7 = 0.02 \quad \text{sowie } \phi_7 = 0^\circ$$



**Bild 1.19** Synthese einer Rechteckwechselspannung aus Teilschwingungen



Die Überlegungen können mit dem Applet „Fourier-Synthese“ nachvollzogen werden.

Bei Stromrichtern treten periodische, aber nicht sinusförmige Spannungen und Ströme auf. Deren Zerlegung in sinusförmige Teilfunktionen nennt man Fourier-Analyse.

Mathematisch korrekt lautet die Darstellung des Spannungsverlaufs  $u_0(t)$  in Bild 1.2 unten

$$u_0(t) = a_0 + a_1 \cos \omega t + a_2 \cos 2\omega t + a_3 \cos 3\omega t + \dots + a_n \cos n\omega t + b_1 \sin \omega t + b_2 \sin 2\omega t + b_3 \sin 3\omega t + \dots + b_n \sin n\omega t \quad (1.6)$$

Hierbei wird die unendliche Summe nach dem  $n$ -ten Glied abgebrochen. Dies führt, wie in Bild 1.19 zu sehen ist, nur zu geringen Fehlern, sofern  $n$  ausreichend groß ist. Die einzelnen sin- und cos-Glieder können unter Verwendung von trigonometrischen Additionstheoremen weiter zusammengefasst werden.

$$u_0(t) = U_0 + \hat{U}_{01} \sin(\omega t - \phi_1) + \hat{U}_{02} \sin(2\omega t - \phi_2) + \hat{U}_{03} \sin(3\omega t - \phi_3) + \dots + \hat{U}_{0n} \sin(n\omega t - \phi_n) \quad (1.7)$$

$$u_0(t) = U_0 + u_{0-}(t)$$

$U_0$  ist der in  $u_0(t)$  enthaltene Mittelwert. Der Anteil mit der Ordnungszahl 01 heißt Grundschwingung. Alle weiteren Anteile werden als Oberschwingungen bezeichnet. Zusammengefasst ergeben Grund- und Oberschwingungen den Wechselanteil  $u_{0-}(t)$ .

Die Fourier-Koeffizienten, also alle  $a_1$  und  $b_1$  aus Gl. (1.6) bzw.  $U_0$ ,  $U_{0i}$  und  $\phi_1$  aus, Gl. (1.7), können mit mathematischen Verfahren für jeden gegebenen Zeitverlauf berechnet werden.

### 1.3.3 Blindleistung bei Stromrichtern

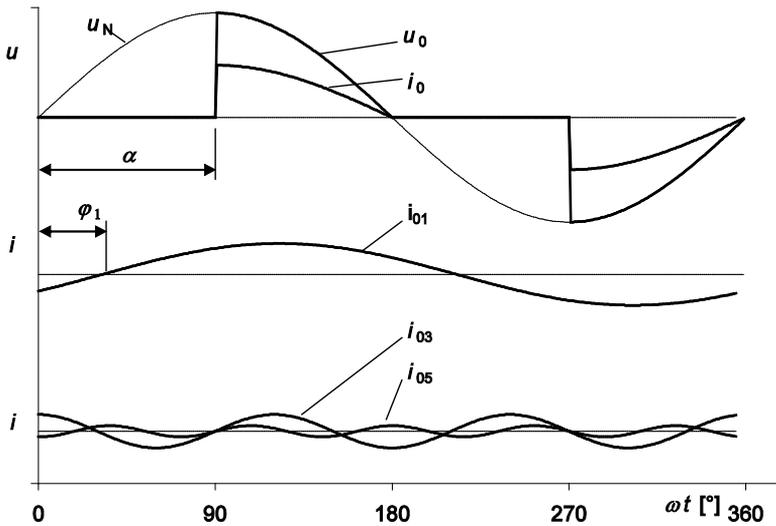
In Beispiel 1.6 wurde deutlich, dass der Stromrichter vom Netz selbst dann Blindleistung verlangt, wenn der angeschlossene Verbraucher lediglich Wirkleistung beansprucht. Unter Verwendung der Fourier-Zerlegung wird dieses zunächst erstaunliche Verhalten erläutert.



Die Überlegungen sollen mit dem Applet „Wechselstromsteller“ nachvollzogen werden.

Der Stromrichter zur Steuerung der Helligkeit einer Glühlampe aus Bild 1.1 ist ein handelsüblicher Dimmer. Der Typ eines solchen Stromrichters wird Wechselstromsteller genannt. Nach Bild 1.2 unten bewirkt ein Steuerwinkel von  $90^\circ$  eine angeschnittene Spannung  $u_0(t)$ , die aufgrund der ohmschen Last der Glühbirne einen formgleichen Stromverlauf  $i_0(t)$  nach sich zieht. Dieser angeschnittene Strom fließt ebenfalls im Wechselstromnetz.

In Bild 1.20 sind im oberen Teil nochmals die Zeitverläufe aus Bild 1.2 unten dargestellt. Der Zeitverlauf  $i_0(t)$  wurde einer Fourier-Zerlegung unterzogen. Im mittleren Bildteil ist die zugehörige Grundschwingung  $i_{01}(t)$  wiedergegeben. Man erkennt, dass diese der Netzspannung um den Phasenwinkel  $\phi_1$  nacheilt.



**Bild 1.20** Spannungs- und Stromverläufe beim Wechselstromsteller mit ohmscher Belastung, oben: Lastspannung  $u_0(t)$  und Laststrom  $i_0(t)$ , Mitte: Grundschwingung  $i_{01}(t)$  des Laststroms, unten: Oberschwingungsströme



Die Ansteuerung des Stromrichters erzeugt eine *Stromgrundschwingung* (fundamental component, first harmonic), die der Netzspannung nacheilt, so als ob dieser Strom durch einen ohmsch-induktiven Verbraucher hervorgerufen würde.

Die der Netzspannung nacheilende Stromgrundschwingung belastet das Netz mit induktiver Blindleistung. Da dieser Blindleistungsbedarf aus der Verschiebung der Stromgrundschwingung in Bezug auf die Netzspannung herrührt, wird er auch Verschiebungsblindleistung genannt.

Die genaue Rechnung mit den Zahlenwerten aus Beispiel 1.6 ergibt die Zeitfunktion der Grundschwingung zu

$$i_{01}(t) = \hat{I}_{01} \cdot \sin(\omega t - \phi_1)$$

$$i_{01}(t) = \sqrt{2} \cdot 13 \text{ A} \cdot \sin(\omega t - 0.567 \text{ rad}) \quad \text{mit } 0.567 \text{ rad} = \frac{32.47^\circ}{180^\circ} \cdot \pi$$

Der Stromkreis bestehend aus Netz, Stromrichter und ohmscher Last verhält sich so, als wären die Grund- und Oberschwingungen des Stroms  $i_0(t)$  tatsächlich vorhanden. Demnach lässt sich die Blindleistung berechnen, die aufgrund des nacheilenden Stroms anfällt.

$$Q_1 = U_N \cdot \frac{\hat{I}_{01}}{\sqrt{2}} \cdot \sin(\phi_1) = 220 \text{ V} \cdot 13 \text{ A} \cdot \sin(32.47^\circ) = 1535 \text{ Var}$$

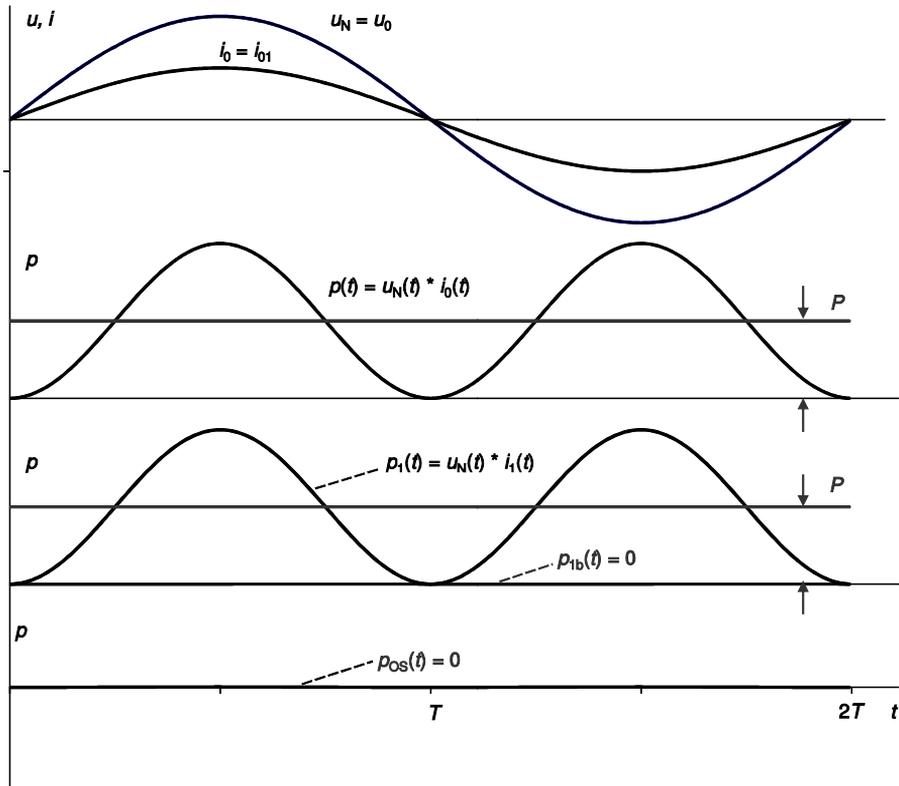
Vergleicht man  $Q_1$  mit der Blindleistung, die in Beispiel 1.6 berechnet wurde, stellt man zwischen beiden Werten eine Differenz von 884 Var fest. Dieser Unterschied ist einer wei-

teren Blindleistungskomponente zuzuschreiben. Zur Erläuterung zeigt der untere Teil von Bild 1.20 die Oberschwingungen  $i_{03}(t)$  und  $i_{05}(t)$ . Diese weisen in Bezug zur Netzspannung andere Phasenwinkel als die Grundschwingung  $i_{01}(t)$  auf.

Die Frequenzen der Oberschwingungsströme sind ganzzahlige Vielfache der Netzfrequenz. Daher setzen diese (und alle weiteren) Oberschwingungsströme mit der Netzspannung keine Wirkleistung, sondern ausschließlich Blindleistung um. Letztere heißt Verzerrungsblindleistung, weil die Oberschwingungen letztlich den verzerrten, also nicht sinusförmigen Stromverlauf  $i_0(t)$  bewirken.



Stromrichter belasten das Netz mit *Blindleistung* (reactive power). Dieser Blindleistungsbedarf entsteht aufgrund des gesteuerten Betriebs und wird Steuerblindleistung (control reactive power) genannt. Sie setzt sich aus den Anteilen der Verschiebungsblindleistung sowie der Verzerrungsblindleistung zusammen.

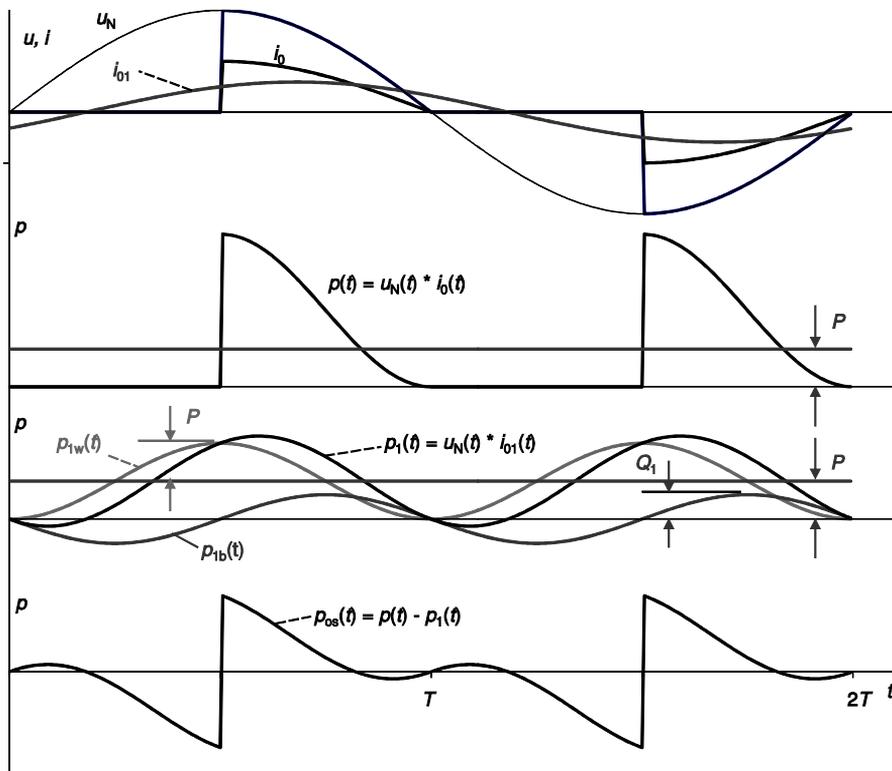


**Bild 1.21** Leistung beim Wechselstromsteller mit ohmscher Belastung und  $\alpha = 0^\circ$ ; oben: Strom- und Spannungsverlauf an der Last, Mitte oben: Zeitverlauf der Gesamtleistung  $p(t)$ , Mitte unten: Grundschiwingungswirkleistung  $p_{1w}(t)$  und Grundschiwingungsblindleistung  $p_{1b}(t)$ , unten: Verzerrungsleistung  $p_{0s}(t)$



Die Zeitverläufe von Bild 1.21 und Bild 1.22 wurden mit dem Applet „Wechselstromsteller“ berechnet und zeigen die Verhältnisse bei der Schaltung nach Bild 1.1 für die Steuerwinkel  $0^\circ$  und  $90^\circ$ . Diese Schaltung entspricht in der Wirkungsweise einem handelsüblichen Dimmer.

Für den Steuerwinkel  $0^\circ$  ist in Bild 1.21 die Lastspannung  $u_0(t)$  identisch mit der Netzspannung. Der Strom  $i_0(t)$  ist deshalb rein sinusförmig und phasengleich zur Netzspannung. Der Zeitverlauf der Gesamtleistung  $p(t)$  entspricht dem der Grundswingungsleistung  $p_1(t)$ ; eine Blindleistung tritt nicht auf, da die Glühbirne eine rein ohmsche Last darstellt und keine Phasenverschiebung vorliegt. Die Mittelwerte beider Leistungskurven liefern die mittlere umgesetzte Wirkleistung  $P$ . Eine Verzerrungsblindleistung  $p_{os}(t)$  ist wegen fehlender Oberschwingungsströme ebenfalls nicht vorhanden. Der Betrieb des Wechselstromstellers mit einem Steuerwinkel ungleich null ändert die Verhältnisse grundlegend; die zugehörigen Zeitverläufe für den Steuerwinkel  $90^\circ$  finden sich in Bild 1.22.



**Bild 1.22** Leistung beim Wechselstromsteller mit ohmscher Belastung und  $\alpha = 90^\circ$ ; oben: Strom- und Spannungsverlauf an der Last, Mitte oben: Zeitverlauf der Gesamtleistung  $p(t)$ , Mitte unten: Grundswingungswirkleistung  $p_{1w}(t)$  und Grundswingungsblindleistung  $p_{1b}(t)$ , unten: Verzerrungsleistung  $p_{os}(t)$

Nur wenn der Schalter geschlossen ist, liegt Spannung an der Last. Der Verbraucherstrom  $i_0(t)$  ist daher nicht mehr rein sinusförmig und enthält sowohl Grund- als auch Oberschwingungsanteile. Die Gesamtleistung  $p(t)$  als Produkt von Netzspannung und Verbraucherstrom wird zeitweise null (Bild 1.22, obere Mitte). Der Mittelwert dieser Gesamtleistung ist die umgesetzte Wirkleistung  $P$ .

Die Grundschwingsleistung  $p_1(t)$  (Bild 1.22, untere Mitte) ergibt sich aus

$$p_1(t) = u_N(t) \cdot i_{01}(t)$$

Sie setzt sich zusammen aus dem Zeitverlauf der Wirkleistung  $p_{1w}(t)$  sowie dem Zeitverlauf der Grundschwingsblindleistung  $p_{1b}(t)$ .

$$p_{1w}(t) = U_N \cdot I_1 \cos \phi_1 (1 - \cos(2\omega t)) = P \cdot (1 - \cos(2\omega t))$$

$$p_{1b}(t) = U_N \cdot I_1 \sin \phi_1 \cdot \sin(2\omega t) = Q_1 \cdot \sin(2\omega t)$$

Die Wirkleistung  $p_{1w}(t)$  nimmt nur positive Werte an. Mittel- und Scheitelwert von  $p_{1w}(t)$  betragen  $P$ . Der Mittelwert der Grundschwingsblindleistung  $p_{1b}(t)$  ist null, da sie keine Wirkleistung darstellt. Ihr Scheitelwert ist  $Q_1$ .

Der Leistungsanteil  $p_{os}(t)$ , der durch die Oberschwingungen hervorgerufen wird, ist in Bild 1.22 unten dargestellt. Er hat ebenso den Mittelwert null und wird Verzerrungsblindleistung genannt.



### Beispiel 1.7 Ermittlung der unterschiedlichen Leistungsanteile



Mit Hilfe des Applets „Wechselstromsteller“ sind die Leistungsanteile für einen Wechselstromsteller am 230 V-Netz zu ermitteln, der mit einem Steuerwinkel von  $90^\circ$  und rein ohmscher Last ( $R = 10 \Omega$ ) betrieben wird.

#### Lösung:

Im Applet wird ein Steuerwinkel von  $90^\circ$  eingestellt. Im oberen Bildteil sind die Zeitverläufe von Strom und Spannung an der Last gezeigt. Die im Applet integrierte Fourier-Analyse liefert zusätzlich die Zeitverläufe von  $i_{R1}(t)$ ,  $i_{R3}(t)$  sowie  $i_{R5}(t)$ . Der untere Bildteil enthält die Zeitverläufe der Leistungskomponenten  $p_1(t)$ ,  $p_{1w}(t)$ ,  $p_{1b}(t)$  sowie  $q_d(t)$ . Außerdem werden die Werte für  $S_1$ ,  $P$ ,  $Q_1$  und  $Q_d$  in Bezug auf die dem Netz entnommene Gesamtscheinleistung  $S_{\text{Netz}}$  angegeben.

Die nachfolgenden Gleichungen zeigen die Formeln zur Berechnung der Leistungskomponenten. Die rechte Spalte zeigt die Ergebnisse bezogen auf die Gesamtscheinleistung  $S_{\text{Netz}}$ . Der Index d bedeutet in diesem Zusammenhang Verzerrung (distortion).

$$S_{\text{Netz}} = U_N \cdot I_{0\text{RMS}}$$

$$\frac{S_{\text{Netz}}}{U_N \cdot I_{0\text{RMS}}} = 1 = 100\%$$

$$P = U_N \cdot I_{01\text{RMS}} \cdot \cos \phi_1$$

$$\frac{P}{S_{\text{Netz}}} = \frac{I_{01\text{RMS}}}{I_{0\text{RMS}}} \cdot \cos \phi_1$$

$$\begin{aligned}
 Q_1 &= U_N \cdot I_{01\text{RMS}} \cdot \sin \phi_1 & \frac{Q_1}{S_{\text{Netz}}} &= \frac{I_{01\text{RMS}}}{I_{0\text{RMS}}} \cdot \sin \phi_1 \\
 Q_d &= U_N \cdot \sqrt{I_{0\text{RMS}}^2 - I_{01\text{RMS}}^2} & \frac{Q_d}{S_{\text{Netz}}} &= \sqrt{\frac{I_{0\text{RMS}}^2 - I_{01\text{RMS}}^2}{I_{0\text{RMS}}^2}} = \sqrt{1 - \frac{I_{01\text{RMS}}^2}{I_{0\text{RMS}}^2}} \quad (1.8) \\
 S_1 &= U_N \cdot I_{01\text{RMS}} & \frac{S_1}{S_{\text{Netz}}} &= \frac{I_{01\text{RMS}}}{I_{0\text{RMS}}}
 \end{aligned}$$

Für den vorliegenden Lastfall ergibt sich der Stromeffektivwert  $I_{0\text{RMS}} = 16.26 \text{ A}$  aus Beispiel 1.6. Mit Hilfe der Angaben im Applet erhält man daraus den Effektivwert der Grundschwingung zu

$$I_{01\text{RMS}} = 0.838 \cdot I_{0\text{RMS}} = 0.838 \cdot 16.26 \text{ A} = 13.625 \text{ A}$$

Zur weiteren Rechnung ist die Kenntnis des Phasenwinkels  $\phi_1$  der Grundschwingung erforderlich. Diesen erhält man beispielsweise nach

$$\frac{Q_1}{P} = \frac{\sin \phi_1}{\cos \phi_1} = \tan \phi_1 \Rightarrow \phi_1 = \arctan\left(\frac{Q_1}{P}\right) = \arctan\left(\frac{0.45 \cdot S_{\text{Netz}}}{0.707 \cdot S_{\text{Netz}}}\right) = 32.47^\circ$$

Die Wirkleistung, die dem Netz entnommen wird, ergibt sich zu

$$P = 230 \text{ V} \cdot I_{01\text{RMS}} \cdot \cos \phi_1 = 230 \text{ V} \cdot 13.625 \text{ A} \cdot 0.843 = 2.644 \text{ kW}$$

Die vom Netz gelieferte Verschiebungs- oder Grundschwingungsblindleistung beträgt

$$Q_1 = 230 \text{ V} \cdot I_{01\text{RMS}} \cdot \sin \phi_1 = 230 \text{ V} \cdot 13.625 \text{ A} \cdot 0.536 = 1.682 \text{ kVar}$$

Die Verzerrungsblindleistung  $Q_d$  erhält man aus

$$Q_d = 230 \text{ V} \cdot \sqrt{I_{0\text{RMS}}^2 - I_{01\text{RMS}}^2} = 230 \text{ V} \cdot \sqrt{(16.26 \text{ A})^2 - (13.625 \text{ A})^2}$$

$$Q_d = 230 \text{ V} \cdot 8.74 \text{ A} = 2.041 \text{ kVar}$$

Beide Blindleistungen ergeben die gesamte benötigte Steuerblindleistung:

$$\sqrt{Q_1^2 + Q_d^2} = \sqrt{(1.682 \text{ kVA})^2 + (2.041 \text{ kVA})^2} = 2.644 \text{ kVar}$$

Die dem Netz entnommene Scheinleistung ist die geometrische Summe aus Wirk- und Blindleistung:

$$S_{\text{Netz}} = \sqrt{P^2 + Q_1^2 + Q_d^2}$$

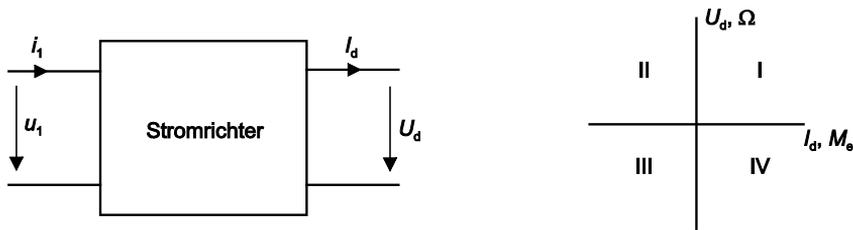
$$S_{\text{Netz}} = \sqrt{(2.644 \text{ kW})^2 + (1.682 \text{ kVA})^2 + (2.041 \text{ kVA})^2} = 3.74 \text{ kVA}$$

Dieses Ergebnis erhält man ebenso bei Berechnung der Gesamtscheinleistung nach Beispiel 1.6 aus Netzspannung und Effektivstrom:

$$S_{\text{Netz}} = 230 \text{ V} \cdot 16.26 \text{ A} = 3.740 \text{ kVA}$$

## 1.4 Betriebsquadranten

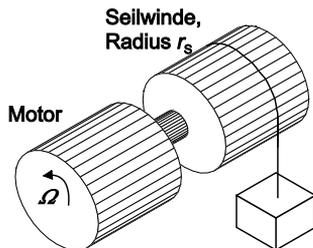
Je nach Aufbau und Ansteuerung der Schalter können Stromrichter am Ausgang unterschiedliche Spannungspolaritäten sowie positive und/oder negative Ausgangsströme liefern.



**Bild 1.23** Betriebsquadranten bei Stromrichtern

Die Einteilung erfolgt nach den Strom- bzw. Spannungsrichtungen am Ausgang des Stromrichters. Man spricht von einem Einquadrantenstromrichter, wenn dieser lediglich eine Spannungspolarität und eine Stromrichtung aufweist. Je nachdem arbeitet er dann in einem der Quadranten I bis IV.

Ist der Stromrichter beispielsweise in der Lage, nur einen positiven Strom zu führen, kann aber positive und negative Spannungen am Ausgang liefern, so spricht man von einem Zweiquadrantenstromrichter. In diesem Fall erstreckt sich der Betriebsbereich auf die Quadranten I und IV in Bild 1.23.



**Bild 1.24** Antrieb zum Heben und Senken einer Last



### Beispiel 1.8

Ein typischer Vertreter eines Zweiquadrantenantriebs ist der Motor zum Heben und Senken einer Last aus Bild 1.24. Er wird aus einem Stromrichter gespeist, der in diesem Bild nicht dargestellt ist. Wird der Motor mit positiver Spannung und positivem Strom versorgt, entsteht ein positives Drehmoment. Ist dieses vom Motor entwickelte Drehmoment größer als  $M_L = m \cdot g \cdot r_s$ , so bewegt sich der Motor mit positiver Drehzahl  $\Omega > 0$  und die Last wird angehoben. Der Antrieb arbeitet im ersten Quadranten (I).

Wird der Motorstrom so vermindert, dass das Motordrehmoment kleiner wird als das Drehmoment  $M_L$  der Last, bewegt sich die Last wieder nach unten. Die Drehrichtung des Motors und damit dessen Spannungspolarität kehrt sich um und wird negativ. Um das Senken der Last zu bremsen, sind aber dennoch ein positives Motormoment und ein positiver Strom erforderlich. Somit arbeitet der Antrieb jetzt mit negativer Spannung, aber nach wie vor positivem Strom. Dies entspricht dem Betrieb im Quadranten IV.

Im Abschnitt Brückenschaltungen im Kapitel 3 werden Stromrichter betrachtet, die positive und negative Ausgangsströme und Ausgangsspannungen bereitstellen. Stromrichter solcher Bauart heißen Vierquadrantenstromrichter und können in allen Quadranten von I bis IV arbeiten.



### Übung 1.9

Der Motor einer Straßenbahnlokomotive wird über einen Stromrichter mit Energie versorgt. Reicht ein Zweiquadrantenstromrichter aus? Begründen Sie!

## 1.5 Lösungen



### Übung 1.1

Der Winkel von  $180^\circ$  entspricht  $\pi$  im Bogenmaß. Für den Effektivwert der pulsierenden Gleichspannung erhält man:

$$U_{\text{RMS}} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^\pi \hat{U}_s^2 \sin^2(\omega t) d\omega t} = \sqrt{\frac{\hat{U}_s^2}{2\pi} \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot \omega t - \frac{1}{4} \cdot \sin(2\omega t) \right]_0^\pi}$$

$$U_{\text{RMS}} = \sqrt{\frac{\hat{U}_s^2}{2\pi} \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot \pi - \frac{1}{4} \cdot \sin(2\pi) - \left( \frac{1}{2} \cdot 0 - \frac{1}{4} \cdot \sin(0) \right) \right]}$$

$$U_{\text{RMS}} = \sqrt{\frac{\hat{U}_s^2}{2\pi} \cdot \frac{\pi}{2}} = \frac{\hat{U}_s}{2} = \frac{\sqrt{2} \cdot U_s}{2} = \frac{U_s}{\sqrt{2}}$$



### Übung 1.2

Der Effektivwert des angeschnittenen Spannungsverlaufs ergibt sich zu

$$U_{\text{RMS}} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\alpha}^{\pi} \hat{U}_s^2 \sin^2(\omega t) d\omega t} = \sqrt{\frac{\hat{U}_s^2}{2\pi} \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot \omega t - \frac{1}{4} \cdot \sin(2\omega t) \right]_{\alpha}^{\pi}}$$

$$U_{\text{RMS}} = \sqrt{\frac{\hat{U}_s^2}{2\pi} \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot \pi - \frac{1}{4} \cdot \sin(2\pi) - \left( \frac{1}{2} \cdot \alpha - \frac{1}{4} \cdot \sin(2\alpha) \right) \right]}$$

$$U_{\text{RMS}} = \sqrt{\frac{\hat{U}_s^2}{2\pi} \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot \pi - \frac{1}{2} \cdot \alpha + \frac{1}{4} \cdot \sin(2\alpha) \right]} = \frac{\hat{U}_s}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi} \cdot \alpha + \frac{1}{4\pi} \cdot \sin(2\alpha) \right]}$$

Für den Mittelwert des angeschnittenen Spannungsverlaufs gilt

$$U_d = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\alpha}^{\pi} \hat{U}_s \sin(\omega t) d\omega t = \frac{\hat{U}_s}{2\pi} \cdot \left[ -\cos(\omega t) \right]_{\alpha}^{\pi} = \frac{\hat{U}_s}{2\pi} \cdot \left[ -\cos(\pi) - (-\cos(\alpha)) \right]$$

$$U_d = \frac{\hat{U}_s}{2\pi} \cdot (1 + \cos \alpha)$$



### Übung 1.3

Der Effektivwert der Gleichspannung ist genauso groß wie bei normaler, nicht gleichgerichteter Sinusspannung.

$$U_{\text{RMS}} = \sqrt{\frac{2}{2\pi} \cdot \int_0^{\pi} \hat{U}_s^2 \sin^2(\omega t) d\omega t} = \sqrt{\frac{2 \cdot \hat{U}_s^2}{2\pi} \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot \omega t - \frac{1}{4} \cdot \sin(2\omega t) \right]_0^{\pi}}$$

$$U_{\text{RMS}} = \sqrt{\frac{2 \cdot \hat{U}_s^2}{2\pi} \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot \pi - \frac{1}{4} \cdot \sin(2\pi) - \left( \frac{1}{2} \cdot 0 - \frac{1}{4} \cdot \sin(0) \right) \right]} = \sqrt{\frac{2 \cdot \hat{U}_s^2}{2\pi} \cdot \frac{\pi}{2}}$$

$$U_{\text{RMS}} = \frac{\hat{U}_s}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} \cdot U_s}{\sqrt{2}} = U_s$$

Mittelwert der Spannung:

$$U_d = \frac{2}{2\pi} \cdot \int_0^{\pi} \hat{U}_s \sin(\omega t) d\omega t = \frac{\hat{U}_s}{\pi} \cdot \left[ -\cos(\omega t) \right]_0^{\pi}$$

$$U_d = \frac{\hat{U}_s}{\pi} \cdot \left[ -\cos(\pi) - (-\cos(0)) \right] = \frac{\hat{U}_s}{\pi} \cdot 2 = \frac{2}{\pi} \cdot \hat{U}_s$$



### Übung 1.4

Der Effektivwert der angeschnittenen Spannung ergibt sich zu

$$U_{\text{RMS}} = \sqrt{\frac{2}{2\pi} \cdot \int_{\alpha}^{\pi} \hat{U}_s^2 \sin^2(\omega t) d\omega t} = \sqrt{\frac{2 \cdot \hat{U}_s^2}{2\pi} \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot \omega t - \frac{1}{4} \cdot \sin(2\omega t) \right]_{\alpha}^{\pi}}$$

$$U_{\text{RMS}} = \sqrt{\frac{2 \cdot \hat{U}_s^2}{2\pi} \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot \pi - \frac{1}{4} \cdot \sin(2\pi) - \left( \frac{1}{2} \cdot \alpha - \frac{1}{4} \cdot \sin(2\alpha) \right) \right]}$$

$$U_{\text{RMS}} = \sqrt{\frac{\hat{U}_s^2}{\pi} \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot \pi - \frac{1}{2} \cdot \alpha + \frac{1}{4} \cdot \sin(2\alpha) \right]} = \hat{U}_s \cdot \sqrt{\left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi} \cdot \alpha + \frac{1}{4\pi} \cdot \sin(2\alpha) \right]}$$

Er kann auch aus dem Ergebnis von Übung 1.2 bestimmt werden: Aufgrund der dafür notwendigen geometrischen Addition des Resultats der Übung 1.2 steigt der Gesamteffektivwert jedoch nur um den Faktor  $\sqrt{2}$ . Der Mittelwert der Spannung ist doppelt so groß wie der in Übung 1.2.

$$U_d = \frac{2}{2\pi} \cdot \int_{\alpha}^{\pi} \hat{U}_s \sin(\omega t) d\omega t = \frac{\hat{U}_s}{\pi} \cdot [-\cos(\omega t)]_{\alpha}^{\pi}$$

$$U_d = \frac{\hat{U}_s}{\pi} \cdot [-\cos(\pi) - (-\cos(\alpha))] = \frac{\hat{U}_s}{\pi} \cdot (1 + \cos \alpha)$$



### Übung 1.5

Den Effektivwert erhält man aus

$$I_{\text{RMS}} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^{\tau} \left( \frac{I_d}{\tau} \cdot t \right)^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \left( \frac{I_d}{\tau} \right)^2 \cdot \left[ \frac{1}{3} \cdot t^3 \right]_0^{\tau}} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \left( \frac{I_d}{\tau} \right)^2 \cdot \left[ \frac{1}{3} \cdot \tau^3 \right]} = I_d \cdot \sqrt{\frac{\tau}{3 \cdot T}}$$

$$I_{\text{RMS}} = I_d \cdot \sqrt{\frac{D}{3}}$$



### Übung 1.6

Dieser Verlauf kann in zwei Teilverläufe  $u_{aM-1}(t)$  und  $u_{aM-2}(t)$  aufgeteilt werden. Dann erhält man die Darstellung von Bild 1.25.

In einer Halbperiode weisen beide Verläufe nur zwei diskrete Werte auf. Zur Berechnung des Effektivwertes wird daher eine Halbperiode angesetzt. Für  $u_{aM-1}(t)$  beträgt die relative Leitdauer in einer Halbperiode  $D = 2/3$  bei einer Amplitude von  $1/3$ . Im Gegensatz dazu weist der Verlauf von  $u_{aM-2}(t)$  bei einer Amplitude von  $2/3$  eine relative Leitdauer von  $D = 1/3$  auf. Somit ergibt sich folgender Ansatz:

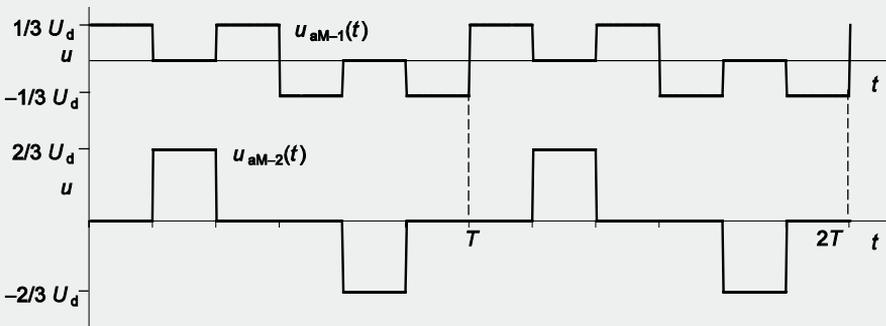
$$U_{aM,RMS} = \sqrt{U_{aM-1,RMS}^2 + U_{aM-2,RMS}^2}$$

$$U_{aM-1,RMS} = \sqrt{D} \cdot \frac{U_d}{3} = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{U_d}{3} \quad \text{so wie} \quad U_{aM-2,RMS} = \sqrt{D} \cdot \frac{2 \cdot U_d}{3} = \sqrt{\frac{1}{3}} \cdot \frac{2 \cdot U_d}{3}$$

$$U_{aM,RMS} = \sqrt{\left(\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{U_d}{3}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{1}{3}} \cdot \frac{2 \cdot U_d}{3}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{9} \cdot U_d^2\right) + \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9} \cdot U_d^2\right)}$$

$$U_{aM,RMS} = \sqrt{\left(\frac{2}{27} \cdot U_d^2\right) + \left(\frac{4}{27} \cdot U_d^2\right)} = \sqrt{\frac{6}{27} \cdot U_d^2} = \sqrt{\frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 9} \cdot U_d^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{9}\right)} \cdot U_d$$

$$U_{aM,RMS} = \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot U_d$$



**Bild 1.25** Zeitverlauf zum Lösungsvorschlag für Übung 1.6

Der Effektivwert des treppenförmigen Verlaufs aus Bild 1.25 beträgt demnach  $\sqrt{2} U_d / 3$ . Bei dreiphasigen Wechselrichtern beträgt die Spannung  $U_d$  häufig 540 V. Dann hat der Spannungsverlauf aus Bild 1.25 den Gesamteffektivwert

$$U_{aM,RMS} = \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot 540 \text{ V} = 255 \text{ V}$$