Steffen Timmann

Repetitorium der Analysis

Teil 2

2. Auflage

HANSER

Trigonometrische Funktionen

	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π
	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	120^0	135^0	150^0	180^0	210^0	225^0	240^0	270^0	300^0	315^0	330^0	360^0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\cot x$	$\pm\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	$\pm\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	$\pm\infty$

Additionstheoreme

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$
$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$
$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$$

doppelter Winkel

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$$
$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$
$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$$
$$\cot 2x = \frac{\cot^2 x - 1}{2 \cot x}$$

halber Winkel

$$\cos\frac{x}{2} =^* \pm\sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cos x)}$$
$$\sin\frac{x}{2} =^* \pm\sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos x)}$$
$$\tan\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1+\cos x} =^* \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$$
$$\cot\frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1-\cos x} =^* \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}$$

Symmetrie

$\cos(-x)$	$=$	$\cos x$	gerade Funktion
$\sin(-x)$	$=$	$-\sin x$	ungerade Funktion
$\tan(-x)$	$=$	$-\tan x$	ungerade Funktion
$\cot(-x)$	$=$	$-\cot x$	ungerade Funktion

$$\boxed{\cos^2 x + \sin^2 x = 1}$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) \qquad \sin x =^* \frac{\tan x}{\pm\sqrt{1+\tan^2 x}}$$
$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \qquad \cos x =^* \frac{1}{\pm\sqrt{1+\tan^2 x}}$$
$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right) \qquad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$
$$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\tan x}$$

$$\sin x + \sin y = 2 \sin\frac{x+y}{2} \cos\frac{x-y}{2}$$
$$\sin x - \sin y = 2 \cos\frac{x+y}{2} \sin\frac{x-y}{2}$$
$$\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2}\big(\cos(x-y) - \cos(x+y)\big)$$
$$\cos x + \cos y = 2 \cos\frac{x+y}{2} \cos\frac{x-y}{2}$$
$$\cos x - \cos y = -2 \sin\frac{x+y}{2} \sin\frac{x-y}{2}$$
$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}\big(\cos(x-y) + \cos(x+y)\big)$$
$$\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2}\big(\sin(x-y) + \sin(x+y)\big)$$

* Vorzeichen je nach Quadranten!

Hyperbelfunktionen

$$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \qquad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$$
$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \qquad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}$$

$$\cosh 0 = 1, \ \sinh 0 = 0, \ \tanh 0 = 0$$
$$\boxed{\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1}$$

$$\cosh(-x) = \cosh x\,, \quad \sinh(-x) = -\sinh x\,, \quad \tanh(-x) = -\tanh x\,, \quad \coth(-x) = -\coth x$$

Additionstheoreme

$$\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y$$
$$\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y$$

$$\cosh\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}(\cosh x + 1)}$$
$$\sinh\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(\cosh x - 1)}\,, \quad \text{für } \begin{cases} x \geq 0 \\ x < 0 \end{cases}$$

$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$$
$$\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$$

$$\operatorname{arsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$$
$$\operatorname{arcosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2-1}), \quad \text{für } x \geq 1$$

Überlagerung von Schwingungen

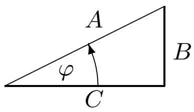
$$\boxed{A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + A_2 \sin(\omega t + \varphi_2) = A \sin(\omega t + \varphi)}$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

$$\tan\varphi = \frac{A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2}{A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2} \quad \text{(Quadranten beachten!)}$$

Spezialfall: $\boxed{B\cos\omega t + C\sin\omega t = A\sin(\omega t + \varphi)}$

$$B = A\sin\varphi \qquad C = A\cos\varphi$$



$$A = \sqrt{B^2 + C^2}$$

$$\tan\varphi = \frac{B}{C} \quad \text{Quadranten beachten!}$$

Quadratische Gleichung

$$\boldsymbol{x^2 + px + q = 0}$$

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

allgemeine Binomialkoeffizienten

$r \in \mathbb{R}$ und $k = 1, 2, \ldots$

$$\binom{r}{k} = \frac{r(r-1)\cdots(r-k+1)}{k!}$$

$$\binom{r}{0} = \binom{r}{r} = 1, \quad \binom{r}{1} = r$$

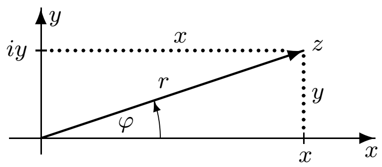
Polarkoordinaten

$$x = r\cos\varphi \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$y = r\sin\varphi \qquad \tan\varphi = \frac{y}{x} \quad \text{Quadranten beachten!}$$

$$dF = r\,dr\,d\varphi$$

$$z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}$$



Rechnen mit **Potenzen** und **Logarithmen**

a: Basis, mit $0 < a \neq 1$

a^{x+y}	$=$	$a^x a^y$	$\log_a xy$	$=$	$\log_a x + \log_a y$
a^{-x}	$=$	$\frac{1}{a^x}$	$\log_a \frac{1}{x}$	$=$	$-\log_a x$
a^0	$=$	1	$\log_a 1$	$=$	0
$(a^x)^r$	$=$	a^{xr}	$\log_a x^r$	$=$	$r\log_a x$

Logarithmen zu verschiedenen Basen:

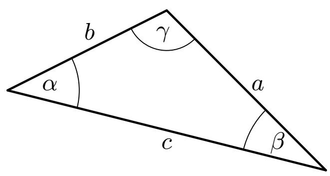
$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}, \quad \text{speziell: } \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

Kosinussatz

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

Pythagoras

$$c^2 = a^2 + b^2, \text{ falls } \gamma = 90^0$$

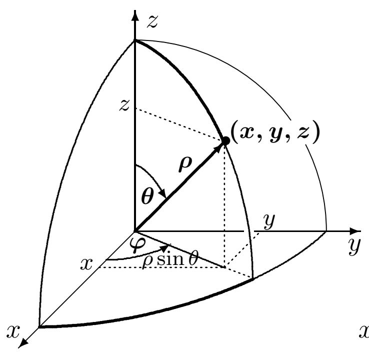


Sinussatz

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

Kugelkoordinaten

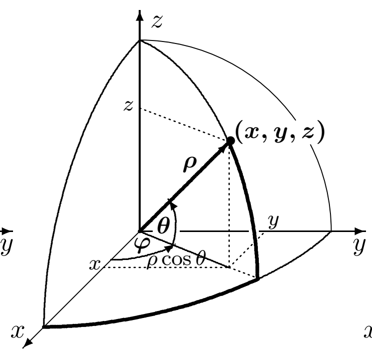
θ : Polabstand



$$x = \rho\sin\theta\cos\varphi$$
$$y = \rho\sin\theta\sin\varphi$$
$$z = \rho\cos\theta$$
$$dV = \rho^2\sin\theta\,d\rho\,d\theta\,d\varphi$$

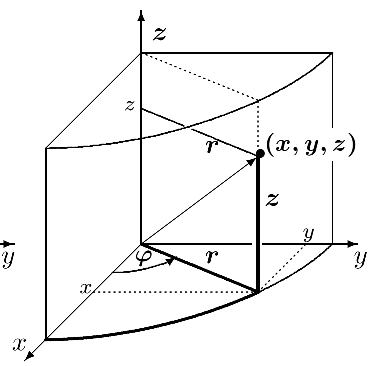
Kugelkoordinaten

θ : geographische Breite



$$x = \rho\cos\theta\cos\varphi$$
$$y = \rho\cos\theta\sin\varphi$$
$$z = \rho\sin\theta$$
$$dV = \rho^2\cos\theta\,d\rho\,d\theta\,d\varphi$$

Zylinderkoordinaten



$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi$$
$$z = z$$
$$dV = r\,dr\,d\varphi\,dz$$

Potenzreihen

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots \quad \text{für } x \in \mathbb{R}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - + \cdots \quad \text{für } x \in \mathbb{R}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - + \cdots \quad \text{für } x \in \mathbb{R}$$

$$\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots \quad \text{für } x \in \mathbb{R}$$

$$\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n} = 1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots \quad \text{für } x \in \mathbb{R}$$

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + - \cdots \quad \text{für } |x| \le 1$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + - \cdots \quad \text{für } -1 < x \le 1$$

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n = -(x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \cdots) \quad \text{für } -1 \le x < 1$$

$$\sqrt{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} x^n = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + - \cdots \quad \text{für } |x| \le 1$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} x^n = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 - + \cdots \quad \text{für } |x| < 1$$

endliche geom. Reihe	$\sum_{n=0}^{k} x^n$	$= 1 + x + x^2 + \cdots + x^k$	$= \frac{1-x^{k+1}}{1-x}$	für $x \ne 1$
geometrische Reihe	$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$	$= 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$	$= \frac{1}{1-x}$	für $\lvert x\rvert < 1$
harmonische Reihe	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$	$= 1 + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \cdots$	konvergent $\iff$	$x > 1$
binomische Reihe	$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{r}{n} x^n$	$= 1 + rx + \binom{r}{2} x^2 + \binom{r}{3} x^3 + \cdots$	$= (1+x)^r,$	$\lvert x\rvert \le 1,\ r > 0$; $\lvert x\rvert < 1,\ r < 0$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots = \infty$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \cdots = \ln 2$$

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots = e$$

$$1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + - \cdots = \frac{1}{e}$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 2$$

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + - \cdots = \frac{\pi}{4}$$

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + - \cdots = \frac{\pi^2}{12}$$

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}$$

wichtige Grenzwerte

$(n \to \infty,\ a > 0)$

		$\binom{a}{n} \to 0,\ a > -1$
$\sqrt[n]{a} \to 1$	$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \to e$	$\frac{a^n}{n!} \to 0$
$\sqrt[n]{n} \to 1$	$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e$	$\frac{n^n}{n!} \to \infty$
$\sqrt[n]{n!} \to \infty$	$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \to e^{-1}$	$\frac{a^n}{n^k} \to \infty \begin{cases} a > 1 \\ k \text{ fest} \end{cases}$
$\frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \to e$	$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \to e^x$	$a^n n^k \to 0 \begin{cases} \lvert a\rvert < 1 \\ k \text{ fest} \end{cases}$
$\frac{1}{n}\sqrt[n]{n!} \to \frac{1}{e}$	$\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \to e^{-x}$	$n(\sqrt[n]{a} - 1) \to \ln a,\ a > 0$

Differentiations– und Integrationsregeln

Produktregel:

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$$

partielle Integration:

$$\int u'v\,dx = uv - \int uv'\,dx$$

Quotientenregel:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

Vektorfunktionen

$$\left(\lambda\vec{u}\right)' = \lambda'\vec{u} + \lambda\vec{u}\,'$$

$$\left(\vec{u} \cdot \vec{v}\right)' = \vec{u}\,' \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{v}\,'$$

$$\left(\vec{u} \times \vec{v}\right)' = \vec{u}\,' \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{v}\,'$$

$$\left(\vec{u}(\lambda(t))\right)' = \vec{u}\,'(\lambda(t)) \cdot \lambda'(t)$$

Kettenregel:

$$\big(y(x(t))\big)' = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = y'(x(t)) \cdot x'(t)$$

Substitutionsregel:

$$\int f(x)\,dx = \int f(g(t))\,g'(t)\,dt \quad \text{, dabei ist } \begin{cases} x = g(t) \\ dx = g'(t)\,dt \end{cases}$$

f	f'
x^n	nx^{n-1}
$\frac{1}{x^n}$	$\frac{-n}{x^{n+1}}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
a^x	$a^x \ln a$
x^x	$x^x(1+\ln x)$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\cot x$	$\frac{-1}{\sin^2 x}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arccot} x$	$\frac{-1}{1+x^2}$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\tanh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x}$
$\coth x$	$\frac{-1}{\sinh^2 x}$
$\operatorname{arsinh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$\operatorname{arcosh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \quad x > 1$
$\operatorname{artanh} x$	$\frac{1}{1-x^2}, \quad \lvert x\rvert < 1$
$\operatorname{arcoth} x$	$\frac{1}{1-x^2}, \quad \lvert x\rvert > 1$
$\int g\,dx$	g

$$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}, \quad (n \neq -1) \qquad \int \frac{f'}{f}\,dx = \ln|f|$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|$$

$$\int \frac{dx}{x+a} = \ln|x+a|$$

$$\int \frac{dx}{(x+a)^2} = -\frac{1}{x+a}$$

$$\int \tan x\,dx = -\ln|\cos x|$$

$$\int \sin^2 ax\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4a}\sin 2ax$$

$$\int \cos^2 ax\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4a}\sin 2ax$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}$$

$$\int \mathrm{e}^{ax}\,dx = \frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax}$$

$$\int x\mathrm{e}^{ax}\,dx = \frac{ax-1}{a^2}\mathrm{e}^{ax}$$

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - x$$

$$\int x\ln x\,dx = x^2\left(\frac{\ln x}{2} - \frac{1}{4}\right)$$

$$\int \ln^2 x\,dx = x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x$$

$$\int \sin ax \cos ax\,dx = \frac{1}{2a}\sin^2 ax$$

$$\int \frac{dx}{\sin ax \cos ax} = \frac{1}{a}\ln|\tan ax|$$

$$\int \mathrm{e}^{ax}\sin bx\,dx = \frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx)$$

$$\int \mathrm{e}^{ax}\cos bx\,dx = \frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx)$$

$$\int x\sin ax\,dx = \frac{1}{a^2}\sin ax - \frac{x}{a}\cos ax$$

$$\int x\cos ax\,dx = \frac{1}{a^2}\cos ax + \frac{x}{a}\sin ax$$

Bezeichnungen: $X = ax^2 + bx + c, \quad a > 0, \quad \Delta = 4ac - b^2$

$$\int \frac{dx}{X} = \begin{cases} \dfrac{-2}{2ax+b} & (\Delta = 0) \\ \dfrac{2}{\sqrt{\Delta}}\arctan\dfrac{2ax+b}{\sqrt{\Delta}} & (\Delta > 0) \\ \dfrac{1}{\sqrt{-\Delta}}\ln\left|\dfrac{2ax+b-\sqrt{-\Delta}}{2ax+b+\sqrt{-\Delta}}\right| & \\ \dfrac{-2}{\sqrt{-\Delta}}\operatorname{artanh}\dfrac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}, \quad |2ax+b| < \sqrt{-\Delta} & (\Delta < 0) \\ \dfrac{-2}{\sqrt{-\Delta}}\operatorname{arcoth}\dfrac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}, \quad |2ax+b| > \sqrt{-\Delta} & \end{cases}$$

$$\int \frac{dx}{X^2} = \frac{2ax+b}{\Delta X} + \frac{2a}{\Delta}\int \frac{dx}{X}$$

$$\int \frac{x\,dx}{X} = \frac{1}{2a}\ln|X| - \frac{b}{2a}\int \frac{dx}{X}$$

$$\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+a^2} + a^2\operatorname{arsinh}\frac{x}{a}\right) = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+a^2} + a^2\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})\right)$$

$$\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2-a^2} - a^2\operatorname{arcosh}\frac{x}{a}\right) = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2-a^2} - a^2\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})\right)$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\arcsin\frac{x}{a}\right)$$

Griechisches Alphabet

A	α	alpha	I	ι	iota	R	ρ	rho
B	β	beta	K	κ	kappa	Σ	σ	sigma
Γ	γ	gamma	Λ	λ	lambda	T	τ	tau
Δ	δ	delta	M	μ	mü	Υ	υ	üpsilon
E	ϵ	epsilon	N	ν	nü	Φ	φ	phi
Z	ζ	zeta	Ξ	ξ	xi	X	χ	chi
H	η	eta	O	o	omicron	Ψ	ψ	psi
Θ	θ	theta	Π	π	pi	Ω	ω	omega

Deutsches Alphabet

a	j	s
b	k	t
c	l	u
d	m	v
e	n	w
f	o	x
g	p	y
h	q	z
i	r	

REPETITORIUM

ANALYSIS

TEIL 2

Steffen Timmann

2. Auflage, Ebook

Binomi Verlag , Schützenstr. 9, 30890 Barsinghausen

Telefon	05105 6624000
E–Mail	verlag@binomi.de
Internet	www.binomi.de

Zu beziehen beim Verlag, www.binomi.de

ISBN **978–3–923 923–76–2**

Hannover 04/21

Vorwort

Der vorliegende 2. Band des Analysis Repetitoriums schließt sich nahtlos an den 1. Band an. Die Numerierung wird fortgesetzt. Verweise auf Kapitel 1 bis 5, wie z.B. „3.2.1.A“, beziehen sich auf den 1. Teil (2. und spätere Auflagen).

Auf eine Einführung der komplexen Zahlen wird auch in diesem Band verzichtet. Grundkenntnisse über $\mathbb{C}$ werden vorausgesetzt.

Die im Vorwort des ersten Bandes gemachten Bemerkungen gelten auch für den 2. Band, insbesondere der Hinweis, dass ein Repetitorium keine systematische Einführung in die Analysis ist, sondern eine komprimierte wiederholende Zusammenfassung von Ergebnissen und Definitionen. Es werden freimütig Sätze und Methoden erwähnt, die normalerweise erst später oder in anderen Vorlesungen gebracht werden. Systematische Einführungen findet man in Lehrbüchern. Dazu verweise ich auf die Literaturverzeichnisse im Anhang des 1. und 2. Bandes.

Die zweite Auflage von Band 2 unterscheidet sich von der vorhergehenden nur durch redaktionelle Änderungen und weniger Druckfehler.

Hannover, den 1.9.2006

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 6

Grundlagen

6.1 Metrische Räume

Um die Analysis auf mehrere Variable zu übertragen, muss man von der Zahlengeraden zu allgemeineren Strukturen übergehen. Man kann sich auf (evt sogar endlich dimensionale) normierte lineare Räume beschränken. Man kann andererseits auch bei metrischen oder beliebigen topologischen Räumen anfangen. Wir geben für topologische Räume nur die Definition und beschränken uns dann auf metrische Räume. Nach einer Zusammenstellung der wichtigsten topologischen Begriffe und Sachverhalte werden diese auf normierte Vektorräume spezialisiert.

6.1.1 Topologische Räume

Sei X eine nicht-leere Menge. Ein System $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ von Teilmengen von X heißt *Topologie* auf X, wenn es die folgenden Bedingungen erfüllt:

1) Die leere Menge $\emptyset$ und der ganze Raum X gehören zu $\mathcal{T}$.
2) Beliebige Vereinigungen von Mengen aus $\mathcal{T}$ gehören ebenfalls zu $\mathcal{T}$.
3) Endliche Durchschnitte von Mengen aus $\mathcal{T}$ gehören auch zu $\mathcal{T}$.

Ein *topologischer Raum* $(X, \mathcal{T})$ ist eine nicht-leere Menge X zusammen mit einer Topologie $\mathcal{T}$ auf X.

Die Elemente von $\mathcal{T}$ heißen *offen*, ihre Komplemente *abgeschlossen.*

Ein System $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ von offenen Mengen heißt *Basis* der Topologie $\mathcal{T}$, wenn jede offene Menge $G \in \mathcal{T}$ Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{B}$ ist. Äquivalent dazu ist

$$\mathcal{B} \text{ ist Basis von } \mathcal{T} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall G \in \mathcal{T}\ \forall x \in G\ \exists B \in \mathcal{B}\ :\ x \in B \subset G\ .$$

Man sagt, dass der topologische Raum X das *2. Abzählbarkeitsaxiom* erfüllt, wenn seine Topologie eine abzählbare Basis besitzt. Zum 1. Abzählbarkeitsaxiom siehe 6.1.3.d.

6.1.2 Metrische Räume

Sei X eine nicht leere Menge. Eine Abbildung $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ heißt *Metrik* oder *Abstand* auf X, falls für alle $x, y, z \in X$ gilt

(1)	*Positivität*	$d(x,y) \ \geq\ 0$
(2)	*Definitheit*	$d(x,y) = 0 \iff x = y$
(3)	*Symmetrie*	$d(x,y) \ =\ d(y,x)$
(4)	*Dreiecksungleichung*	$d(x,z) \ \leq\ d(x,y) + d(y,z)$

Ein *metrischer Raum* ist eine nicht-leere Menge X zusammen mit einer *Metrik* d auf X. Weiter unten (6.1.3.b) wird ausgeführt, dass metrische Räume spezielle topologische Räume sind. In ihnen gelten z.B. verschiedene Trennungsaxiome und auch das 1. Abzählbarkeitsaxiom (aber i.a. nicht das 2.).

Beispiele:

1) Ist X ein normierter linearer Raum mit der Norm $\|\,.\,\|$, so ist $d(x,y) := \|x - y\|$ eine Metrik auf X (siehe Abschnitt 6.2.1).
   Insbesondere ist der $\mathbb{R}^n$ mit dem euklidischen Abstand $d(x,y) := \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}$ ein metrischer Raum, ebenso die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ mit dem Abstand $d(z,w) := |z - w|$.

2) Ist (X,d) ein metrischer Raum und $\emptyset \neq Y \subset X$, so ist auch Y zusammen mit der Einschränkung $d_Y := d\big|_{Y \times Y}$ ein metrischer Raum.
   (Y, d_Y) heißt *Teilraum* von (X,d).

3) Sei X eine beliebige nicht leere Menge. $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $d(x,y) := 1$ für $x \neq y$ und $d(x,x) := 0$.
   Dann ist (X,d) ein metrischer Raum. d heißt *diskrete Metrik* auf X.
   In einem diskreten metrischen Raum ist $\{x\} = U_{1/2}(x)$ eine offene Umgebung von x, die nur x enthält.

Sei (X,d) ein metrischer Raum und $M \subset X$ eine nicht-leere Teilmenge von X. Dann heißt $\operatorname{diam} M := \sup\{\, d(x,y)\,;\ x, y \in M\,\}$ der *Durchmesser* von M. Evt ist $\operatorname{diam} M = \infty$. Für die leere Menge setzt man $\operatorname{diam} \emptyset := 0$.

Ist $\operatorname{diam} M < \infty$, so heißt M *beschränkt*, andernfalls *unbeschränkt*.

$M \subset X$ ist genau dann beschränkt, wenn M in einer ε-Umgebung eines Punktes $x \in X$ enthalten ist.

Der Abstand zweier nicht-leerer Teilmengen A, B eines metrischen Raumes (X, d) und der Abstand eines Punktes zu einer Menge werden definiert durch

$$d(A, B) \ := \ \inf \{ d(a, b) \, ; \, a \in A, b \in B \} \ , \quad d(a, B) \ := \ d(\{a\}, B) \ .$$

Es ist $d(A, B) = d(B, A)$ und $d(A, B) = 0$, falls $A \cap B \neq \emptyset$.
Der Abstand zweier disjunkter, auch zweier abgeschlossener disjunkter Mengen kann Null sein. Dagegen ist der Abstand einer kompakten und einer dazu disjunkten abgeschlossenen Menge stets positiv (siehe Aufgabe 6.4.1.B) .

6.1.3 Offene Mengen, innere Punkte, Umgebungen

Die meisten im Abschnitt 1.7 für die reellen Zahlen mit der Betragsmetrik gegebenen topologischen Definitionen übertragen sich auf beliebige metrische Räume. Man muss nur $|x-y|$ durch $d(x, y)$ ersetzen. Viele Begriffe sind auch in allgemeinen topologischen Räumen sinnvoll, insbesondere dann, wenn sie allein mit Hilfe von Umgebungen definiert werden können.

a) Umgebungen, innere Punkte

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Ist $\varepsilon > 0$ und $x \in X$, so heißt

$$U_\varepsilon(x) \ := \ \{ y \in X \, ; \, d(x, y) < \varepsilon \}$$

ε-*Umgebung* von x oder auch ε-*Kugel* um x. (ε-Umgebungen sind offen!)

Eine Teilmenge $U \subset X$ heißt *Umgebung* von x und x heißt *innerer Punkt* von U, wenn U eine ε-Umgebung von x enthält.

In einem topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt eine Teilmenge $U \subset X$ *Umgebung* von x, wenn U eine offene Menge $G \in \mathcal{T}$ enthält mit $x \in G \subset U$.

$M^0 := \{ x \, ; \, x \text{ ist innerer Punkt von } M \}$ heißt *Inneres* oder *innerer Kern* von M. Sicher gilt $M^0 \subset M$.

Der innere Kern von M ist die Vereinigung aller offenen Teilmengen von M :

$$M^0 \ = \ \bigcup \{ G \subset X \, ; \, G \subset M, \ G \text{ offen} \} \ .$$

b) Offene Mengen

Eine Teilmenge $M \subset X$ heißt genau dann *offen*, wenn sie nur innere Punkte enthält, also genau dann, wenn sie mit jedem Punkt $x \in M$ auch eine ε-Umgebung von x enthält. ε-Umgebungen sind spezielle offene Mengen.

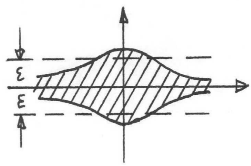
$M \subset X$ ist genau dann offen, wenn das Komplement $X \setminus M$ abgeschlossen ist.

Das System der offenen Mengen eines metrischen Raumes (X, d) bildet eine Topologie $\mathcal{T}_d$ auf X. D.h. beliebige Vereinigungen und endliche Durchschnitte offener Mengen sind wieder offen und die leere Menge und der ganze Raum gehören zu $\mathcal{T}_d$. Man nennt $\mathcal{T}_d$ die von der Metrik *d erzeugte Topologie.* Topologische Begriffe in metrischen Räumen beziehen sich immer auf diese Topologie. Die ε-Umgebungen, insbesondere die mit dem Radius $\varepsilon = \frac{1}{n}$, bilden eine Basis der Topologie $\mathcal{T}_d$.

c) Umgebungen von Mengen

$U \subset X$ heißt *Umgebung* einer Teilmenge $M \subset X$, wenn U eine offene Obermenge von M enthält.

Ist M nicht leer und $\varepsilon > 0$, so heißt $U_\varepsilon(M) := \{\, x \in X\,;\, d(x, M) < \varepsilon \,\}$ eine *ε-Umgebung von M* .



Achtung! Es gibt Umgebungen von Mengen, die keine ε-Umgebungen enthalten. Z.B. ist $\left\{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2\,;\, |y| < \frac{1}{1+x^2} \,\right\}$ eine (offene) Umgebung der x-Achse $\mathbb{R}_x := \{\, (x, 0)\,;\, x \in \mathbb{R} \,\}$, die keine ε-Umgebung von $\mathbb{R}_x$ enthält.

d) Umgebungsbasen

Ein System $\mathcal{B}$ von Umgebungen eines Punktes $x \in X$ heißt *Umgebungsbasis* von x, wenn jede Umgebung U von x eine Umgebung aus $\mathcal{B}$ enthält.

In metrischen Räumen bilden die offenen und die abgeschlossenen Umgebungen eines Punktes Umgebungsbasen dieses Punktes, denn jede Umgebung enthält eine offene und eine abgeschlossene Umgebung. Dagegen bilden die kompakten Umgebungen i.a. keine Umgebungsbasis, z.B. nicht in unendlich dimensionalen normierten Räumen (siehe Aufgabe 6.4.4.F). Dort gibt es gar keine kompakten Umgebungen.

In metrischen Räumen (X, d) besitzt jeder Punkt eine abzählbare Umgebungsbasis, d.h. metrische Räume erfüllen das *1. Abzählbarkeitsaxiom.*
Eine spezielle abzählbare Umgebungsbasis von $x \in X$ bilden die ε-Umgebungen $U_{1/n}(x)$ mit dem Radius $1/n$.

Metrische Räume erfüllen dagegen i.a. nicht das *2. Abzählbarkeitsaxiom*, d.h. die Topologie $\mathcal{T}_d$ eines metrischen Raumes besitzt i.a. keine abzählbare Basis.

6.1.4 Abgeschlossene Mengen

a) Berührungspunkte

Sei (X, d) ein metrischer Raum, x ein Punkt aus X und $M \subset X$. x heißt *Berührungspunkt* von M, wenn jede ε-Umgebung von x die Menge M trifft:

$$x \text{ ist Berührungspunkt von } M \quad :\Longleftrightarrow \quad \forall\, \varepsilon > 0 \;:\; M \cap U_\varepsilon(x) \neq \emptyset\ .$$

b) Abgeschlossene Hülle

Die Menge $\overline{M} := \{ x\,;\, x \text{ ist Berührungspunkt von } M \}$ heißt *abgeschlossene Hülle* von M. Sicher gilt $M \subset \overline{M}$.

Die abgeschlossene Hülle von M ist die disjunkte Vereinigung der inneren und der Randpunkte von M : $\overline{M} = M^0 \cup \partial M$, $M^0 \cap \partial M = \emptyset$.

Die Hülle $\overline{M}$ ist auch disjunkte Vereinigung der isolierten und der Häufungspunkte von M .

Sie ist der Durchschnitt aller abgeschlossenen Obermengen:

$$\overline{M} \;=\; \bigcap \{ F \subset X\,;\, M \subset F,\; F \text{ abgeschlossen} \} \;.$$

Achtung! In beliebigen metrischen Räumen ist die abgeschlossene Hülle einer ε-Umgebung i.a. echt in der Menge $\{ y \in X\,;\, d(x,y) \leq \varepsilon \}$ enthalten (z.B. in diskreten metrischen Räumen 6.1.2.3) . In normierten linearen Räumen stimmen diese Mengen aber überein.

Man sagt, eine Teilmenge $M \subset G$ liegt *dicht* in G, wenn $G \subset \overline{M}$.
Z.B. liegen die rationalen Zahlen dicht in $\mathbb{R}$ (bzgl. der Betragsmetrik).
Trivialerweise liegt eine Menge stets dicht in ihrer abgeschlossenen Hülle, aber i.a. liegt der innere Kern M^0 einer Menge nicht dicht in M.

c) Abgeschlossene Mengen

Eine Menge M heißt *abgeschlossen*, wenn sie alle ihre Berührungspunkte enthält, also genau dann, wenn sie mit ihrer Hülle $\overline{M}$ übereinstimmt. Sie ist auch genau dann abgeschlossen, wenn sie alle ihre Häufungspunkte enthält.

$M \subset X$ ist genau dann abgeschlossen, wenn das Komplement $X \backslash M$ offen ist.

Die leere Menge $\emptyset$ und der ganze Raum X sind sowohl offen, als auch abgeschlossen. In zusammenhängenden, speziell in normierten linearen Räumen sind dies die einzigen offen-und-abgeschlossenen Mengen.
Natürlich gibt es (außer in speziellen Räumen) Mengen, die weder offen, noch abgeschlossen sind.

Endliche Vereinigungen und beliebige Durchschnitte abgeschlossener Mengen sind wieder abgeschlossen.

d) Randpunkte

x heißt *Randpunkt* von M, wenn x Berührungspunkt sowohl von M, als auch vom Komplement $X \backslash M$ ist:

$$\begin{aligned} &x \text{ ist Randpunkt von } M \\ &\quad :\Longleftrightarrow \quad \forall\, \varepsilon > 0 \;:\; M \cap U_\varepsilon(x) \neq \emptyset \;\text{ und }\; (X \backslash M) \cap U_\varepsilon(x) \neq \emptyset \;. \end{aligned}$$

$\partial M := \{ x \,; x \text{ ist Randpunkt von } M \}$ heißt *Rand* von M.
Der Rand einer Menge M ist stets abgeschlossen und enthält keine inneren Punkte von M. Jedoch kann $(\partial M)^0 \neq \emptyset$ sein. Z.B. ist in der üblichen Metrik $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$.

Es gilt $\partial M = \partial(X \backslash M) = \overline{M} \cap \overline{X \backslash M}$.

6.1.5 Häufungspunkte

a) Häufungspunkte

Sei (X, d) ein metrischer Raum, x ein Punkt aus X und $M \subset X$.
Ein Punkt $x \in X$ heißt *Häufungspunkt* von M, wenn jede ε-Umgebung von x einen von x verschiedenen Punkt aus M enthält. x ist also genau dann Häufungspunkt von M, wenn x Berührungspunkt von $M \backslash \{x\}$ ist. Die Menge der Häufungspunkte von M wird oft mit M' bezeichnet.

$$M' \;:=\; \{ x \in X \,; x \text{ Häufungspunkt von } M \} \;=\; \left\{ x \in X \,; x \in \overline{M \backslash \{x\}} \right\} .$$

Ist x Häufungspunkt von M, so enthält jede ε-Umgebung von x auch unendlich viele Elemente vom M und x ist Häufungswert (sogar Grenzwert) einer Folge von Elementen aus $M \backslash \{x\}$. (Hier braucht man, dass in metrischen Räumen jeder Punkt eine abzählbare Umgebungsbasis besitzt.)

Die Menge der Häufungspunkte einer Menge M ist stets abgeschlossen (siehe Aufgabe 1.8.2.B) . Sie kann natürlich leer sein.

Man beachte, dass in beliebigen metrischen Räumen innere Punkte von M nicht notwendig Häufungspunkte sein müssen (z.B. nicht in diskreten metrischen Räumen 6.1.2.3) . In normierten linearen Räumen ist dies aber richtig.

b) Isolierte Punkte

Ein Punkt $x \in M$ heißt *isolierter Punkt* von M, wenn es eine ε-Umgebung von x gibt, die außer x keinen Punkt aus M enthält. Also

$$x \text{ ist isolierter Punkt von } M \quad :\Longleftrightarrow \quad \exists\, \varepsilon > 0 \;:\; M \cap U_\varepsilon(x) = \{x\} .$$

Die abgeschlossene Hülle einer Menge M ist die disjunkte Vereinigung der Häufungspunkte und der isolierten Punkte von M.

Nicht jeder isolierte Punkt von M ist Randpunkt von M. Z. B. ist in diskreten metrischen Räumen M jeder Punkt sowohl innerer, als auch isolierter Punkt von M und kein Punkt von M ist Häufungspunkt oder Randpunkt von M. Derartige Sonderfälle können in normierten linearen Räumen nicht auftreten.

6.1.6 Konvergenz

a) Folgen

Sei (X, d) ein metrischer Raum und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, kurz (x_n) , eine Folge aus X (also eine Abbildung von $\mathbb{N}$ in den metrischen Raum X).

(x_n) heißt *beschränkt*, wenn die Menge der Folgenglieder x_n beschränkt ist, also innerhalb einer festen Kugel liegt:

$$(x_n) \text{ beschränkt} \iff \exists\, x \in X\ \exists\, \varepsilon > 0 \ :\ \{\, x_n\,;\, n \in \mathbb{N}\,\} \subset U_\varepsilon(x)\ .$$

(x_n) heißt *konvergent*, wenn es ein $\xi \in X$ und zu jedem $\varepsilon > 0$ einen Index n_0 gibt, von dem ab $d(x_n, \xi) < \varepsilon$ ist. Ein solches ξ heißt *Grenzwert* der Folge (x_n).

$$\begin{aligned}
&\xi = \lim_{n\to\infty} x_n \quad (\text{bzw}\ \ x_n \to \xi \ \text{ für }\ n \to \infty\ )\\
&:\iff \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\, n \geq n_0 \ :\ d(x_n, \xi) < \varepsilon\\
&\iff \text{Für alle } \ \varepsilon > 0 \ \text{ gilt } \ d(x_n, \xi) < \varepsilon \ \text{ für } \textit{fast alle } n\\
&\iff \text{Für alle } \ \varepsilon > 0 \ \text{ gilt } \ d(x_n, \xi) > \varepsilon \ \text{ für } \textit{höchstens endlich viele } n\ .
\end{aligned}$$

In metrischen Räumen hat eine Folge höchstens einen Grenzwert. Sie heißt *divergent*, wenn sie keinen besitzt.
Konvergente Folgen sind beschränkt, unbeschränkte Folgen sind divergent.

Teilfolgen und Häufungswerte von Folgen in metrischen Räumen sind genauso definiert wie in $\mathbb{R}$ (siehe Abschnitt 2.1.4) .

In metrischen Räumen besitzt jeder Punkt eine abzählbare Umgebungsbasis. Deshalb gilt auch hier, dass ein Punkt ξ genau dann Häufungswert einer Folge (x_n) ist, wenn es eine gegen ξ konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_k$ gibt.

b) Cauchy-Folgen

Die Folge (x_n) heißt *Cauchy-Folge* , wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ einen Index $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, von dem ab alle Abstände $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ sind.

$$(x_n) \text{ ist Cauchy-Folge } :\iff \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\, n, m \geq n_0 \ :\ d(x_n, x_m) < \varepsilon\ .$$

Konvergente Folgen sind Cauchy-Folgen.

Die Umkehrung gilt nur in vollständigen Räumen.

c) Konvergenz von Funktionenfolgen

Sei (f_n) eine Folge von Funktionen $f_n\colon D \to X$ von einer Menge D in einen metrischen Raum (X,d). Man sagt, die Funktionenfolge (f_n) konvergiert *punktweise* auf einer Teilmenge $M \subset D$ gegen eine Funktion $f\colon M \to X$, wenn für alle $x \in M$ die Folgen $(f_n(x))_n$ in X gegen $f(x)$ konvergieren, also

$$(f_n) \text{ konvergiert auf } M \text{ punktweise gegen } f \quad :\Longleftrightarrow \\ \forall \varepsilon > 0 \; \forall x \in M \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_0 \; : \; d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon \; .$$

Eine Folge von Funktionen $f_n\colon D \to X$ heißt auf D *gleichmäßig konvergent* gegen die Grenzfunktion f, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ einen Index $n_0 > 0$ gibt, so dass für alle $x \in D$ und für alle $n > n_0$ gilt $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$.
Formal geschrieben:

$$(f_n) \text{ konvergiert auf } D \text{ gleichmäßig gegen } f \quad :\Longleftrightarrow \\ \forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall x \in D \; \forall n \geq n_0 \; : \; d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon \; .$$

Jede gleichmäßig konvergente Folge ist punktweise konvergent, aber natürlich nicht umgekehrt. (Siehe dazu auch Abschnitt 2.5.2.)

Die Grenzfunktion einer gleichmäßig konvergenten Folge stetiger Funktionen ist stetig (siehe Abschnitt 3.2.7).
Zur Integrierbarkeit der Grenzfunktion siehe Abschnitte 5.1.10 und 9.2.3.
Zur Differenzierbarkeit der Grenzfunktion siehe Abschnitt 4.1.5.

6.1.7 Vollständigkeit

Ein metrischer Raum (X,d) heißt *vollständig*, wenn jede Cauchy-Folge in X einen Grenzwert in X besitzt.

Beispiele:

1) Endlich dimensionale normierte lineare Räume sind vollständig.
2) Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen ist mit der Betragsmetrik nicht vollständig.
3) Die Menge $C[a,b]$ der auf einem Intervall $[a,b] \subset \mathbb{R}$ stetigen reellen Funktionen ist mit der Supremumsnorm vollständig, mit der Integralnorm nicht. (Beweis siehe Aufgabe 6.4.3.B)

Ein Teilraum eines vollständigen metrischen Raumes ist genau dann vollständig, wenn er abgeschlossen ist. Beweis siehe Aufgabe 6.4.3.A .
Kompakte Teilräume beliebiger metrischer Räume sind vollständig.

Cantorscher Durchschnittssatz (Beweis siehe Aufgabe 6.4.3.C)
Sei X ein vollständiger metrischer Raum. Sei (F_n) eine Folge nicht-leerer abgeschlossener Teilmengen von X derart, dass $F_0 \supset F_1 \supset \ldots \supset F_n \supset \ldots$ und $\operatorname{diam} F_n \to 0$. Dann ist der Gesamtdurchschnitt $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$.

Jeder metrische Raum kann als dichte Teilmenge eines vollständigen metrischen Raumes aufgefasst werden. Genauer:

Ist (X, d) ein beliebiger metrischer Raum, so existiert ein vollständiger metrischer Raum (Y, δ) und eine isometrische Abbildung $\varphi\colon X \to Y$ derart, dass $\varphi(X)$ dicht in Y ist.
Y heißt dann *Vervollständigung* oder *vollständige Hülle* von X.

(φ heißt *isometrisch*, wenn $\delta(\varphi(x), \varphi(y)) = d(x, y)$ für alle $x, y \in X$.)

6.1.8 Kompaktheit

Sei (X, d) ein metrischer Raum und M eine Teilmenge von X. Ein System $\mathcal{U} = \{\, U_j \,;\, j \in J \,\}$ von offenen Mengen U_j heißt *offene Überdeckung* von M, wenn $M \subset \bigcup_{j\in J} U_j$.

M heißt *kompakt (überdeckungskompakt)*, wenn jede offene Überdeckung von M eine endliche Teilüberdeckung enthält.

Durch Übergang zu Komplementen erhält man eine äquivalente Bedingung:

Eine Teilmenge $M \subset X$ ist genau dann kompakt, wenn für jede Familie $\mathcal{F} = \{\, F_j \,;\, j \in J \,\}$ abgeschlossener Teilmengen von X gilt:
Ist $\bigcap\{F_j \cap M \,;\, j \in J\,\} = \emptyset$, so gibt es bereits eine endliche Teilfamilie $\{\, F_{j_k} \,;\, j = 1, \ldots, m \,\}$ mit leerem Durchschnitt $\bigcap_{k=1}^{m}(F_{j_k} \cap M) = \emptyset$.

Eine Teilmenge M eines metrischen Raumes ist genau dann kompakt, wenn sie *folgenkompakt* ist, d.h. wenn jede Folge aus M einen Häufungswert in M, bzw eine in M konvergente Teilfolge besitzt. (Dieser Satz gilt nicht in beliebigen topologischen Räumen!) Für einen Beweis siehe Aufgabe 6.4.4.A.

Jede kompakte Teilmenge eines metrischen Raumes ist beschränkt, abgeschlossen und vollständig.
Im $\mathbb{R}^n$, aber nicht in unendlich dimensionalen normierten Räumen ist jede abgeschlossene und beschränkte Menge auch kompakt (Satz von Heine-Borel).

Eine abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge ist kompakt.

Mengen mit nur endlich vielen Elementen sind stets kompakt.

Kompakte Teilmengen metrischer Räume besitzen abzählbare dichte Teilmengen. Man sagt, sie sind *separabel.* Beweis siehe Aufgabe 6.4.4.B.

Stetige Bilder kompakter Mengen sind kompakt. (Der Beweis von 3.3.10.A lässt sich auf metrische Räume übertragen.)

6.1.9 Zusammenhang

Eine Teilmenge $A \subset X$ eines metrischen Raumes X heißt *zusammenhängend*, wenn für alle offenen Teilmengen $O_1, O_2 \subset X$ gilt:

$$A \cap O_1 \neq \emptyset\ , \quad A \subset O_1 \cup O_2\ , \quad A \cap O_1 \cap O_2 = \emptyset \quad \Longrightarrow \quad A \cap O_2 = \emptyset\ .$$

Insbesondere ist der ganze Raum X genau dann zusammenhängend, wenn $\emptyset$ und X die einzigen offenen und abgeschlossenen Teilmengen sind.

Zusammenhängende Mengen in $\mathbb{R}$ (bzgl. der Betragsmetrik) sind genau die Intervalle.
In einem diskreten metrischen Raum sind nur die einelementigen Mengen und die leere Menge zusammenhängend.

In normierten linearen Räumen sind offene Mengen genau dann zusammenhängend, wenn sie bogenweise (polygonal) zusammenhängend sind (6.4.2.B).
Dabei heißt eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ *bogenweise (polygonal) zusammenhängend*, wenn sich je zwei Punkte $x, y \in A$ in A durch einen Bogen bzw einen Streckenzug verbinden lassen.

Sind $A, B \subset X$ zusammenhängend und $A \cap B \neq \emptyset$, so ist auch $A \cup B$ zusammenhängend. (Beweis siehe Aufgabe 6.4.2.D)

Mit A ist auch die abgeschlossene Hülle $\overline{A}$ und jede Menge B mit $A \subset B \subset \overline{A}$ zusammenhängend. (Beweis siehe Aufgabe 6.4.2.C)
Das Innere einer zusammenhängenden Menge ist i.a. nicht zusammenhängend.

Jeder Punkt x eines metrischen Raumes X liegt in einer maximalen zusammenhängenden Teilmenge, einer sog. *Zusammenhangskomponente*

$$Z(x) \ := \ \bigcup \{\, A \subset X\, ;\, x \in A,\ A \text{ zusammenhängend} \,\}\ .$$

Die Zusammenhangskomponenten sind zusammenhängend und abgeschlossen. Sie enthalten jede zusammenhängende Obermenge von x. Sie können einelementig sein, wie z.B. in den rationalen Zahlen mit der üblichen Metrik.

Stetige Bilder zusammenhängender Mengen sind zusammenhängend (Beweis siehe Aufgabe 6.4.2.A) . Für Funktionen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist das der Zwischenwertsatz.

6.2 Normierte lineare Räume

Grundbegriffe der Linearen Algebra wie z.B. *Vektorraum* und *lineare Abbildung* werden vorausgesetzt. Falls nichts anderes gesagt wird, sind die im folgenden betrachteten Räume stets Vektorräume über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

6.2.1 Normierte Räume

Sei X ein Vektorraum über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Eine Abbildung $\|\,.\,\|\colon X \to \mathbb{R}$ heißt *Norm* auf X, falls für alle $x, y \in X$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt

(1)	*Positivität*	$\|x\| \geq 0$
(2)	*Definitheit*	$\|x\| = 0 \iff x = 0$
(3)	*Homogenität*	$\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$
(4)	*Dreiecksungleichung*	$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Ein *normierter linearer Raum* oder auch einfach *normierter Raum* $(X, \|\,.\,\|)$ ist ein Vektorraum zusammen mit einer Norm. Ist $\|\,.\,\|$ eine Norm auf X, so wird durch $d(x,y) := \|x - y\|$ eine *Metrik* auf X erklärt. Topologische Begriffe in normierten Räumen beziehen sich immer auf diese Metrik.

Jeder Vektorraum besitzt eine Basis und jeder normierte Raum besitzt eine Basis aus *Einheitsvektoren* e_i (i aus einer geeigneten Indexmenge I) .

Ein vollständiger normierter linearer Raum heißt *Banachraum.*

Jeder normierte Raum X lässt sich isometrisch isomorph in einen vollständigen Raum Y derart einbetten, dass er dicht in Y liegt. Y ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt und heißt die *Vervollständigung* von X.

Äquivalenz von Normen

Zwei Normen $\|\,.\,\|_1$ und $\|\,.\,\|_2$ in einem linearen Raum X heißen *äquivalent*, wenn es zwei positive Konstanten $\alpha, \beta > 0$ gibt derart, dass für alle $x \in X$ gilt $\alpha\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta\|x\|_1$.

Sind zwei Normen äquivalent, so bilden die ε-Kugeln bzgl der einen Norm eine Umgebungsbasis bzgl der anderen. Also sind offene Mengen bzgl der einen Norm auch offen bzgl der anderen. Eigenschaften wie Kompaktheit, Konvergenz, Stetigkeit hängen nur von der Topologie ab. Gelten sie bzgl einer Norm, dann auch bzgl jeder dazu äquivalenten.

Äquivalente Normen erzeugen dieselbe Topologie.

Auf endlich dimensionalen Vektorräumen sind alle Normen äquivalent.
(Beweis siehe Aufgabe 6.4.5.F)

Auf dem unendlich dimensionalen Vektorraum $C[a,b]$ sind z.B. die Supremumsnorm und die Integralnorm nicht äquivalent! (Beweis siehe Aufgabe 6.4.3.B)

6.2.2 Hilberträume

Sei X ein Vektorraum über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.
Eine Abbildung $\langle\ ,\ \rangle : X \times X \to \mathbb{K}$ heißt *inneres Produkt* auf X, wenn gilt

(1) *Positive Definitheit* $\langle x, x \rangle > 0$ für alle $x \neq 0$

(2) *(Bi-) Linearität* $\langle \lambda x + \mu y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \mu \langle y, z \rangle$

(3) *Symmetrie* $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$

Aus (2) und (3) folgt $\langle x, \lambda y + \mu z \rangle = \overline{\lambda} \langle x, y \rangle + \overline{\mu} \langle x, z \rangle$.

Auf einem Raum mit innerem Produkt wird durch $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ eine Norm definiert. Für diese Norm gilt die *Schwarzsche Ungleichung*

$$|\langle x, y \rangle| \ \leq \ \|x\| \cdot \|y\| \ .$$

Das Skalarprodukt ist stetig bzgl dieser Norm (genauer: bzgl der Produkttopologie auf dem Produktraum $X \times X$). Insbesondere gilt

$$x_k \to x \ , \ y_k \to y \quad \Longrightarrow \quad \langle x_k, y_k \rangle \to \langle x, y \rangle \ .$$

Ein Vektorraum mit innerem Produkt heißt *Hilbertraum*, wenn er bzgl dieser Norm vollständig ist.

Jeder Vektorraum X mit innerem Produkt lässt sich isometrisch isomorph in einen Hilbertraum Y derart einbetten, dass er dicht in Y liegt. Y ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt und heißt die *Vervollständigung* von X.

Ist X ein Vektorraum mit innerem Produkt und abzählbarer Dimension, so besitzt X eine Orthonormalbasis $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$, also eine Basis aus Einheitsvektoren mit $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$.

Eine Norm wird genau dann von einem inneren Produkt erzeugt, wenn sie die sogenannte *Parallelogramm-Regel* erfüllt: (Beweis siehe Aufgabe 6.4.6.B)

$$\|x + y\|^2 \ + \ \|x - y\|^2 \ = \ 2\,\|x\|^2 \ + \ 2\,\|y\|^2 \ .$$

6.2.3 Beispiele

a) Der euklidische bzw unitäre $\mathbb{K}^n$

Der $\mathbb{R}^n$ mit der euklidischen Norm $\|x\| := \|x\|_2 := (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{1/2}$ heißt n-dimensionaler *euklidischer Raum.* Er ist vollständig, also ein Banachraum.

Seine Norm wird von dem inneren Produkt $\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^n x_i y_i$ erzeugt. Also ist er ein Hilbertraum.

Der $\mathbb{C}^n$ mit der Norm $\|z\| := (|z_1|^2 + \ldots + |z_n|^2)^{1/2}$ heißt n-dimensionaler *unitärer Raum.* Er ist ein Banach- und Hilbertraum. Seine Norm wird von dem inneren Produkt $\langle z, w \rangle := \sum_{i=1}^n z_i \overline{w_i}$ erzeugt.

b) Der $C[a, b]$ mit der Supremumsnorm

Der Raum $C[a, b]$ der stetigen Funktionen $f\colon [a, b] \to \mathbb{K}$ auf einem Intervall $[a, b]$ ist zusammen mit der *Supremumsnorm*

$$\|f\|_\infty \;:=\; \sup \{ \, |f(x)| \, ; \, x \in [a, b] \, \}$$

ein unendlich dimensionaler normierter linearer Raum. Er ist vollständig, also ein Banachraum. Seine Norm wird von keinem inneren Produkt erzeugt (siehe Aufgabe 6.4.6.B) .

(Man kann auch entsprechend Räume beschränkter $\mathbb{K}$-wertiger Funktionen auf allgemeineren Grundmengen betrachten.)

c) Der $C[a, b]$ mit der p-Integralnorm

Für festes $1 \le p < \infty$ wird auf $C[a, b]$ durch $\|f\|_p \;:=\; \left[\int_a^b |f(x)|^p \, dx \right]^{1/p}$ eine Norm, die sog. *p-Integralnorm (p-Norm)* definiert.
Bzgl dieser Normen ist der $C[a, b]$ nicht vollständig, also kein Banachraum.

Man kann den so normierten $C[a, b]$ aber isometrisch isomorph in den Banachraum L^p der Lebesgue-p-integrierbaren Funktionen auf $[a, b]$ einbetten.

Für $p = 2$ wird die p-Norm durch das innere Produkt $\langle f, g \rangle := \displaystyle\int_a^b f(x) \, \overline{g(x)} \, dx$ erzeugt.

d) Der Raum ℓ^2 der Folgen mit konvergenter Quadratsumme

Auf dem Raum $\ell^2 := \left\{ \, (x_i) \, ; \, \sum |x_i|^2 < \infty \, \right\}$ der reellen bzw komplexen Folgen mit konvergenter Quadratsumme $\sum |x_i|^2$ wird durch $\langle \, (x_i), (y_i) \, \rangle := \displaystyle\sum_{i=1}^\infty x_i \overline{y_i}$ ein inneres Produkt definiert. Mit diesem Produkt ist der ℓ^2 ein reeller bzw komplexer Hilbertraum. Beweis siehe Aufgabe 6.4.6.A.

6.2.4 Topologisches

Auf jedem normierten linearen Raum $(X, \|\,.\,\|)$ wird durch $d(x,y) := \|x-y\|$ eine Metrik definiert. Topologische Begriffe in normierten linearen Räumen beziehen sich stets auf diese zugehörige Metrik. Die in Abschnitt 6.1.2 aufgeführten Sätze über metrische Räume gelten auch in normierten Räumen. Darüber hinaus haben normierte Räume weitere spezielle topologische Eigenschaften.

Normierte lineare Räume sind stets zusammenhängend. Infolgedessen sind in normierten linearen Räumen die leere Menge $\emptyset$ und der ganze Raum X die einzigen Mengen, die sowohl offen als auch abgeschlossen sind.

Eine offene Teilmenge eines normierten linearen Raumes ist genau dann zusammenhängend, wenn sich je zwei Punkte aus ihr durch einen Polygonzug verbinden lassen. (Beweis siehe Aufgabe 6.4.2.B)

In normierten linearen Räumen gilt $\overline{U_\varepsilon(x)} \;=\; \{\, y\,;\, \|x-y\| \leq \varepsilon\,\}$.

Ist $(X, \|\,.\,\|)$ ein normierter Raum, so ist $\|\,.\,\|\colon \;\to \mathbb{R}$ stetig.
Die Addition von Elementen aus X und die Multiplikation mit Skalaren sind bzgl der Produkttopologien stetige Abbildungen von $X{\times}X$ bzw $\mathbb{K}{\times}X$ nach X. Ebenso ist in einem Hilbertraum X das Skalarprodukt eine stetige Abbildung von $X\times X$ in den Grundkörper $\mathbb{K}$.

Ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum besitzt genau dann einen dichten Unterraum abzählbarer Dimension, wenn er eine abzählbare dichte Teilmenge besitzt. Dies wiederum ist genau dann der Fall, wenn seine Topologie eine abzählbare Basis besitzt, d.h. wenn er das 2. Abzählbarkeitsaxiom erfüllt.

Endlich dimensionale Unterräume von normierten Räumen sind stets abgeschlossen (6.4.5.F) .

6.2.5 Konvexe und sternförmige Mengen

Die *Verbindungsstrecke* zweier Punkte x, y eines linearen Raumes ist die Menge

$$\overline{x{,}y} \;:=\; \{\, \lambda x + (1-\lambda)y\,;\, 0 \leq \lambda \leq 1\,\} \;.$$

Ein *Streckenzug (Polygonzug)* von a nach b ist die Vereinigung endlich vieler Strecken $\overline{x_{i-1}, x_i}$, $i = 1, \ldots, m$, mit $x_0 = a$ und $x_m = b$.

Eine Teilmenge $K \subset X$ eines linearen Raumes heißt *konvex*, wenn mit je zwei Punkten $x, y \in K$ auch die Verbindungsstrecke $\overline{x, y}$ in K liegt.

Offene und abgeschlossene ε-Umgebungen sind konvex. Ebenso sind affine Unterräume und n-dimensionale Intervalle im $\mathbb{R}^n$ konvex.

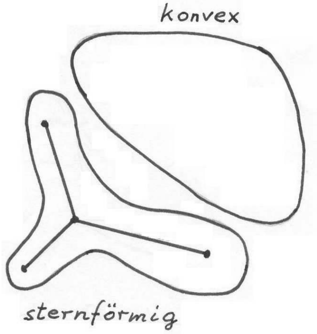
Konvexe Mengen sind notwendig zusammenhängend.

Der Durchschnitt beliebig vieler konvexer Mengen ist ebenfalls konvex. (Aber i.a. nicht die Vereinigung!)

Abgeschlossene Hüllen und ε-Umgebungen konvexer Mengen sind ebenfalls konvex. Ebenso ist das Innere einer konvexen Menge konvex (6.4.5.H) .

Sei $M \subset X$ eine beliebige Teilmenge des linearen Raumes X. Der Durchschnitt aller konvexen Obermengen von M ist konvex und natürlich in jeder konvexen Obermenge enthalten. Er ist die „kleinste konvexe Obermenge" von M und heißt *konvexe Hülle* von M .

Die konvexe Hülle zweier Punkte ist ihre Verbindungsstrecke. Die konvexe Hülle einer offenen Menge ist offen, aber die konvexe Hülle einer abgeschlossenen Menge nicht notwendig abgeschlossen.



Sternförmige Mengen
Eine Teilmenge $K \subset X$ eines linearen Raumes heißt *sternförmig* mit dem *Zentrum* $z \in K$, wenn sie mit jedem Punkt $x \in K$ auch die Verbindungsstrecke $\overline{x,z}$ enthält.

$$K \text{ sternförmig bzgl } z \quad \Longleftrightarrow \quad \forall x \in K : \overline{x,z} \subset K \ .$$

Konvexe Mengen K sind sternförmig. Man kann jedes $z \in K$ als Zentrum wählen. Sternförmige Mengen sind zusammenhängend, sogar polygonal zusammenhängend. Der Durchschnitt zweier sternförmiger Mengen mit demselben Zentrum ist wieder sternförmig, aber i.a. nicht bei verschiedenen Zentren.

6.2.6 Folgen und Reihen

a) Folgen
Die Addition von Funktionen und Folgen mit Werten in einem linearen Raum wird wie üblich definiert: $(f+g)(x) := f(x)+g(x)$, ebenso die Multiplikation mit Skalaren $\lambda \in \mathbb{K}$. Für konvergente Folgen (a_n) und (b_n) in dem normierten Raum $(X, \|\,.\,\|)$ und konvergente Zahlenfolgen (λ_n) aus dem Grundkörper $\mathbb{K}$ gelten dabei die bekannten Rechenregeln:

1) $a_n \to a,\ b_n \to b,\ \lambda, \mu \in \mathbb{K} \quad \Longrightarrow \quad \lambda a_n + \mu b_n \to \lambda a + \mu b$
   Also bilden die konvergenten Folgen in X einen Vektorraum V und die Zuordnung $\{(a_n) \mapsto \lim a_n\}$ ist eine lineare Abbildung von V nach X.
2) $a_n \to a,\ \lambda_n \to \lambda \implies \lambda_n a_n \to \lambda a$.
3) $a_n \to a \implies \|a_n\| \to \|a\|$, $\quad a_n \to 0 \iff \|a_n\| \to 0$.
4) Sind von der Vektorfolge (a_n) und der Zahlenfolge (λ_n) die eine beschränkt und die andere eine Nullfolge, so geht auch $\lambda_n a_n \to 0$.

Im wesentlichen steckt hinter diesen Regeln die Stetigkeit von Norm, Addition und Multiplikation mit Skalaren.

b) Reihen

Eine Reihe in einem normierten linearen Raum $(X, \|\,.\,\|)$ ist wie in $\mathbb{R}$ als Folge ihrer Partialsummen definiert. Viele der Begriffe, Regeln und Kriterien für reelle Zahlenreihen übertragen sich auf Reihen $\sum a_n$ in normierten Räumen (vgl Abschnitt 2.3).

Achtung: Etliche Konvergenzkriterien (z. B. Majoranten und Cauchy-Kriterium) aus Abschnitt 2.3 brauchen die *Vollständigkeit* der reellen Zahlen. Infolgedessen gelten ihre Verallgemeinerungen <u>nur in Banachräumen</u> !

Z.B. folgt aus der Konvergenz der Reihe $\sum \|a_n\|$ der Normen nicht notwendig, dass die Reihe $\sum a_n$ konvergiert. Dafür braucht man die Vollständigkeit des normierten Raumes. Infolgedessen gilt das Majorantenkriterium auch nur in Banachräumen.

c) Rechenregeln für Reihen

1) Sind $\sum a_n$ und $\sum b_n$ konvergent, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, so konvergiert auch $\sum(\lambda a_n + \mu b_n)$ und zwar gegen $(\lambda \sum a_n + \mu \sum b_n)$.
   Die konvergenten Reihen bilden also einen Vektorraum und die Abbildung, die jeder konvergenten Reihe ihren Wert zuordnet, ist linear.
2) Ist die Reihe $\sum a_n$ konvergent, so gehen die Summanden $a_n \to 0$.
   Bzw: Streben die Summanden nicht gegen Null, so divergiert die Reihe. (Die Umkehrung ist falsch!)
3) *Cauchy-Kriterium*
   Sei X ein Banachraum, also vollständig. Dann ist eine Reihe in X genau dann konvergent, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ einen Index n_0 gibt, von dem ab alle Reihenabschnitte der Norm nach kleiner als ε sind.

$$\sum a_n \text{ konvergiert im Banachraum } X \iff \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0\ \forall\, m \geq n \geq n_0 \ : \ \Big\| \sum_{k=n}^{m} a_k \Big\| < \varepsilon \ .$$

4) *Majorantenkriterium*
   Sei $(X, \|\,.\,\|)$ vollständig, also ein Banachraum. Seien $a_n \in X,\ \lambda_n \in \mathbb{R}$ und ab einem Index n_0 gelte $\|a_n\| \leq \lambda_n$. Dann gilt:
   Ist $\sum \lambda_n$ konvergent in $\mathbb{R}$, so konvergiert $\sum a_n$ in X.
5) *Wurzel- und Quotientenkriterium* gelten auch nur in Banachräumen.
   Sei $\sum a_n$ eine Reihe in dem Banachraum X mit $a_n \neq 0$. Ferner gebe es ein (festes!) $q < 1$ und einen Index n_0 derart, dass $\dfrac{\|a_{n+1}\|}{\|a_n\|} \leq q$ bzw $\sqrt[n]{\|a_n\|} \leq q$ für alle $n \geq n_0$. Dann ist $\sum a_n$ konvergent.

d) Funktionenreihen

Auch Funktionenreihen sind die Folgen ihrer Partialsummen. Punktweise und gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen in metrischen Räumen wurden in Abschnitt 6.1.6.c definiert. Diese Definitionen übertragen sich völlig analog wie in Abschnitt 2.5.2 auf Funktionenreihen.

Seien f_k Funktionen von einer Menge X in einen normierten Raum $(Y, \|\,.\,\|)$. Dann ist die Reihe $\sum f_k$ in X punktweise konvergent, wenn für alle $x \in X$ die Reihe $\sum f_k(x)$ in Y konvergiert.

Die Reihe $\sum f_k$ konvergiert gleichmäßig auf X gegen die Grenzfunktion f, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ einen Index $n_0 > 0$ gibt, so dass für alle $x \in X$ und für alle $n > n_0$ gilt $\|f(x) - \sum_{k=1}^n f_k(x)\| < \varepsilon$. Formal geschrieben:

$$\sum f_k \text{ konvergiert auf } X \text{ gleichmäßig gegen } f$$
$$:\Longleftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall x \in X\ \forall n > n_0 \ : \ \Big\| f(x) - \sum_{k=1}^n f_k(x) \Big\| < \varepsilon \, .$$

e) Cauchy Kriterium für gleichmäßige Konvergenz

Seien $f_k\colon X \to Y$ Funktionen von X in einen Banachraum Y. Dann gilt

$$\sum_{k=1}^\infty f_k \text{ konvergiert gleichmäßig auf } X$$
$$\Longleftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall x \in X\ \forall n \geq m > n_0 \ : \ \Big\| \sum_{k=m}^n f_k(x) \Big\| < \varepsilon \, .$$

6.2.7 Lineare Abbildungen

Seien $(X, \|\,.\,\|)$ und $(Y, \|\,.\,\|)$ normierte lineare Räume und $\varphi\colon X \to Y$ linear, also $\varphi(\lambda x + \mu y) = \lambda\varphi(x) + \mu\varphi(y)$ für alle $x, y \in X,\ \lambda, \mu \in \mathbb{K}$.
Die Bildmenge $\varphi(X)$ ist natürlich (außer für $\varphi \equiv 0$) nie beschränkt. Man nennt φ *beschränkt*, wenn $\sup\{\, \|\varphi(x)\| \,;\, \|x\| = 1 \,\} < \infty$. In diesem Fall heißt

$$\begin{aligned} \|\varphi\| \quad &:= \quad \sup\,\{\, \|\varphi(x)\| \,;\, \|x\| = 1 \,\} \ = \ \sup\,\{\, \|\varphi(x)\| \,;\, \|x\| \leq 1 \,\} \\ &= \quad \sup \left\{ \frac{\|\varphi(x)\|}{\|x\|} \,;\, \|x\| \neq 0 \right\} \end{aligned}$$

Norm der linearen Abbildung φ . $\|\varphi\|$ ist eine Norm auf dem $\mathbb{K}$-Vektorraum der linearen Abbildungen von X nach Y. Sie hängt allerdings von der Wahl der Normen in X und Y ab!

Es gilt $\|\varphi(x)\| \leq \|\varphi\| \cdot \|x\|$. Außerdem ist $\|\varphi \circ \psi\| \leq \|\varphi\| \cdot \|\psi\|$ für je zwei lineare Abbildungen $\psi\colon X \to Y,\ \varphi\colon Y \to Z$ zwischen normierten Räumen.

Eine lineare Abbildung ist genau dann beschränkt, wenn sie stetig ist.

Lineare Abbildungen eines endlich dimensionalen normierten Raumes X sind stets beschränkt und damit stetig.
Ist $\dim X = \infty$, so gibt es unstetige lineare Abbildungen $\varphi\colon X \to Y$.
Beweis siehe Aufgabe 6.4.7.A .

6.2.8 Endlich dimensionale Räume

Zwei n-dimensionale Vektorräume (über dem gleichen Grundkörper $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) sind algebraisch isomorph. Insbesondere sind sie isomorph zum Raum $\mathbb{K}^n$ der n-tupel von Elementen aus $\mathbb{K}$.

Jeder (Vektorraum-) Isomorphismus $\varphi\colon X \to Y$ zwischen zwei n-dimensionalen normierten linearen Räumen X und Y ist *topologisch* , d.h. sowohl φ als auch die Umkehrung φ^{-1} sind stetig.

Äquivalent dazu ist: Zu jedem (Vektorraum-) Isomorphismus $\varphi\colon X \to Y$ gibt es zwei positive reelle Zahlen $R, S > 0$ derart, dass für alle $x \in X$ gilt
$R\,\|x\| \;\leq\; \|\varphi(x)\| \;\leq\; S\,\|x\|$.

Insbesondere sind je zwei Normen auf einem endlich dimensionalen normierten linearen Raum äquivalent. Siehe Aufgabe 6.4.5.F .

Alle endlich dimensionalen normierten Räume sind vollständig, also Banachräume. Aber natürlich gibt es unendlich dimensionale Räume, die nicht vollständig sind, z.B. der $C[a, b]$ mit einer Integralnorm (siehe 6.4.3.B) .

Auch die folgenden beiden Sätze gelten nur in endlich dimensionalen Räumen:

Satz von Heine-Borel
Eine Teilmenge M eines endlich dimensionalen normierten Raumes ist genau dann kompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.

> Man kann sogar zeigen (siehe Aufgabe 6.4.4.F) :
> Ein normierter Raum X ist genau dann endlich dimensional, wenn seine Einheitskugel $\{\, \|x\| \leq 1 \,\}$ kompakt ist.

Satz von Bolzano-Weierstrass
Sei X ein endlich dimensionaler normierter Raum. Dann besitzt jede unendliche beschränkte Teilmenge M von X mindestens einen Häufungspunkt in X.
bzw: *Jede beschränkte Folge in X besitzt eine konvergente Teilfolge.*