

Wolfgang H. Müller
Sebastian Glane
Wilhelm Rickert

Technische Mechanik

für Technomathematik und
Physikalische Ingenieurwissenschaft



HANSER

Müller, Glane, Rickert

**TM für Technomathematik und
Physikalische Ingenieurwissenschaft**



Bleiben Sie auf dem Laufenden!

Hanser Newsletter informieren Sie regelmäßig über neue Bücher und Termine aus den verschiedenen Bereichen der Technik. Profitieren Sie auch von Gewinnspielen und exklusiven Leseproben. Gleich anmelden unter

www.hanser-fachbuch.de/newsletter

Wolfgang H. Müller
Sebastian Glane
Wilhelm Rickert

Technische Mechanik für Technomathematik und Physikalische Ingenieurwissenschaft

HANSER

Die Autoren:

Prof. Dr. rer. nat. habil. Wolfgang H. Müller, Lehrstuhlinhaber für Kontinuumsmechanik und Materialtheorie am Institut für Mechanik, Technische Universität Berlin

Dr.-Ing. Sebastian Glane, wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Mechanik, Technische Universität Berlin

Wilhelm Rickert, M. Sc., wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Mechanik, Technische Universität Berlin

Alle in diesem Buch enthaltenen Informationen wurden nach bestem Wissen zusammengestellt und mit Sorgfalt geprüft und getestet. Dennoch sind Fehler nicht ganz auszuschließen. Aus diesem Grund sind die im vorliegenden Buch enthaltenen Informationen mit keiner Verpflichtung oder Garantie irgendeiner Art verbunden. Autor und Verlag übernehmen infolgedessen keine Verantwortung und werden keine daraus folgende oder sonstige Haftung übernehmen, die auf irgendeine Art aus der Benutzung dieser Informationen – oder Teilen davon – entsteht.

Ebenso wenig übernehmen Autor und Verlag die Gewähr dafür, dass beschriebene Verfahren usw. frei von Schutzrechten Dritter sind. Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek:

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt.

Alle Rechte, auch die der Übersetzung, des Nachdruckes und der Vervielfältigung des Buches, oder Teilen daraus, vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf ohne schriftliche Genehmigung des Verlages in irgendeiner Form (Fotokopie, Mikrofilm oder ein anderes Verfahren) – auch nicht für Zwecke der Unterrichtsgestaltung – reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden.

© 2021 Carl Hanser Verlag München, www.hanser-fachbuch.de

Lektorat: Dipl.-Ing. Volker Herzberg

Herstellung: *Der Buchmacher* – Arthur Lenner, München

Coverkonzept: Marc Müller-Bremer, www.rebranding.de, München

Titelmotiv: Thomas West, unter Verwendung von Grafiken von © stock.adobe.com/Papapig

Coverrealisation: Max Kostopoulos

Satz: Wilhelm Rickert

Druck und Bindung: CPI books GmbH, Leck

Printed in Germany

Print-ISBN: 978-3-446-46271-7

E-Book-ISBN: 978-3-446-46611-1

Vorwort

*Everything You Always Wanted to Know About Sex**
(*But Were Afraid to Ask)

Woody Allen

Mit diesem Buch verbinde ich ein spezielles persönliches Anliegen. Üblicherweise werden die Vorlesungen über Technische Mechanik für die Anfangssemester „ingenieurfreundlich“ gelesen, d. h. man vermeidet es tunlichst, fortgeschrittene Kapitel der Höheren Mathematik zu verwenden und erklärt Sachverhalte gerne anschaulich, sozusagen auf der Rückseite des Briefumschlags, da man doch technisch orientiert ist und sich mit abstrusen Formalismen ungern aufhält. Kurz gesagt, man gesteht sich nicht ein, dass es Dinge gibt, mit denen man eventuell Schwierigkeiten hat, sie zu verstehen und zu meistern. Das ist nur allzu menschlich. Nun gibt es jedoch auch Menschen, denen es daran liegt, hinter die Kulissen zu schauen und denen es Freude macht, in voller Tiefe zu begreifen, warum ein Sachverhalt so ist, wie man ihn darstellt, so phantastisch dieser Wunsch auch klingen mag.

Um ein Beispiel zu geben: Das Prinzip der virtuellen Arbeit kann man einführen, ohne den Begriff der Variation zu verwenden und Grundbegriffe der Funktionalanalysis zu kennen. Man wundert sich zwar anfangs darüber, was eine virtuelle Verrückung ist und warum diese mit δu bezeichnet wird, aber mit der Zeit gewöhnt man sich auch daran. Ich würde soweit gehen, festzustellen, dass Personen existieren, die vollauf damit zufrieden sind, etwas anwenden zu können, ohne zu verstehen, warum es funktioniert, und die auch gerne glauben, dass die Energie eines Systems schon extremal werden wird. Irgendein Gott wird es bestimmt so eingerichtet haben! Es gibt sogar Menschen, die wollen nicht einmal anwenden, sondern eigentlich viel lieber gar nichts tun. Aber wie gesagt . . . , es gibt auch andere, die nicht so sind. Und für diese ist dieses Buch geschrieben.

Nichtsdestoweniger, man muss beide Welten kennen! Und so empfehle ich Studierenden der Physikalischen Ingenieurwissenschaft oder der Technomathematik auch das mit dem Kollegen Ferber entstandene, ebenfalls im Hanser-Verlag erschienene Fachbuch *Technische Mechanik für Ingenieure* parallel zu lesen[†], ja, das vorliegende Buch vielleicht eher als Ergänzung zu begreifen, denn schließlich geht es letztendlich darum, Prüfungen in Echtzeit zu bestehen. Und die Prüfungen drehen sich um die Pflicht und nicht um die Kür.

Zu diesem Buch haben viele Studierende und Mitglieder unserer Fachgruppe direkt bzw. zumindest indirekt beigetragen. Zwei Mitgliedern der Fachgruppe aber gilt für ihre umfangreiche Arbeit besonderer Dank, nämlich den Herren Sebastian Glane und Wilhelm Rickert. Deshalb erscheinen sie auch im Cover und tragen Verantwortung für das hier Gesagte.

In diesem Sinne *per aspera ad astra!*

Berlin, im Juli 2020

Wolfgang H. Müller

[†] oder andere im Verzeichnis angegebene Ingenieurliteratur über Technische Mechanik

URL der Internetseite der Verfasser:

(<https://www.lkm.tu-berlin.de/menue/home/>)

URL der Internetseite der Verfasser zum Grundkurs der Mechanik:

(https://www.lkm.tu-berlin.de/menue/studium_und_lehre/lehrangebot/)

Inhalt

Abbildungsverzeichnis	11
1 Statik	17
1.1 Eine Vorbemerkung zur Gliederung der Technischen Mechanik	17
1.2 Mechanische Grundbegriffe	17
1.2.1 Masse, Zeit und Länge	18
1.2.2 Kraftbegriff	19
1.2.3 Einteilung der Kräfte	21
1.2.4 Momentenbegriff	24
1.3 Die Grundgleichungen der Statik	29
1.4 Der Schwerpunkt	35
1.4.1 Eine Vorbemerkung	35
1.4.2 Der Begriff des dreidimensionalen Schwerpunktes	36
1.4.3 Flächen- und Linienzentren	37
1.5 Trag- und Fachwerke	46
1.5.1 Vorbemerkungen zur Lagerung und idealisierte Lagertypen	46
1.5.2 Fachwerke	50
1.5.2.1 Begriffsbildung	50
1.5.2.2 Das Knotenpunktverfahren	52
1.5.2.3 Der Rittersche Schnitt	55
1.5.3 Tragwerke	58
1.6 Der biegesteife Träger	62
1.6.1 Begriffsbildung	62
1.6.2 Schnittgrößen	63
1.6.3 Schnittgrößendifferentialgleichungen (gerader Balken)	66
1.6.4 Schnittlasten an Rahmen	78
1.6.5 Bogen in der Ebene	88
1.6.6 Schnittgrößendifferentialgleichungen am Bogen	89
1.7 Reibungsphänomene	101
1.7.1 Begriffsbildung: Haften und Gleiten, Coulombsche Reibung	102
1.7.2 Kraft- und Momentengleichgewicht an der schiefen Ebene	104
1.7.3 Umschlingungsreibung	107
Literatur	111

2	Festigkeitslehre	112
2.1	Festigkeitslehre – warum?	112
2.2	Wichtige Belastungs- und Verformungsarten – Phänomenologie	113
2.3	Mechanische Spannungen	114
2.3.1	Erste Begriffsklärungen	114
2.3.2	Der Spannungstensor	118
2.3.3	Impulsbilanz der Statik	124
2.3.4	Momentengleichgewicht	126
2.4	Dehnungen	133
2.5	Hookesches Gesetz	137
2.6	Lamé–Navier–Gleichungen	139
2.7	Der Zug-/Druckstab	140
2.8	Reine Biegung	152
2.9	Reine Scherung	166
2.10	Querkraftbiegung	168
2.11	Die Biegeliniendifferentialgleichung	177
2.12	Schiefe Biegung	192
2.13	Torsion	197
2.13.1	Torsion des Kreisprofils	198
2.13.2	Torsion dünnwandiger geschlossener Profile	205
2.14	Biegespannungsformel für den gekrümmten Träger	208
2.15	Festigkeitsnachweis	210
	Literatur	219
3	Bewegungslehre	220
3.1	Begriffe der Bewegungslehre	220
3.2	Bewegung eines Massenpunktes	221
3.2.1	Kinematik	221
3.2.1.1	Kartesische Basis	223
3.2.1.2	Polar- und Zylinderkoordinatenbasis	224
3.2.1.3	Natürliche Basis	225
3.2.2	Kinetik	228
3.2.3	Energie- und Arbeitssatz	232
3.2.4	Drehimpuls und Drallsatz	234
3.3	Bewegung von Massenpunktsystemen	236
3.3.1	Kinematik	236
3.3.2	Kinetik	237
3.3.3	Impuls- und Schwerpunktsatz	238

3.3.4	Energie- und Arbeitssatz	239
3.3.5	Drehimpuls und Drallsatz.....	241
3.4	Der starre Körper	242
3.4.1	Begriffsbildung	242
3.4.2	Kinematik	243
3.4.3	Kinetische Vorbemerkungen I: Der lineare Impuls	257
3.4.4	Impuls- und Schwerpunktsatz	258
3.4.5	Energie- und Arbeitssatz	261
3.4.6	Kinetische Vorbemerkungen II: Der Drehimpuls	265
3.4.7	Drallsatz	266
3.4.8	Die Eulerschen Kreiselgleichungen.....	270
	Literatur.....	276

4 Kontinuumsmechanik 277

4.1	Einführung	277
4.1.1	Was ist Kontinuumsmechanik?.....	277
4.1.2	Das Ziel der Kontinuumsmechanik.....	278
4.2	Feldformulierungsmöglichkeiten	279
4.2.1	Eulersche Beschreibungsweise	279
4.2.2	Transporttheorem in Eulerscher Beschreibungsweise	280
4.2.3	Materielle (Lagrangesche) Beschreibungsweise	284
4.2.4	Transporttheorem in materieller Beschreibungsweise	285
4.3	Bilanzgleichungen.....	286
4.3.1	Allgemeine globale Form	286
4.3.2	Allgemeine lokale Form in regulären Punkten	287
4.3.3	Bilanzen der Masse	289
4.3.4	Bilanzen des Impulses	293
4.4	Einfache Materialgleichungen	299
4.4.1	Die Notwendigkeit von Materialgleichungen	299
4.4.2	Das Euler-Fluid	300
4.4.3	Das Navier-Stokes-Fluid.....	305
4.4.4	Der Hookesche Festkörper und Ausbreitung elastischer Wellen	315
4.5	Beobachterwechsel.....	317
4.5.1	Grundbegriffe	317
4.5.2	Kinematik Euklidischer Transformationen	319
4.5.3	Kinematik von Galileitransformationen	324
4.5.4	Anwendungen Euklidischer Transformationen	324
4.5.5	Die Massenbilanz bei Beobachterwechsel.....	329

4.5.6	Die Impulsbilanz bei Beobachterwechsel	330
4.5.7	Materialgleichungen bei Beobachterwechsel	331
	Literatur	332
5	Energiemethoden	334
5.1	Bilanzen der thermo-mechanischen Energien	334
5.1.1	Bilanz der kinetischen Energie	334
5.1.2	Bilanz der Gesamtenergie	335
5.1.3	Bilanz der inneren Energie, 1. Hauptsatz	337
5.2	Bilanz der Entropie, 2. Hauptsatz	339
5.3	Auswertung der Entropieungleichung	340
5.3.1	Der Fall des linear elastischen Festkörpers	340
5.3.2	Der Fall der Navier-Stokes-Fourier-Flüssigkeit	343
5.4	Die Formänderungsenergie-dichte und ihr Komplement	345
5.5	Die Sätze von Castigliano im Kontinuum	347
5.6	Darstellungssätze für die freie Energiedichte	347
5.7	Die Formänderungsenergie-dichte	350
5.8	Die Formänderungsenergie des Balkens	351
5.9	Die Sätze von Castigliano im Diskreten	354
5.10	Motivation der Extremierung von Energiefunktionalen	363
5.11	Einführung in die Variationsrechnung	364
5.12	Prinzip der virtuellen Verrückungen	367
5.13	Spezialfälle des PdvV	371
5.14	PdvV in der Starrkörperkinetik	372
5.15	PdvV für gerade linear-elastische Balken	374
5.16	Prinzip der virtuellen Kräfte	375
5.17	Spezialfälle des PdvK insbesondere angewandt auf Balken	376
5.18	Das Prinzip der geringsten Wirkung	380
5.19	Die Lagrangeschen Gleichungen	386
	Literatur	391
	Index	393

Abbildungsverzeichnis

1.1	Illustration verschiedener Kraftarten.....	22
1.2	Freischnitt eines Klotzes im Schwerfeld.	22
1.3	Freischnitt der Gravitationswirkung Erde-Mond.	23
1.5	Moment einer Kraft und Wirkungslinie.	24
1.4	Freischnitt durch Balkenquerschnitt.	24
1.6	Polare und axiale Vektoren.	25
1.7	Ein Kräftepaar.	26
1.8	Geneigter Stab prismatischen Querschnitts.	27
1.9	Geneigter konischer Stab.	28
1.10	Ein Krafteck und Resultierende.	30
1.11	Schiefe Koordinaten.	31
1.12	Pendelstütze.	32
1.13	Freischnitte am System der Pendelstütze.	32
1.14	Darstellung eines masselosen Hebels mit zugehörigem Freischnitt.	33
1.15	Schematische Darstellung der Aussichtsplattform und zugehöriger Freischnitt... ..	34
1.16	Achsenbezeichnungen beim Träger sowie einem 3D-Draht.	38
1.17	Dreieck mit Eckpunkts- und Seitenlängenbezeichnungen.	39
1.18	Trapez mit geometrischen Längen und den beiden Innenwinkeln α und β	41
1.19	Kreisringsektor mit Radien und Öffnungswinkel α , symmetrisch zur Vertikalen. .	43
1.20	Darstellung eines Kreisabschnittes.	44
1.21	Schematische Darstellung eines Tankzugs.	45
1.22	Darstellung einwertiger Lagerungen.	48
1.23	Darstellung zweiwertiger Lagerungen.	48
1.24	Darstellung dreiwertiger Lagerungen.	49
1.25	Ein- und zweiwertige Brückenlager.	49
1.26	Realisierung von Fachwerkstabverbindungen.	50
1.27	Sichere Realisierung von Fachwerkkonstrukten.	51
1.28	Zu den Nullstabsregeln.	52
1.29	Fachwerk mit neun Stäben und sechs Knoten.	53
1.30	Skizze zur Einführung des Hilfswinkels α und der Hilfslänge L_2	53
1.31	Knotenfreischnitte.	54

1.32 Fachwerksstruktur.	56
1.33 Fachwerk als starrer Körper ersetzt.	56
1.34 Ritterschnitt.	57
1.35 Unter Lasten stehendes Tragwerk.	59
1.36 Freischnitte am Tragwerk.	59
1.37 Tragwerk und Freischnitte.	61
1.38 Koordinaten am horizontalen geraden Balken.	63
1.39 Krafteinleitung in der x - z -Ebene.	64
1.40 Positive Schnittgrößen für beide Schnittufer.	65
1.41 Positive Schnittgrößen für beide Schnittufer aus kombinierter Belastung.	66
1.42 Freischnitt eines infinitesimalen geraden Balkenstücks.	66
1.43 Kontinuierlich belasteter Balken.	68
1.44 Belasteter Balken.	69
1.45 Schnittufer am Übergang.	69
1.46 Balkensystem unter Punktbelastungen.	70
1.47 Freischnitt des Balkensystems.	71
1.48 Bereichseinteilung des Balkensystems.	71
1.49 Bereichseinteilung des Balkensystems.	72
1.50 Schnittlasten.	73
1.51 Aufziehverfahren (siehe Text).	74
1.52 Zur Wahl der strichlierten Referenzlinie (siehe Text).	76
1.53 Balken mit zwei unterschiedlichen Koordinatensystemen.	76
1.54 Schnittufer bei Verwendung des e_x - e_y - e_z -Systems.	77
1.55 Schnittufer bei Verwendung des \tilde{e}_x - \tilde{e}_y - \tilde{e}_z -Systems.	77
1.56 Vektorielle Betrachtung der Schnittgrößen.	78
1.57 Zur Wahl der strichlierten Referenzlinie (siehe Text).	78
1.58 Rahmen unter Last.	80
1.59 Freischnitt 1. Bereich.	80
1.60 Freischnitt 2. Bereich.	80
1.61 Freischnitt 3. Bereich.	81
1.62 Graphische Darstellung der Schnittlastenverläufe.	81
1.63 Rahmen unter Last.	82
1.64 Freischnitte am geknickten Rahmen.	82
1.65 Aufziehen des zweiten Bereichs von links.	83
1.66 Aufziehen des dritten Bereichs.	83
1.67 Schnittlasten.	84
1.68 Rahmen und Freischnitt.	84
1.69 Aufziehen links.	85

1.70 Weiteres Aufziehen links.	85
1.71 Aufziehen von oben und von rechts.	86
1.72 Schnittgrößen.....	86
1.73 Frenetsches Dreibein und Krümmungskreis (siehe Text).....	88
1.74 Freischnitt eines Bogenelementes (siehe Text).....	90
1.75 Bogen mit Punktlasten.	91
1.76 Freischnitt des Bogens in Abb. 1.75.....	91
1.77 Bogenfreischnitte aus Abb. 1.75.	92
1.78 Bogenfreischnitte aus Abb. 1.75.	93
1.79 Schnittgrößenverläufe am Bogen.	95
1.80 Nach unten und oben gekrümmte Kreisbögen unter Punktlasten.	95
1.81 Bogenfreischnitte aus Abb. 1.75.	96
1.82 Verlauf der Schnittgrößen am gekrümmten Träger.....	101
1.83 Haften und Gleiten eines Klotzes auf einer rauen Oberfläche (siehe Text).....	102
1.84 Haften, Gleiten und Kippen eines Klotzes auf einer schiefen Ebene (siehe Text). .	104
1.85 Selbstsperrung eines Klotzes an der schiefen Ebene.	105
1.86 Freischnitt der Teilsysteme des Hebels, des Klotzes und der schiefen Ebene.....	106
1.87 Umschlingungsreibung und Freischnitt.	108
1.88 Fahrwerksbremse	109
1.89 Freischnitt des Seils.....	109
1.90 Freischnitt der Bremsscheibe	110
1.91 Unvollständiger Freischnitt des Hebels.....	110
2.1 Elementare Belastungsfälle.	114
2.2 Verschiedene Wirkungen einer gleich starken, aber verschieden gerichteten Last.	115
2.3 Spannungszustand im Inneren eines Körpers.	119
2.4 Infinitesimaler Freischnitt eines Körperpunktes.	128
2.5 Mohrscher Kreis.	129
2.6 Spannungen am Element.	129
2.7 Konstruktion und Auswertung des Mohrschen Kreises.....	130
2.8 Deformation eines Körpers.	134
2.9 Axial unter Zug stehender Stab.....	141
2.10 Prismatischer Stab in der Referenz- und in der aktuellen Konfiguration.....	145
2.11 Stabfreischnitt.	149
2.12 Stabsystem.	149
2.13 Freischnitt des starren Hebels.	150
2.14 Auslenkung des starren Hebels.....	150
2.15 Reine Biegung eines Balkens.	152

2.16 Darstellung eines Dreiecks und dessen Flächenschwerpunkt.	156
2.17 Trapez mit den Grundseitenlängen a und b , der Höhe h und den beiden Innenwinkeln α und β	158
2.18 Kreisringsektor mit Innenradius r_i , Außenradius r_a und Öffnungswinkel α	161
2.19 Querschnitt eines L-Profiles.	163
2.20 Zerlegung des Querschnitts in die Teilflächen I und II.	164
2.21 Reine Scherung eines unendlichen linear-elastischen Gebietes.	166
2.22 Querkraftbiegung eines einseitig eingespannten Balkens.	169
2.23 Schädigungsmechanismen bei Querkraftbiegung.	173
2.24 Balken mit Kreisquerschnitt unter Querlast.	176
2.25 Vereinfachte Darstellung der Geometrie am ebenen Bernoulli-Balken.	178
2.26 Darstellung zur Wahl des Vorzeichens der Drehachse.	181
2.27 Balken mit einer Fest-Los-Lagerung unter linearer Streckenlast.	183
2.28 Freischnitt des Gesamtsystems.	183
2.29 Graphische Darstellung eines Momentenverlaufs.	184
2.30 Graphische Darstellung einer Biegelinie.	185
2.31 Balken mit T-förmigem Querschnittsprofil.	186
2.32 Graphische Darstellung der Biegelinie $w(x)$ in dimensionsloser Form.	188
2.33 Freischnitt zur Bestimmung der Lagerkräfte.	188
2.34 Infinitesimaler Freischnitt des Punktes A.	189
2.35 Infinitesimaler Freischnitt des Punktes B.	189
2.36 Bereicheinteilung zur Berechnung des Flächenträgheitsmoments.	190
2.37 Statisches Moment S^* der Fläche A^*	190
2.38 Graphische Darstellung des Querkraftverlaufs $Q(x)$ in dimensionsloser Form. ...	191
2.39 Symmetrische Querschnittsprofile.	193
2.40 Durchbiegung eines gleichseitigen L-Trägers bei verschiedenen Einspannungen.	194
2.41 Ein aus zwei identischen Rechtecken zusammengesetzter Querschnitt.	195
2.42 Torsionsverformungen bei Kreis- und Rechteckprofil.	198
2.43 Links fest eingespannter Kreisringzylinder unter stirnseitiger Torsion.	198
2.44 Beidseitig verdrillter Kreisringzylinder.	201
2.45 Einseitig fest eingespannte Welle unter Torsionsbelastung.	202
2.46 Aufziehverfahren für die Normalkraft $N(x)$ und das Torsionsmoment $M_T(x)$	203
2.47 Torsion eines beliebig geformten, geschlossenen, dünnwandigen Profils.	205
2.48 Zur Verdrillung eines beliebig geformten, geschlossenen, dünnwandigen Profils.	206
2.49 Verformung eines Bogens.	208
2.50 Graphische Darstellung des hyperbolischen Profils der Biegespannung.	210
2.51 Zulässige Bereiche des Mohrschen Kreises.	214
2.52 Freischnitt eines Kreuzschlüssels zur Befestigung einer Radmutter.	216

2.53 Freischnitt des Kreuzschlüssels im zweiten Belastungsfall.....	217
3.1 Illustration eines Inertialsystemsbeobachters.	224
3.2 Darstellung von Polarkoordinaten.....	225
3.3 Darstellung natürlicher Koordinaten.....	226
3.4 Rutschender Klotz auf einem Tisch.....	235
3.5 Aufbau eines Starrkörpers aus Massenpunkten.....	242
3.6 Starrkörperkinematik.....	243
3.7 Konstruktion des Momentanpols im ebenen Fall.	246
3.8 Starrkörpersystem.....	248
3.9 Bewegungsablauf.....	248
3.10 Starrkörpersystem.....	250
3.11 Schwerpunkte.	250
3.12 Zur Wirkung des Drehtensors auf orthogonale Einheitsvektoren.	251
3.13 Rollendes starres Rad mit und ohne Schlupf.	257
3.14 Geometrie eines Vollzylinders.	264
3.15 An der Wand lehrende rutschende Leiter.	268
3.16 Abrollende Münze.....	271
3.17 Darstellung des Wurfs eines Reifens.....	273
3.18 Freischnitt des Reifens für $t \leq t_r$	274
4.1 Darstellung eines materiellen Systems.....	278
4.2 Zur räumlichen (Eulerschen) Beschreibungsweise.....	279
4.3 Zur materiellen (Lagrangeschen) Beschreibungsweise.....	285
4.4 Strömung durch ein Rohr.	289
4.5 Vereinfachte Darstellung einer Rakete.	297
4.6 Angeströmte Platte und ein geeignetes Kontrollvolumen.	303
4.7 Freistrahle beim Auftreffen auf eine Platte und die Wahl des Kontrollvolumens V	308
4.8 Mit Wasser gefüllter Eimer.	311
4.9 Pulsierende Kraftquelle in linear-elastischem Medium.	316
4.10 Euklidische Transformation zwischen zwei Beobachtern.	317
5.1 Zur Auswertung der Entropieungleichung nach Coleman-Noll.	341
5.2 Zur Bedeutung der Formänderungsenergiegedichte und ihres Komplements.	346
5.3 Übergang von kontinuierlicher zu punktförmiger Belastung.....	354
5.4 Ein einfach statisch unbestimmtes System.....	356
5.5 Diskret belasteter Balken.....	357
5.6 Freischnitt und Momentenverlauf des Balkens.	358
5.7 Freischnitt und Momentenverlauf am Balken mit Hilfsmoment.	359

5.8 System unter Streckenlast.....	359
5.9 Freischnitt eines Balkensystems	360
5.10 Ein Balken unter Punktkraft- und Momentenbelastung.....	362
5.11 Variation einer eindimensionalen Verschiebungsfunktion u am festen Rand.	365
5.12 Träger unter Last.	378
5.13 Freischnitte des originalen und des virtuellen Systems.....	379
5.14 Momentenverläufe am realen und am virtuellen System.	379
5.15 System mit Dissipation.	389

1

Statik

■ 1.1 Eine Vorbemerkung zur Gliederung der Technischen Mechanik

Der traditionelle Grundkurs über Technische Mechanik gestaltet sich nicht zuletzt aus didaktischen Gründen wie folgt: Man beginnt mit der **Statik**, der Lehre miteinander im Gleichgewicht befindlicher Kräfte. Nichts bewegt sich, die Körper ruhen. Aber sie stehen unter dem Einfluss dieser Kräfte und werden sich verformen. Das ist Gegenstand des zweiten Kapitels, der **Festigkeitslehre**. Oft verteilen sich diese beiden Abschnitte auf die ersten beiden Semester. Interessiert man sich nun dafür, die Bewegung von Körpern zu beschreiben, kommt die **Dynamik** ins Spiel. War man bei den ersten beiden Themen im Wesentlichen damit beschäftigt, algebraische Gleichungen zu lösen, kommen nun gewöhnliche Differentialgleichungen als mathematisches Tool hinzu, was auch erklärt, warum man nicht im ersten Semester mit der Dynamik beginnt und die Statik als ihren Spezialfall begreift. Unter der sogenannten höheren Festigkeitslehre versteht man schließlich oft eine Einführung in die Grundlagen der **Kontinuumstheorie**, in der die Bewegung respektive Deformation kontinuierlich verteilter Materie untersucht wird, sowie die **Energieprinzipie**. Dies kommt zum Schluss des Grundkurses, da man hier zusätzlich zu partiellen Differentialgleichungen auch mit Variationsrechnung konfrontiert wird.

Auch in diesem Buch werden wir diesem Kanon folgen. Allerdings sind wir so frei, von Anfang an Wert auf stringente Mathematik zu legen. Wir werden zwar die wesentlichen Rechenregeln zusammenstellen, aber für Details dieser mathematischen Präliminarien, insbesondere deren Einübung, geben wir weiterführende Literatur an. Generell wird im vorliegenden Buch deduktiv vorgegangen: Die allgemeinen Prinzipie werden an den Anfang gestellt und die speziellen Fälle ergeben sich. Daher wird empfohlen, parallel den Inhalt des Buches *Technische Mechanik für Ingenieure* von W. H. Müller und F. Ferber oder anderer Technischer Mechanikliteratur zu studieren, wo meist der induktive Weg gewählt ist. Die entsprechenden Lehrinhalte aus [MF2019] sind, wann immer sinnvoll, als Propädeutika den jeweiligen Abschnitten in diesem Buch vorangestellt.

■ 1.2 Mechanische Grundbegriffe



Propädeutikum: Man studiere aus [MF2019] den Abschnitt 1.1.

1.2.1 Masse, Zeit und Länge

Die Welt der Mechanik fußt auf drei physikalischen Grundgrößen, nämlich den Begriffen

- **Masse** m in Kilogramm (kg),
- **Zeit** t in Sekunden (s),
- und **Länge** s in Meter (m).

In der Tat sind manche Mechaniker von ihrer Wissenschaft so überzeugt, dass sie glauben, die gesamte Physik passt in dieses Schema. Man sieht das in der Thermodynamik, wo die innere Energie, welche die Thermodynamiker in Kalorien (cal) messen, über das sogenannte mechanische Wärmeäquivalent in Joule (J) umgerechnet wird, wobei $1 \text{ cal} = 4,18 \text{ J} = 4,18 \frac{\text{kg}\cdot\text{m}^2}{\text{s}^2}$ gilt. Bei der Elektrodynamik müssen sie dann zähneknirschend zugeben, dass die elektrische Ladung neben der Masse vielleicht doch eine neue Qualität der Materie ist. Allerdings gibt es bis heute andauernde Versuche, die Maxwell'schen Gleichung mechanistisch aus einer Äthertheorie mit rotativen Freiheitsgraden herzuleiten. Darauf werden wir beim Drallsatz zurückkommen. Von der Quantenmechanik und dem statistischen Aspekt der Wirklichkeit hält man wenig. Mechanik ist von ihrem Grundverständnis her eine deterministische Theorie, was sich in solchen Gedankenkonstrukten wie dem Laplaceschen Dämon widerspiegelt, wonach ein System für gegebene Anfangsbedingungen vorhersagbar ist, insofern man die Grundgleichungen für die Systemdynamik kennt. Und davon gehen die Mechaniker aus, dass solche existieren, bzw. dass man sie kennt, nämlich die Newton–Eulerschen Grundgleichungen, die wir noch besprechen werden.

Die Physiker sind aber mindestens genauso von sich überzeugt. Für sie ist die Mechanik ein abgeschlossenes, relativ langweiliges Teilgebiet. Wenn man einen Physiker jedoch fragt, was der Elastizitätsmodul ist, bzw. wie man die Durchbiegung eines Balkens berechnet und wie der dazugehörige Spannungszustand aussieht, dann werden sich viele dieser Zunft achselzuckend abwenden, denn das sei nicht grundlagenorientiert. Ein naturwissenschaftlich-technisch versierter Mensch kennt aber beide Welten, und damit das so ist, soll daran hier gearbeitet werden.

Die Frage, wie man Masse, Zeit und Länge tatsächlich misst, ist in der Tat ein Kapitel für sich, das wir hier nicht im Detail besprechen. Es sei nur soviel gesagt, dass man für jede dieser Größen ein Normal, also die Einheitsmasse, die Einheitszeit und die Einheitslänge festlegen muss. Andere Massen, Zeiten und Längen bestimmt man dann im relativen Vergleich als Vielfache davon. Außerdem muss man sich davor hüten, andere bislang undefinierte Größen bei der Messung einfließen zu lassen. Zum Beispiel könnte man ja auf die Idee kommen, Massen dadurch zu vergleichen, dass man eine unbekannte Masse mit Einheitsgewichten auf einer Balkenwaage tariert. Dazu jedoch brauchte man den Begriff der (Gewichts-)Kraft, und zwar am besten unabhängig von allen anderen drei Größen. Das jedoch ist seltsam, denn wie man weiß, hat die Kraft die Einheit $\text{N} = \frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{s}^2}$, also muss sie doch durch die drei genannten Grundgrößen herleitbar sein.

Solche Zirkelschlüsse sind Wissenschaftlern schon seit langer Zeit als störend aufgefallen. Wie Goethe sagt: „Denn eben wo Begriffe fehlen, da stellt ein Wort zur rechten Zeit sich ein. Mit Worten lässt sich trefflich streiten, mit Worten ein System bereiten, an Worte lässt sich trefflich glauben, von einem Wort lässt sich kein Jota rauben.“ Das in diesem Zusammenhang nötige, treffliche Wort lautet **primitiv**. Masse, Zeit und Länge sind sogenannte **primitive Größen**. Damit will man aber keineswegs ausdrücken, dass sie ordinär oder simpel sind. In der Natur-

wissenschaft versteht man darunter, dass sie keiner weiteren Erklärung bedeuten und damit basta!

Unsere drei mechanischen Grundgrößen haben noch eine schöne Eigenschaft. Man kann mit jeder einzelnen von ihnen rechnen wie mit reellen Zahlen \mathbb{R} , also zum Beispiel addieren bzw. subtrahieren. Die Reihenfolge ist gleichgültig. Selbstverständlich muss man dabei stets die Einheit hinzufügen. Größen, die über diese schön einfache Eigenschaft verfügen, nennt man **Skalare**.

1.2.2 Kraftbegriff

Die schon erwähnte weitere mechanische Grundgröße **Kraft** ist komplizierter. Sie ist ein sogenannter **gebundener Vektor**, und als solcher gehorcht sie zunächst einmal den in der Toolbox zusammengestellten mathematischen Rechenregeln für Vektoren.



Vektoren Wir bezeichnen Vektoren, wenn wir sie als abstrakte, koordinatenunabhängige Objekte begreifen, mit fettgedruckten Buchstaben, also ***a***, ***b***, etc. Da dies in Handzeichnungen schwierig kenntlich zu machen ist, versehen wir sie dort mit einem Unterstrich. Man kann sie sich anschaulich als Pfeile vorstellen. Man addiert Vektoren geometrisch unter Beachtung der „Hacke-Spitze-Regel“: Man nehme den ersten Vektor aus einer zu addierenden Gruppe und hänge an seine Spitze die Hacke des nächsten, u.s.w., bis alle berücksichtigt wurden. Dann verbinde man die Hacke des ersten Vektors mit der Spitze des letzten. Dies ergibt die äquivalente **Resultierende**. Das Negative eines Vektors erhält man, indem man Pfeilspitze und Pfeilanzfang vertauscht, was auch die Subtraktion erklärt. Es gilt ein Kommutativgesetz:

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}. \quad (1.1)$$

Vektoren kann man bezüglich Basen darstellen. Wenn es sich um vektorielle Größen im physikalischen Raumes handelt, wählt man oft eine kartesische Einheitsbasis \mathbf{e}_i mit $i \in \{1, 2, 3\}$ und schreibt:

$$\mathbf{a} = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3 = \sum_{i=1}^3 a_i \mathbf{e}_i \equiv a_i \mathbf{e}_i. \quad (1.2)$$

Hier tritt die **Einsteinsche Summenkonvention** in Aktion: Über in einem Produkt auftretende gleichnamige Indizes (hier i) wird im 3D-Raum automatisch von eins bis drei summiert. Wenn es sich um ein ebenes Problem handelt, natürlich nur bis zwei.

Das **Skalarprodukt** zwischen zwei Vektoren bildet diese auf eine reelle Zahl ab. Ist $\alpha = \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ der Winkel zwischen den Vektoren ***a*** und ***b***, dann gilt für ihr Skalarprodukt:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \alpha = a_i b_i. \quad (1.3)$$

Man kann das Skalarprodukt als Projektion des einen Vektors auf den anderen deuten. Außerdem kann man damit die Länge eines Vektors berechnen:

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = \sqrt{a_i a_i}. \quad (1.4)$$

Dabei erhält man die Komponentendarstellung $a_i a_i$ in der letzten Gleichung aufgrund der Tatsache, dass gilt:

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{falls } i \neq j. \end{cases} \quad (1.5)$$

Man nennt das Symbol δ_{ij} auch das **Kroneckerdelta**. Wir werden später sehen, dass es die Komponenten des **Einheitstensors** bezüglich orthonormaler Basen angibt (vgl. Gleichung (2.14)).

Das **Kreuzprodukt** bildet zwei Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} auf einen Vektor \mathbf{c} ab:

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \quad (1.6)$$

wobei dieser senkrecht auf \mathbf{a} und \mathbf{b} steht, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = 0$ und $\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = 0$. Für die Länge des Vektors \mathbf{c} gilt:

$$|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \alpha. \quad (1.7)$$

Das ist gleich der durch \mathbf{a} und \mathbf{b} eingeschlossenen Parallelogrammfläche, wobei α wieder den Zwischenwinkel zwischen \mathbf{a} und \mathbf{b} (bei Drehrichtung von \mathbf{a} auf \mathbf{b}) bezeichnet. Die Richtung von \mathbf{c} ist dadurch festgelegt, dass \mathbf{c} auf beiden Vektoren senkrecht steht und \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} in dieser Reihenfolge ein Dreibein bilden (Rechte-Hand-Regel). Eine Komponentendarstellung ist ebenfalls möglich:

$$c_i = \epsilon_{ijk} b_j c_k \quad (1.8)$$

mit dem **Levi-Civita-Symbol**:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i, j, k = 1, 2, 3 \text{ und zyklisch vertauscht} \\ -1 & \text{falls } i, j, k = 2, 1, 3 \text{ und zyklisch vertauscht} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (1.9)$$

Wir werden später sehen, dass ϵ_{ijk} die Komponenten des total antisymmetrischen Tensors dritter Stufe sind. Alternativ ist auch die folgende Determinantendarstellung gültig:

$$\begin{aligned} \mathbf{c} &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \\ &= (a_2 b_3 - a_3 b_2) \mathbf{e}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \mathbf{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \mathbf{e}_3. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Nicht nur bei Kreuzproduktskomponenten ist das Levi-Civita-Symbol nützlich. Man kann es auch dazu verwenden, den dritten Einheitsvektor einer Orthogonalbasis zu ermitteln:

$$\mathbf{e}_i = \epsilon_{ijk} \mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k. \quad (1.11)$$

Dabei sind zum Beispiel i, j, k im Falle einer kartesischen Orthogonalbasis aus der Menge $\{1, 2, 3\}$ und bei Zylinderkoordinaten aus $\{r, \varphi, z\}$.

Wichtig zu kennen ist auch die sogenannte „*bakzapp-Regel*“, die es gestattet, ein doppeltes Kreuzprodukt in zwei Vektoren umzuschreiben:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}), \quad (1.12)$$

und die *Spatproduktsregel*, die das Volumen des durch drei Vektoren aufgespannten Parallelepipedes zu berechnen erlaubt:

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}). \quad (1.13)$$

Das Adjektiv *gebunden* bedarf einer weiteren Erklärung. Mathematische Vektoren können ohne Probleme parallel zu sich verschoben werden. Führt man eine solche Aktion bei einem Kraftvektor durch, so kann sich der Effekt ändern, den er bei einem Körper verursacht. Beispielsweise kann bei Wechsel von einem Körperangriffspunkt A nach B anstelle einer Linksdrehung eine Rechtsdrehung erfolgen. Dieser Fußpunkt erklärt die Bindung eines Kraftvektors an den ihm zugehörigen materiellen Körper. Man darf einen Kraftvektor allerdings längs seiner Wirkungslinie (WL) durch den Fußpunkt verschieben. In der Praxis wird das durch Verbindungselemente (Seile, Stangen) realisiert.

Auch der Kraftvektor ist eine primitive Größe. In der Tat erschließt sich seine Existenz aus dem aristotelischen (abendländischen) Prinzip von Ursache und Wirkung: Wir beobachten eine Deformation an einem Körper oder dessen Beschleunigung bzw. Abbremsung aus einer Anfangsgeschwindigkeit heraus (Wirkung) und glauben, dass dem eine Ursache zugrunde liegen muss. Diese Ursache nennen wir Kraft. Wohlgermerkt, das ist nur ein Name, obwohl Newton Ursache und Wirkung in seinem Gesetz *Kraft = Masse × Beschleunigung* zusammengeführt hat. Davon wird im Kapitel Dynamik noch die Rede sein. Eines sei aber schon jetzt gesagt. Wenn man glaubt, diese Gleichung definiere die Kraft, so ist man auf dem Holzweg. Sie verbindet lediglich diverse primitive Größen, denn die Beschleunigung als zeitliche Änderung der Geschwindigkeit setzt sich ja aus den primitiven Größen Ort und Zeit zusammen. Die Situation ist in einem gewissen Sinne immer noch so wie in alten Zeiten, wo man glaubte, dass ein zorniger Donnergott (die primitive, nicht erklärbare Ursache) seine Blitze (die beobachtete Wirkung) schleuderte. Im Unterschied zu Göttern jedoch ist die Kraft verlässlich und ihre Wirkung beliebig oft reproduzierbar. Das ist der entscheidende, womöglich einzige Vorteil der Naturwissenschaft gegenüber jedweden Glaubens. Aber was Kraft, Masse, Zeit, Länge letztendlich sind, verschweigt des Sängers Höflichkeit. Allerdings erklärt Newtons Grundgleichung die oben genannte Einheit für die Kraft und ihren Zusammenhang zu den Einheiten der mechanischen Grundgrößen. Einheitsentreue muss gegeben sein: $1\text{N} = 1 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2}$.

1.2.3 Einteilung der Kräfte

In der technischen Mechanik sind wir gezwungen, diverse Kraftbegriffe und Kraftmodelle auseinanderzuhalten. Als Kraftbegriffe notieren wir zunächst die sogenannte *äußeren* oder auch *eingepprägten* Kräfte. Sie sind vorgegeben, also bekannte Größen. Das Paradebeispiel ist die Schwerkraft, die jedem massebehafteten Körper auf der Erde innewohnt. Aber auch „von außen“ auf dem Körper angreifende, bereitgestellte Lasten zählen hierzu. Sie entstehen, indem man am Körper willentlich zieht oder drückt. Dieser Zug bzw. Druck kann punkt-, linien-,

flächen- oder volumenförmig angebracht bzw. verteilt werden. Das führt auf die Modelle **Punktkraft** F , **Streckenlast** q , **Flächenkraft** t und **Volumenkraft** f , die in Abb. 1.1 illustriert sind. Während F in Newton angegeben wird, ändern sich je nach Art der Lastverteilung bei den anderen die Einheiten. Wir haben $[q] = \frac{N}{m}$, $[t] = \frac{N}{m^2}$, $[f] = \frac{N}{m^3}$. Manchmal bezieht man die Volumenkraft auf die Massendichte ρ und erhält $[f/\rho] = \frac{m}{s^2}$. Das ist die Einheit einer Beschleunigung, namentlich der Erdbeschleunigung g . Den Betrag der Volumenkraft nennt man auch die **Wichte** (spezifisches Gewicht) γ . Sie ist gleich der Dichte multipliziert mit dem Betrag der Erdbeschleunigung $\gamma = \rho g$.

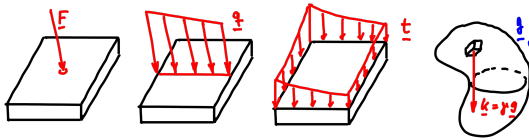


Bild 1.1 Illustration verschiedener Kraftarten.

Als weiterer Kraftbegriff seien die **Trägheitskräfte** notiert. Eine Beispiel hierfür ist der mit negativem Vorzeichen versehene Ausdruck Kraft \times Beschleunigung. Hier begeben wir uns jedoch auf gefährliches Eis, da wir damit beginnen, Ursache und Wirkung zu vertauschen bzw. begrifflich zu verwässern.

Kommen wir nun zu dem Begriff **Reaktions- bzw. Zwangskräfte**. Dieses sind Kraftgrößen, die daraus resultieren, dass man einem Körper seine „Bewegungsfreiheit nimmt“. Die Bewegungsfreiheit lässt sich dadurch einschränken, dass man den Körper fesselt, und das geschieht in der Technik durch Lagerung, also mit Hilfe von Seilen, Stangen, Gelenken etc. Nun interessiert natürlich, welche Belastung diese Lager als Konsequenz eingepprägter Kräfte erfahren. Diese Belastungen sind also unbekannt und darüber hinaus zunächst nicht sichtbar. Sichtbar werden sie erst im sogenannten **Freischnitt** (englisch *free body diagram*). Das Vorgehen ist in der Abb. 1.2 für ein einfaches Beispiel illustriert. Zu sehen ist ein Klotz mit dem Gewicht G (eingepprägte Kraft), der auf dem Boden aufliegt. Man möchte wissen, unter welcher Belastung der Boden steht. Man schneidet also die Kontaktfuge frei. Man beachte: Die Fuge hat zwei Seiten, eine zum Klotz und eine zum Erdboden hin. Für diesen Schnitt ist ein Preis zu zahlen, der darin besteht, dass man eine unbekannte Kontakt- bzw. Reaktionskraft F in der klotzseitigen Fuge, d. h. der Klotzunterseite einträgt. Außerdem trägt man eine gleichgroße entgegengesetzte Kraft $-F$ auf der erdbogen-seitigen Fuge an. Schiebt man beide Bilder übereinander, so ist man wieder beim Ausgangszustand angelangt, wo man die Reaktionskräfte „nicht sieht“.

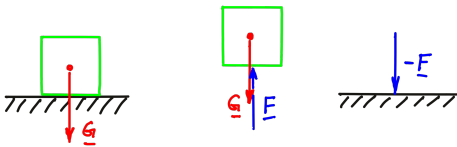


Bild 1.2 Freischnitt eines Klotzes im Schwerfeld.

In der Statik ist es nun so, dass die Kraft F dem Gewicht G das Gleichgewicht hält. Beide sind betragsmäßig gleich groß und entgegengesetzt zueinander gerichtet. Wir werden das Prinzip der verschwindenden Gesamtkraft weiter unten in mathematischer Form als ein wesentliches Prinzip der Statik und

später als einen Spezialfall der Dynamik begreifen lernen. Wir werden auch noch sehen, dass man alle unbekanntes Reaktionskräfte aus Kräfte- und Momentengleichgewicht berechnen kann, wenn es sich um ein sogenanntes **statisch bestimmtes** System handelt. Manchmal jedoch gelingt das nicht. Dann benötigt man zusätzlich Elemente der Festigkeitslehre, um zum Ziel zu gelangen.

Natürlich ist der Freischnitt nicht immer so einfach wie im Beispiel. Wenn wir über Lagerungen sprechen, werden wir weitere solche **äußere**, durch Lagerungen hindurchgehende **Freischnitte** kennenlernen, die je nach Art des Lagers mehr oder weniger komplex ausfallen können. Bevor wir uns nun abschließend den inneren Freischnitten zuwenden, sind ein paar Bemerkungen angebracht.

- **Kraft und Gegenkraft** Dieses im Freischnitt der Fuge angewandte Prinzip geht wohl auf Newton zurück: Jede freigeschnittene **Kontaktkraft** kommt mit einer betragsmäßig gleichgroßen, aber entgegengesetzt gerichteten Kraft einher. Man sagt mantraähnlich gerne **actio = reactio**. Im Dynamikkapitel werden wir diese Aussage als Newtons **Lex Tertia** kennenlernen. Sie ist aber insbesondere in der Statik in der erläuterten Form gültig.

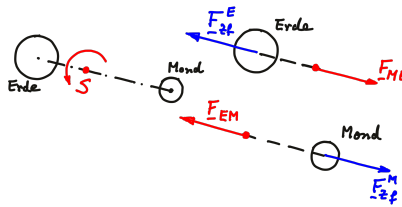


Bild 1.3 Freischnitt der Gravitationswirkung Erde-Mond.

- **Fernwirkungsprinzip, dynamisches Gleichgewicht, Prinzip von d'Alembert** Im diskutierten Beispiel sind offensichtlich die Kraft und die Gegenkraft **gleichzeitig** präsent, denn beide „befinden sich“ in derselben Fuge an demselben Punkt. Betrachten wir nun das Beispiel des Systems Erde-Mond. Man kann sich das idealisiert so vorstellen, dass beide wie ein starrer, aus zwei ungleichen, radialsymmetrischen Massen bestehender Hantelkörper mit einer Winkelgeschwindigkeit um den (Schwer-)Punkt S drehen. Das ist jedoch ein gedachter Punkt, denn die Stange, welche in einer richtigen Hantel die beiden Köpfe verbindet, fehlt. Trotzdem schneiden wir wie in Abb. 1.3 dargestellt frei. Wir erhalten zwei Teilsysteme, eins für die Erde, eins für den Mond. Im ersten Fall wirkt die Kraft F_{ME} , die der Mond aufgrund seiner Gravitation auf die Erde ausübt, und im zweiten Fall die Kraft F_{EM} , mit der die Erde den Mond anzieht. Es gilt $F_{ME} = -F_{EM}$, also **actio = reactio**. Man beachte: Die Gravitationswirkung wird ohne ein Medium, sozusagen durch das Vakuum übertragen. Für wahre Mechaniker ist das eine unangenehme Vorstellung. Man nennt das abschätzig auch **Fernwirkung**. Außerdem teilt sich (nach Newton) die Information, dass eine Masse gravitiert, unendlich schnell über beliebig weite Distanzen hinweg mit. Auch das klingt nach Science Fiction. Schließlich fragt man sich, welche Kraft im Erde-Mond-Beispiel den Gravitationskräften denn eigentlich das Gleichgewicht hält. Der Franzose d'Alembert hat darauf eine Antwort. Es handelt sich hier doch eigentlich um ein dynamisches Problem, und dann muss man neben den Freischnittkräften auch noch die mit einem negativen Vorzeichen versehene Trägheitskraft, genannt **Zentripetalkraft**, antragen. Dieses Konglomerat nennt man dann auch **Zentrifugalkraft** F_{Zf} . Höchst abstrus das Ganze! Darum lassen sich Newtonianer auch nicht darauf ein. Im Kapitel über Kontinuumsmechanik werden wir diese beiden Standpunkte miteinander vergleichen und verstehen, dass dies mit dem sogenannten Beobachterwechsel zusammenhängt.

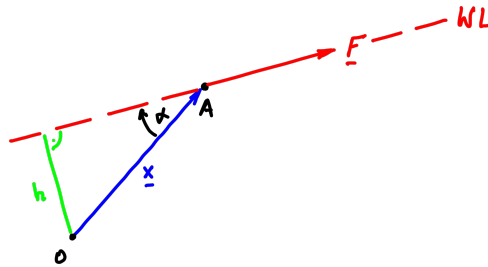


Bild 1.5 Moment einer Kraft und Wirkungslinie.

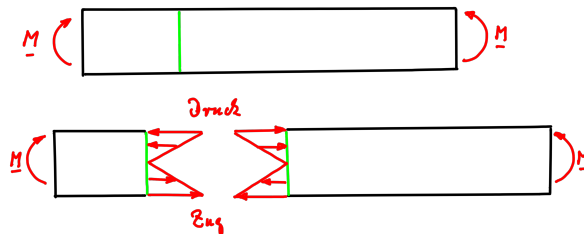


Bild 1.4 Freischnitt durch Balkenquerschnitt.

Nun zu den **inneren Reaktionskräften**. Wir betrachten die in Abb. 1.4 dargestellte Situation eines belasteten Balkens. Unter dem gezeichneten Biegemoment M wird er sich „zu einem Smiley“ biegen: Der Obergurt wird dabei gestaucht und der Untergurt gestreckt. Diese Wirkung wird sich aufgrund innerer Kräfte im Balken einstellen. Um sie sichtbar zu machen, müssen wir über dem Querschnitt A wie gezeichnet freischnitten. Dieser innere Schnitt durch Materie enthüllt die inneren Reaktionskräfte. Man beachte, dass auch hier das Actio=Reactio-Prinzip gilt: Wenn man die beiden Teilbalken zusammenführt, annihilieren sich die Kraftverteilungen der beiden Teilbalken und die Situation vor dem Schnitt ist wiederhergestellt. Solche inneren Reaktionskräfte zu kennen, ist wichtig, denn sie entscheiden darüber, ob der Balken zerreißt, absichert oder knickt.

1.2.4 Momentenbegriff

Beim letzten Beispiel war bereits von Biegung aufgrund einer externen Kraftwirkung die Rede. Diese Biegung resultiert eigentlich aus einem Drehmoment, respektive Drehmomentenvektor, den wir wie folgt definieren:

$$\mathbf{M}^{(O)} = \mathbf{x} \times \mathbf{F}. \quad (1.14)$$

Dabei ist O ein beliebiger Fußpunkt oder auch Bezugspunkt, der über den Ortsvektor wie in Abb. 1.5 gezeichnet zum im Punkt A angreifenden Kraftvektor führt. \mathbf{x} wird in diesem Zusammenhang auch als **Aufpunkt** bezeichnet. Es gilt für den Hebelarm h , der als Senkrechtabstand vom Fußpunkt zur Wirkungslinie der Kraft definiert ist:

$$h = |\mathbf{x}| \sin \alpha. \quad (1.15)$$

Also wegen [Gleichung \(1.7\)](#):

$$|\mathbf{M}^{(0)}| = |\mathbf{F}|h. \quad (1.16)$$

Das ist die Archimedische Definition des Begriffes Moment als Kraft×Hebelarm. Sehr oft studieren wir in der Technischen Mechanik ebene Probleme. Dann ist $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2$ und $\mathbf{F} = F_1\mathbf{e}_1 + F_2\mathbf{e}_2$. Mit den Gleichungen [Gleichung \(1.14\)](#) und [Gleichung \(1.10\)](#) finden wir dann:

$$\mathbf{M}^{(0)} = (F_2x_1 - F_1x_2)\mathbf{e}_3. \quad (1.17)$$

Wir fassen dieses Ergebnis in einem Merksatz zum praktischen Gebrauch zusammen:



Bei ebenen Problemen steht der Momentenvektor senkrecht zur Zeichenebene ($\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$). Er kann aus ihr heraus- oder hineinzeigen. Das entspricht einem positiven Wert und umgekehrt. Wir berechnen diese Komponente in \mathbf{e}_3 -Richtung mit der einfachen Regel Kraft×Hebelarm der einzelnen Kraftkomponenten F_1, F_2 , die mit Pfeilspitzen eingezeichnet werden. Dabei gilt „linksrum um O“ ist positiv und „rechtsrum“ negativ. Im gezeichneten Fall entspricht das den Produkten F_2x_1 und $-F_1x_2$.

Einige Bemerkungen sind angezeigt:

- Der Momentenbegriff wird korrekterweise über den Momentenvektor erklärt. In der Praxis zweidimensionaler Probleme ist es jedoch oft müßig, den Vektorbegriff zu bemühen. Hier hilft der Merksatz weiter!

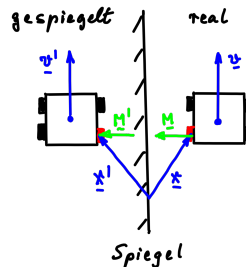


Bild 1.6 Polare und axiale Vektoren.

- Aufgrund der Definition über das Kreuzprodukt ist der Momentenvektor ein **axialer Vektor** im Gegensatz zum Ortsvektor oder zum Kraftvektor, die **polare Vektoren** sind. Axiale Vektoren behalten bei einer Punktspiegelung ihr Vorzeichen bei, polare nicht. Das ist in der [Abb. 1.6](#) zu sehen: Das Auto bewegt sich aufgrund eines vom Motor auf die Hinterachse wirkenden Drehmoments, repräsentiert durch den Momentenvektor \mathbf{M} . Auch sein Spiegelbild bewegt sich in dieselbe Richtung. Dazu gehört ein Momentenvektor $\mathbf{M}' = \mathbf{M}$, der in dieselbe Richtung weist. Beim Positionsvektor des linken Hinterrades jedoch wechselt der Pfeil von rechts auf links zeigend. Dieser wird demnach gespiegelt.
- Begreift man den Momentenvektor ausschließlich über eine Kraftgröße, wie in [Gleichung \(1.14\)](#) geschehen, so handelt es sich um eine abgeleitete und nicht um eine primitive Größe.

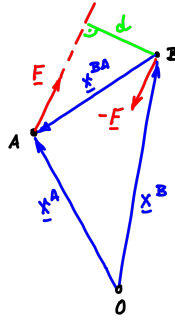


Bild 1.7 Ein Kräftepaar.

Die Aussage des letzten Spiegelpunktes ist fragwürdig, wie wir nun sehen werden. Betrachte die in der Abb. 1.7 gezeigte Situation von zwei antiparallelen, gleich großen Kraftvektoren $\pm F$, deren Wirkungslinien nicht zusammenfallen. Die Gesamtkraftwirkung ist also null. Die Momentenwirkung jedoch nicht und gegeben durch:

$$M^{(O)} = (\mathbf{x}^A - \mathbf{x}^B) \times F. \quad (1.18)$$

Wie man sich überzeugt, hängt der Differenzvektor **nicht** von der Wahl des Fußpunktes O ab. In der Tat ergibt sich bei Auswertung des Kreuzproduktes für den Betrag des Momentenvektors genau $M = dF$, wobei d der einzeichnete Senkrechte Abstand ist, und diese Größe hängt von O nicht ab. Man kann nun in Gedanken einen Grenzprozess durchführen, und zwar so, dass $d \rightarrow 0$ und $F \rightarrow \infty$ mit $M = \text{const.}$ gilt. Das wird dann nochmals abstrahiert, und man spricht von der Existenz eines **reinen Momentes** bzw. **reinen Momentenvektors M** oder auch **Momentenpaares** (englisch *moment couple*), das nicht auf Kraft und Abstandsdefinitionen beruht, sondern eine eigenständige primitive Größe verkörpert. An den Vektor schreiben wir auch keinen Fußpunkt O, und er darf beliebig im Raum verschoben werden, ohne dass sich seine Wirkung auf einen Körper ändert. In Cartoonzeichnungen verwenden wir für das reine Moment gerne die Symbole \odot und \ominus , um (meist für ebene Probleme) anzudeuten, dass es sich um ein links (positives) oder rechts (negatives) drehendes, reines Moment handelt. Ein letztes Wort zu diesem Thema: Irgendwie muss man ein Momentenpaar ja erzeugen und wenn man an den Grenzprozess denkt, ja wohl letztlich auf atomaren Wirkungsfeldern beruhend begreifen. Wären dies rein radial gerichtete Kraftwirkungen, so wäre das Momentenpaar eine abgeleitete Größe. Es scheint jedoch wohl so zu sein, dass es auch wirbelförmige Felder gibt.

Beispiel 1.1 Streckenlast I

In den Kapiteln, die sich mit Balken beschäftigen, z. B. Abschnitt 1.6, spielen Streckenlasten q eine wesentliche Rolle. Zur Vertiefung dieses Begriffs betrachten wir erstens einen statisch bestimmt gelagerten Balken von gleichbleibendem Querschnitt der Länge ℓ , auf dessen Oberkante mit der Weite b_0 das Gewicht einer Sandschüttung (Wichte γ_0 in N/m^3) ruht: Abb. 1.8. Am linken Ende ist die Höhe der Schüttung h_0 , am rechten $h_0 + h_1$ wie gezeichnet. Wir nehmen an, dass der Sand feucht ist und am Oberkante des Trägers „klebt“. Positionen auf der Flächenschwerachse können wir entweder durch die Koordinate $0 \leq s \leq \ell$ über den Richtungsvektor \mathbf{n} (der Normalenvektor im Flächenschwerpunkt S des Balkenquerschnittes) oder durch die Horizontalabstände

$0 \leq x \leq \ell \cos \alpha$ mit dem horizontalen Richtungsvektor \mathbf{e}_x erfassen. Geometrische Überlegungen führen dann auf eine in diesen Koordinaten lineare Funktion der Schütthöhe:

$$h(x) = h_0 + \frac{x}{\ell} \frac{h_1}{\cos \alpha} \equiv h_0 + x \tan \alpha \quad \text{oder} \quad h(s) = h_0 + s \sin \alpha = h_0 + \frac{h_1}{\ell} s. \quad (1.19)$$

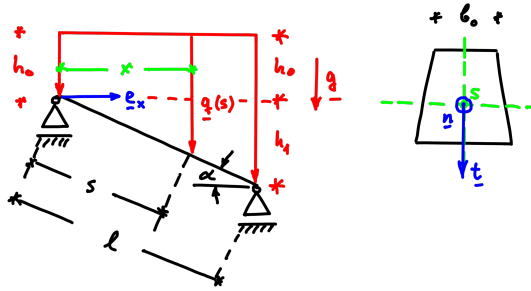


Bild 1.8 Geneigter Stab prismatischen Querschnitts.

Die Streckenlast $\mathbf{q}(s)$ wird im Eigensystem des Balkenquerschnitts dargestellt. Dazu führen wir zusätzlich noch den Tangentialvektor \mathbf{t} an die Querschnittsfläche wie gezeichnet ein:

$$\mathbf{q}(s) = n(s)\mathbf{n} + q_n(s)\mathbf{t}. \quad (1.20)$$

Darin sind \mathbf{n} und \mathbf{t} der Normalenvektor und der Tangentialvektor der *Schnittfläche* und nicht der Oberfläche des Körpers, siehe Abb. 1.8 rechts. Man nennt die Anteile $n(s)$ und $q_n(s)$ dementsprechend Normal- und Querlastverteilungen, wobei zu die Normallast tangential an der Balkenoberfläche liegt und die Querlast senkrecht zu dieser – eben genau andersherum als in Bezug auf die Schnittfläche. Wir werden später sehen, dass $n(s)$ und $q_n(s)$ für die Schnittlasten Normalkraft- und Querkraftverteilung verantwortlich sind. Nichtsdestotrotz ist es wichtig sich zu erinnern, dass im dargestellten Fall ihr Angriffspunkt (man erinnere, dass Kräfte gebundene Vektoren sind) auf der Oberseite des Balkens liegt, ganz genau gesagt in der zugehörigen Schwerachsebene des Querschnitts. Wir haben:

$$n(s) = q(s) \sin \alpha, \quad q_n(s) = q(s) \cos \alpha. \quad (1.21)$$

Den Betrag $q(s)$ der Querlast findet man über das Gewicht der Sandschüttung an der Stelle s :

$$q(s) = \gamma_0 b_0 h(s) \quad (1.22)$$

und mithin:

$$n(s) = \gamma_0 b_0 (h_0 + s \sin \alpha) \sin \alpha, \quad q_n(s) = \gamma_0 b_0 (h_0 + s \sin \alpha) \cos \alpha, \quad s \in [0, \ell]. \quad (1.23)$$

Der Spezialfall eines horizontalen Balkens $\alpha = 0$ bringt:

$$n(x) = 0, \quad q_n(x) = \gamma_0 b_0 h_0 = \text{const.} \quad (1.24)$$

So erklärt es sich, dass man $n(s)$ in vielen Büchern wenig Beachtung schenkt und sich auf $q_n(s)$ fokussiert, das man kurz auch mit $q(x)$ (Querlastverteilung) bezeichnet. ■

Beispiel 1.2 Streckenlast II

Das vorherige Beispiel 1.1 hat gezeigt, dass es nicht ganz einfach ist, Quer- und Normallasten zu realisieren. Der erwähnte Sand muss sozusagen am geneigten Balken „kleben“, damit dies geschieht, oder man hängt Gewichte dran. Dann sind die Verteilungen aber nicht wirklich kontinuierlich, sondern eher diskret.

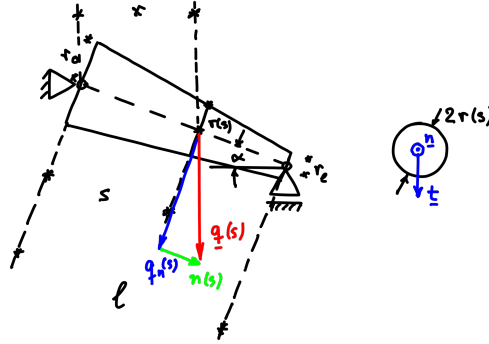


Bild 1.9 Geneigter konischer Stab.

Wirklich kontinuierliche Verteilungen erhält man, wenn man das Eigengewicht des Balkens beachtet. Betrachten wir dazu den in Abb. 1.9 geneigten konischen Stab der Länge ℓ und der Wichte γ_0 . Am linken Ende habe er die Fläche $A_0 = \pi r_0^2$ und rechts $A_\ell = \pi r_\ell^2$. Mit den Bezeichnungen für Koordinaten aus Beispiel 1.1 schreiben wir für die Zwischenradien:

$$r(s) = r_0 + \frac{s}{\ell}(r_\ell - r_0). \tag{1.25}$$

Über das Gewicht der eingezeichneten Kreisscheibe findet man für den Betrag der Streckenlast:

$$q(s) = \gamma_0 b_0 \pi r^2(s) \tag{1.26}$$

und somit:

$$n(s) = \gamma_0 \pi \left[r_0 + \frac{s}{\ell}(r_\ell - r_0) \right]^2 \sin \alpha, \quad q_n(s) = \gamma_0 \left[r_0 + \frac{s}{\ell}(r_\ell - r_0) \right]^2 \cos \alpha, \quad s \in [0, \ell]. \tag{1.27}$$

Anders als im vorherigen Fall liegt der Angriffspunkt dieser Kraftverteilungen aber nicht auf der Oberkante der Kreisquerschnitte, sondern im Zentrum des Kreises, seinem Flächenschwerpunkt. Speziell für einen horizontal gelagerten konischen Stab ($\alpha = 0$) finden wir:

$$n(x) = 0, \quad q_n(x) = \gamma_0 \left[r_0 + \frac{x}{\ell}(r_\ell - r_0) \right]^2. \tag{1.28}$$

Offenbar ist die Querlastverteilung diesmal nicht konstant, sondern wächst quadratisch über x an. ■

■ 1.3 Die Grundgleichungen der Statik



Propädeutikum: Man studiere aus [MF2019] die Abschnitte 1.2 und 1.3.

Kräfte- und Momentensumme

Wir betrachten einen beliebigen, **freigeschnittenen**, dreidimensionalen Körper. Er steht unter der Wirkung diverser Kräfte \mathbf{F}^i , $i = 1, \dots, N$ und Momentenpaare \mathbf{M}^j , $j = 1, \dots, M$. Damit sich der Körper nicht **translativ** bewegt, muss **Newtons Grundgleichung der Statik**, der **Kräftegesetz** (von manchen Mechanikaficionados auch **erstes Eulersches Gesetz der Statik** genannt), erfüllt sein:

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{F}^i = \mathbf{0}. \quad (1.29)$$

Um zu garantieren, dass er auch nicht **rotiert**, ist zusätzlich die **Eulersche Momentengleichung**, der **zweite Eulersche Satz der Statik**, auch **Drallsatz der Statik** genannt, zu erfüllen:

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{x}^i \times \mathbf{F}^i + \sum_{j=1}^M \mathbf{M}^j = \mathbf{0}. \quad (1.30)$$

Die Zusammenfassung in Worten für die Praxis lautet:



In der Statik verschwindet die Summe der an einem freigeschnittenen Körper angreifenden Kräfte und Momente. Ansonsten kommt es zu einer i. A. kombinierten translativ-rotativen Bewegung, die wir im Dynamikteil untersuchen.

Wieder sind diverse Bemerkungen fällig:

- Bei den Gleichungen **Gleichung (1.29)** und **Gleichung (1.30)** handelt es sich um vektorielle Gleichungen. Somit kann man bei vollständigem Freischnitt einer räumlichen Struktur in p Untersysteme im Prinzip $6p$ Gleichungen erzeugen. Diese dienen zur Bestimmung der Kräfte und Momente in den Verbindungen, über welche die Struktur derart gelagert ist, dass die von außen angebrachten Kräfte und Momente sie weder zu translativer noch zu rotativer Bewegung führen. Sie werden die Konstruktion allerdings möglicherweise deformieren, und dabei verschieben sich dann auch ihre Angriffspunkte. Wohin genau, ist unbekannt. Nun sind bei Konstruktionen aus Metall und bei nicht allzu hoher äußerer Belastung diese Verschiebungen klein. Daher vernachlässigt man diesen Effekt und studiert Kräfte- und Momentengleichgewicht in der **linearen Elastomechanik** am **undeformierten System**.
- Beachte, dass **Gleichung (1.30)** nicht einfach aus **Gleichung (1.29)** ableitbar ist, indem man die Kräfte \mathbf{F}^i mit \mathbf{x}^i kreuzmultipliziert und über alle Produkte summiert. Der Unterschied sind die unabhängig von Kräften existierenden freien Momente \mathbf{M}^j . Wenn man an ihre Existenz glaubt, sieht man, dass beide Gleichungen ein voneinander unabhängiges Existenzrecht haben. Auf diesen subtilen Sachverhalt werden wir in der Dynamik nochmals

zurückkommen, stellen aber schon jetzt fest, dass im genannten Sinne der Kräfte- und der Drallsatz als voneinander **unabhängig** aufzufassen sind.

- Manchmal sind nicht alle freigeschnittenen Untersysteme wirklich dreidimensional. Zum Beispiel ist ein zwei Scheiben verbindendes, gespanntes Seil in unserer idealisierten Auffassung der elementaren Statik ein eindimensionaler Gegenstand, in dem in Achsrichtung eine (unbekannte) Zugkraft wirkt, so dass man daran auch kein Momentengleichgewicht studieren kann. Die Vektorgleichungen können also durchaus degenerieren.
- Ein technisches System, bei dem man nach vollständigem Freischnitt alle Lager- und Verbindungsreaktionen bestimmen kann, nennt man **statisch bestimmt**. Zur sicheren Auslegung statisch unbestimmter Systeme im Hinblick auf die äußeren Reaktionen, benötigt man zusätzlich Gleichungen aus der Festigkeitslehre. Das werden wir in dem zugehörigen Kapitel sowie im Teil Energiemethoden vertiefen.
- Bei der konkreten Auswertung des Kraftanteils in [Gleichung \(1.30\)](#) muss man einen Fußpunkt O wählen. Erst dann erhält man konkrete Gleichungen für die unbekanntenen Reaktionen. Welcher Fußpunkt das jedoch ist, spielt keine Rolle, denn es gilt für zwei Fußpunkte O und O', die über $\mathbf{x}'^i = \mathbf{x}^{OO'} + \mathbf{x}^i$ auseinanderliegen:

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{x}'^i \times \mathbf{F}^i = \sum_{i=1}^N (\mathbf{x}^{(OO')} + \mathbf{x}^i) \times \mathbf{F}^i = \mathbf{x}^{(OO')} \times \sum_{i=1}^N \mathbf{F}^i + \sum_{i=1}^N \mathbf{x}^i \times \mathbf{F}^i \equiv \sum_{i=1}^N \mathbf{x}^i \times \mathbf{F}^i, \quad (1.31)$$

letzteres wegen [Gleichung \(1.29\)](#). Es sei jedoch darauf hingewiesen, dass es rechentechnisch günstige und ungünstige Wahlen der Fußpunkte gibt.

- Greifen am freigeschnittenen System lediglich Kräfte an, die (mit ihren Wirkungslinien) alle durch einen gemeinsamen Punkt O gehen, so spricht man von einer **zentralen Kräftegruppe**. In diesem Fall ist das Momentengleichgewicht in [Gleichung \(1.30\)](#) identisch erfüllt, denn bei allen Kräfte sind die Hebelarme gleich Null.
- Manchmal interessiert die Frage, wie man eine beliebig vorgegebene, nicht [Gleichung \(1.29\)](#) und [Gleichung \(1.30\)](#) genügende Kräftegruppe ins Gleichgewicht bringen kann. Die Antwort lautet, dass man als erstes alle Kräfte und Momente zu **Resultierenden** zusammenfasst:

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}^i \neq \mathbf{0}, \quad \mathbf{M}^R = \sum_{i=1}^N \mathbf{x}^i \times \mathbf{F}^i + \sum_{j=1}^M \mathbf{M}^j \neq \mathbf{0} \quad (1.32)$$

und dann als zweites am System die Größen $-\mathbf{R}$ und $-\mathbf{M}^R$ anbringt. Das schließt das Kraftreck und eliminiert die kombinierte Momentenwirkung, siehe [Abb. 1.10](#). Man kann das auch so ausdrücken, dass man jede vorgegebene Kraft- und Momentenverteilung durch einen Kraft- und einen Momentenvektor ersetzen kann. Selbstverständlich muss der Momentenvektor \mathbf{M}^R in dem Punkt angebracht werden, von dem aus man die Momentenwirkung der einzelnen Kräfte vermisst, also von dem aus die Abstandsvektoren \mathbf{x}^i gemessen werden.

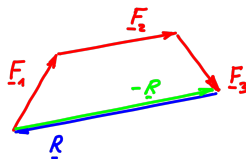


Bild 1.10 Ein Kraftreck und Resultierende.

- Oft sind ebene Probleme von Interesse, z. B. in der durch die Vektoren \mathbf{e}_1 und \mathbf{e}_2 aufgespannten Ebene. Dann degeneriert Gleichung (1.29) zu zwei unabhängigen Komponenten und Gleichung (1.30) zu einer (in \mathbf{e}_3 -Richtung wegen des Kreuzproduktes). Man schreibt kurz:

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum M^{(O)} = 0. \quad (1.33)$$

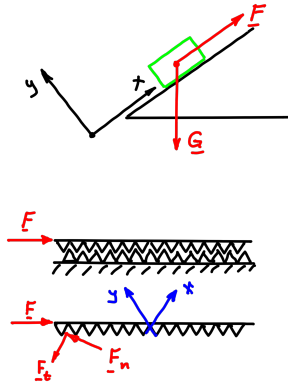


Bild 1.11 Schiefe Koordinaten.

D. h. in der rauen Ingenieurpraxis werden anstelle einer Darstellung der Kraftvektoren in der Einheitsbasis ($\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$) die Komponenten meist direkt angesprochen, wobei man statt 1,2 als Indizes die Richtungen x, y verwendet, jedenfalls wenn man so die Ebene charakterisiert, in der das Problem untersucht wird.

- Man beachte jedoch: Die Koordinaten x, y müssen nicht immer horizontal und vertikal zeigen, siehe Abb. 1.11. Man kann sie gegebenenfalls der Problemgeometrie anpassen, z. B. entlang und senkrecht zu einer schiefen Ebene zeigen lassen. Es ist sogar möglich, mit x und y zwei nicht orthogonale Richtungen zu bezeichnen. Allerdings dürfen sie nicht parallel sein. Das ist bei gewissen Problemen nützlich, z. B. bei Kräften an einer (idealisierten) Zahnradkette (mit Reibung). Auch muss man nicht immer zwei Kraftbedingungen auswerten. Alternativ zu Gleichung (1.33) kann man eine Kraft- und zwei Momentenbedingungen um zwei unterschiedliche Drehpunkte O und O' wählen, also:

$$\sum F_x = 0 \quad \text{oder} \quad \sum F_y = 0, \quad \sum M^{(O)} = 0 \quad \text{und} \quad \sum M^{(O')} = 0. \quad (1.34)$$

Die jeweilig überzählige Gleichung kann zur Kontrollrechnung verwendet werden. Sie muss bei richtiger Rechnung identisch erfüllt sein.

- Zur Darstellung von Kräftefreischnitten ebener Probleme ist noch Folgendes prinzipiell anzumerken: Bislang haben wir auf die Vektornotation des Freischnittes großen Wert gelegt. Zum Beispiel wurde in Abb. 1.2 zwischen \mathbf{F} und $-\mathbf{F}$ an den beiden Freischnittufern unterschieden und zusätzlich noch ein Kraftpfeil angebracht, der die angenommene Richtung angibt. Das ist redundant. Es hätte vollauf genügt, die globalen Richtungen x, y zu definieren, die zwei Kraftpfeile zu zeichnen und an beide den Betrag F zu schreiben (siehe auch Abb. 1.22). Bei der Auswertung von Gleichung (1.34) wäre dann klar, welcher Kraftkomponentenanteil positiv oder negativ ist. In der Tat geht man so in der technischen Praxis vor.

Der Wert der Vektorrechnung zeigt sich erst bei dreidimensionalen Problemen, und selbst da ist der Praktiker geneigt, in drei Projektionsebenen (anstatt einer Ebene) zu arbeiten. Letztendlich ist es eine Frage des Geschmacks, doch die Erfahrung zeigt, dass man bei 2D-Problemen mit der beschriebenen x, y -Methode, Kraftpfeilen und Kraftbeträgen am Kraftpfeil am besten fährt.

Beispiel 1.3 Zentrale Kräftegruppe

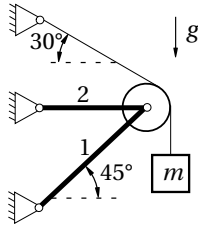


Bild 1.12 Pendelstütze.

Betrachtet wird die Pendelstützenkombination aus Abb. 1.12. Sie besteht aus den zwei Stützen 1 und 2 im Zentrum einer reibungsfrei drehbar gelagerten Kreisrolle, über die eine Masse m mit einem Seil geführt wird. Zur Vereinfachung wird angenommen, dass die Gewichte der Rolle, der Stäbe und des Seils vernachlässigt werden können. Außerdem soll das Seil reibungsfrei über die Rolle geführt werden, d. h. mitdrehen.

Zur Auslegung der Stäbe sowie des Seils werden die in ihnen wirkenden Kräfte benötigt. Diese werden mittels geeigneter Freischnitte bestimmt. In Abb. 1.13 beginnen wir zunächst mit dem einfachsten Freischnitt der Masse. Dabei ist zu beachten, dass die Seilkraft S tangential an das Seil gezeichnet wird und eine Zugkraft ist, denn Seile können keine Druckkräfte aufnehmen. Zusätzlich sind in der Abbildung die Freischnitte des Seils und der Rolle dargestellt. Sicherlich könnten auch die Stäbe selbst freigeschnitten werden, allerdings müssten dann die sichtbar werdenden Lagerkräfte bestimmt werden, die aber hier nicht von Interesse sind. Zu beachten ist, dass die Stabkräfte S_1 und S_2 als Zugkräfte angenommen wurden. Diese Konvention wollen wir in Zukunft beibehalten, so dass ein positives Vorzeichen der Stabkräfte auch für eine Zugkraft steht und andersherum ein negatives Vorzeichen für Druckkräfte.

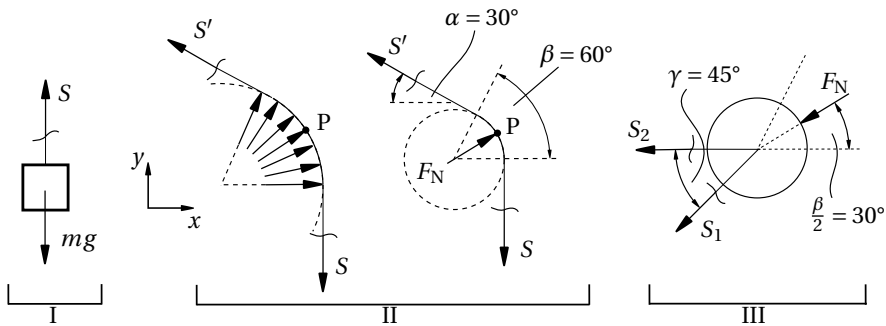


Bild 1.13 Freischnitte am System der Pendelstütze. I Masse. II Seil. III Rolle.

Der Freischnitt II des Seils bedarf zusätzlicher Bemerkungen. Zunächst folgt aus der Annahme der reibungsfreien Führung, dass die Kraft der Rolle auf das Seil eine reine Normalkraft ist. Diese Kraft ist eigentlich über eine Kontaktfläche mit der Rolle verteilt. Zur Bestimmung der Seilkräfte S' und S wird die Kraftverteilung durch die Rolle durch eine resultierende Normalkraft F_N ersetzt, die im Kraftzentrum angreift (vgl. Abschnitt 1.4.3). Unter der Annahme, dass die Druckkraft durch die Rolle symmetrisch verteilt ist,

greift die resultierende Kraft F_N unter dem halben Umschlingungswinkel $\beta/2 = 30^\circ$ an. Im letzten Freischnitt III sind nun endlich die gesuchten, in Achsrichtung weisenden Stabkräfte S_1 und S_2 zu sehen, die die Last in Form der Normalkraft F_N tragen.

In allen drei Freischnitten sind ausschließlich zentrale Kräftegruppen zu erkennen, weshalb die Analyse der Kräftegleichgewichte genügt. Aus dem ersten Freischnitt ergibt sich die untere Seilkraft sofort zu $S = mg$. Für das System II müssen die Kräftegleichgewichte in beiden Richtungen x und y bemüht werden, womit sich das folgende Gleichungssystem ergibt:

$$\begin{aligned} \sum F_x \stackrel{!}{=} 0: \quad & -S' \cos \alpha + F_N \cos \frac{\beta}{2} = 0, \\ \sum F_y \stackrel{!}{=} 0: \quad & S' \sin \alpha + F_N \sin \frac{\beta}{2} - S = 0. \end{aligned} \quad (1.35)$$

Mithilfe des Additionstheorems

$$\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \sin(\alpha + \beta) \quad (1.36)$$

kann aus dem Gleichungssystem die Seilkraft S' eliminiert und die Normalkraft gewonnen werden:

$$F_N = \frac{\cos \alpha}{\sin(\alpha + \beta/2)} S = \frac{\cos 30^\circ}{\sin 60^\circ} mg = mg. \quad (1.37)$$

Dieses Ergebnis kann wieder in das Gleichungssystem eingesetzt werden, so dass sich die obere Seilkraft ebenfalls zu $S' = mg$ ergibt. An der reibungsfreien Rolle wird die Kraft also durch ein Seil lediglich umgelenkt, ändert jedoch nicht ihren Betrag. Abschließend folgt aus dem Kräftegleichgewicht an der Rolle

$$\begin{aligned} \sum F_x \stackrel{!}{=} 0: \quad & -S_2 - F_N \cos \frac{\beta}{2} - S_1 \cos \gamma = 0, \\ \sum F_y \stackrel{!}{=} 0: \quad & -S_1 \sin \gamma - F_N \sin \frac{\beta}{2} = 0, \end{aligned} \quad (1.38)$$

das die Stabkräfte gegeben sind durch

$$S_1 = -\frac{mg}{\sqrt{2}}, \quad S_2 = -\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)mg. \quad (1.39)$$

Die negativen Vorzeichen zeigen, dass beide Stäbe auf Druck belastet werden. Diese Information ist wichtig für Stabkonstruktionen, da Stäbe, die auf Druck belastet werden, Gefahr laufen zu knicken. ■

Beispiel 1.4 Allgemeine Kräftegruppe 2D

Betrachtet wird der masselose Hebel der Länge b in Abb. 1.14. Das Ende des Hebels trifft die Horizontale in einem Winkel $\alpha = 30^\circ$ und wird durch die horizontal wirkende Kraft F belastet. Eine betragsmäßig gleich große Normalkraft soll im Abstand s zum Lagerpunkt A so angreifen, dass der starre Hebel im statischen Gleichgewicht ist.

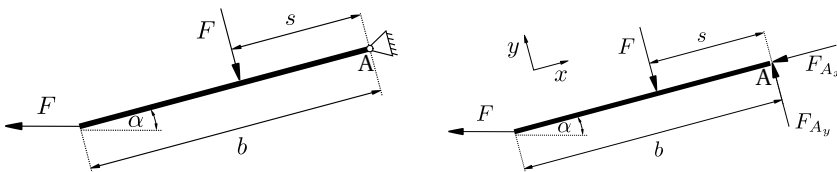


Bild 1.14 Darstellung eines masselosen Hebels mit zugehörigem Freischnitt.

In Abb. 1.14 ist außerdem der zugehörige Freischnitt angegeben. Dieser enthält neben den beiden Lagerkräften F_{Ax} und F_{Ay} auch ein geneigtes Koordinatensystem (vgl. den Text zu Abb. 1.11). Die Lagerkräfte können für ein Kräftegleichgewicht des Systems sorgen, allerdings übt die Kraft F am Ende des Hebels auch ein Moment um den Punkt A aus. Da ein Festlager keine Momente aufnehmen kann, muss die Kraft F im Abstand s die Momentenwirkung kompensieren.

Diese Aufgabe zeigt, dass die Wahl des „richtigen“ Bezugspunktes zum Momentengleichgewichts einige Rechenarbeit sparen kann. Man könnte auf die Idee kommen, das Momentengleichgewicht um das Balkenende auszuwerten:

$$0 \stackrel{!}{=} bF_{Ay} - (b-s)F \Rightarrow s = \frac{F - F_{Ay}}{F} b. \tag{1.40}$$

Auf diese Weise wird es allerdings notwendig, die unbekannte Lagerkraft F_{Ay} zu bestimmen, die gar nicht von Interesse ist. Stattdessen kann der Punkt A für das Momentengleichgewicht verwendet werden:

$$sF - bF \sin \alpha \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow s = b \sin \alpha = \frac{b}{2}. \tag{1.41}$$

Für den gegebenen Winkel muss die Haltekraft demnach genau in der Mitte des Hebels angreifen, um Gleichgewicht zu erzeugen. ■

Beispiel 1.5 Allgemeine Kräftegruppe 3D

Betrachtet wird eine Aussichtsplattform in Abb. 1.15, die an einem Hang befestigt ist und über einen Stab gestützt wird. Am Rand der Plattform stehen dichtgedrängt Touristen auf der Verbindungslinie zwischen den Punkten O und C. Im Punkt E steht ein Fotoautomat, der durch eine vertikal wirkende Kraft F ersetzt wird. Die Plattform selbst wird mit einer starren Platte modelliert und die Touristen mit einer konstanten Streckenlast q_0 .

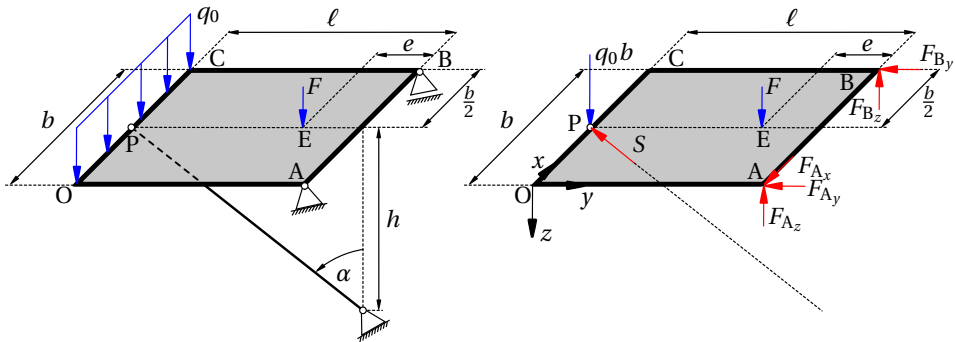


Bild 1.15 Schematische Darstellung der Aussichtsplattform und zugehöriger Freischnitt.

Die Belastungen $F_E = F e_z$ und $F_q = q_0 b e_z$ sind gegeben, wobei die Streckenlast durch ihre Resultierende ersetzt wird. Es gilt nun, die Stabkraft S sowie die beiden Lagerkräfte F_A und F_B zu bestimmen. Für die Kraftvektoren gilt:

$$S = -S \begin{bmatrix} 0 \\ \sin \alpha \\ \cos \alpha \end{bmatrix}_i, \quad F_A = - \begin{bmatrix} F_{Ax} \\ F_{Ay} \\ F_{Az} \end{bmatrix}_i, \quad F_B = - \begin{bmatrix} 0 \\ F_{By} \\ F_{Bz} \end{bmatrix}_i, \tag{1.42}$$

wobei der Winkel aus $\tan \alpha = \ell/h$ resultiert. Die Gleichgewichtsbedingungen können mit dem Freischnitt in Abb. 1.15 bestimmt werden:

$$\begin{aligned} \sum \mathbf{F} \stackrel{!}{=} \mathbf{0}: \quad \quad \quad \mathbf{S} + \mathbf{F}_q + \mathbf{F}_A + \mathbf{F}_E = \mathbf{0}, \\ \sum \mathbf{M}^{(A)} \stackrel{!}{=} \mathbf{0}: \quad \quad \mathbf{x}_{AP} \times (\mathbf{S} + \mathbf{F}_q) + \mathbf{x}_{AE} \times \mathbf{F}_E = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (1.43)$$

Darin sind die Verbindungsvektoren gegeben als:

$$\mathbf{x}_{AP} = - \begin{bmatrix} b/2 \\ \ell \\ 0 \end{bmatrix}_i \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{x}_{AE} = - \begin{bmatrix} b/2 \\ e \\ 0 \end{bmatrix}_i \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{x}_{AB} = b \mathbf{e}_x. \quad (1.44)$$

Aus der Projektion der ersten Gleichung (1.43) in \mathbf{e}_x -Richtung folgt sofort $F_{Ax} = 0$. Die anderen fünf Gleichungen lauten in Komponenten:

$$\begin{aligned} 0 &= F_{Ay} + F_{By} + S \sin \alpha, \\ 0 &= F - F_{Az} - F_{Bz} + q_0 b - S \cos \alpha, \\ 0 &= -F e - q_0 b \ell + S \ell \cos \alpha \\ 0 &= \frac{b}{2} (F + 2F_{Bz} + q_0 b - S \cos \alpha), \\ 0 &= \frac{b}{2} S \sin \alpha - b F_{By}. \end{aligned} \quad (1.45)$$

Als Lösung dieses linearen Gleichungssystems erhält man die Komponenten der gesuchten Lagerkräfte. Für die Kraftvektoren folgt dann:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_A &= -\frac{3h}{2} (F e + q_0 b \ell) \mathbf{e}_y - \frac{3(e-\ell)}{2\ell} F \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{F}_B = \frac{1}{2h} (F e + q_0 b \ell) \mathbf{e}_y + \frac{e-\ell}{2\ell} F \mathbf{e}_z, \\ \mathbf{S} &= -(q_0 b + F \frac{e}{\ell}) (\frac{\ell}{h} \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z). \end{aligned} \quad (1.46)$$

Auch hier ist wieder anzumerken, dass die Stabkraft negativ ist. Somit handelt es sich um einen Druckstab. ■

■ 1.4 Der Schwerpunkt



Propädeutikum: Man studiere aus [MF2019] den Abschnitt 1.4.

1.4.1 Eine Vorbemerkung

Wenn der Begriff „Schwerpunkt“ fällt, hat sicher jeder eine gewisse Vorstellung, was das wohl sein soll. Man denkt an ein Massenzentrum, in dem man sich das Gesamtgewicht eines Körper zusammengefasst vorstellt, also an einen geometrischen Punkt, in dem die Schwerkraft angreift und das Objekt „nach unten“ zieht. Es muss sich um ein komplexes geometrisches Objekt handeln, denn schließlich ist Materie ja ausgedehnt, gegebenenfalls auch inhomogen, d. h. sie ist stückweise dichter oder dünner und die Schwerkraft zieht jedes Massenteilchen

verschieden stark nach unten. Gibt es einen Schwerpunkt auch im Weltall? Da ist schließlich alles schwerelos. Macht es dort Sinn, von Gewicht zu reden, oder ist es vielleicht besser, sich für ein geometrisches Zentrum zu interessieren? Was ist schließlich mit einem nicht konstanten Schwerfeld, sagen wir der Mond Daimos im Schwerfeld des Mars. Wo ist dessen Schwerpunkt? Und für die Technophilen: Die Schwerachse eines Eisenträgers mit Lamellen am Obergurt aus zwei unterschiedlichen Materialien, die man von der Biegung als „neutrale Achse“ kennt. Liegt die im Flächenschwerpunkt? Dieses und vieles mehr versuchen wir, in diesem Abschnitt zu klären.

1.4.2 Der Begriff des dreidimensionalen Schwerpunktes

Wir beginnen damit, eine Bestimmungsgleichung für den **Schwerpunkt** (auch englisch *center of gravity* genannt) eines ausgedehnten, nicht notwendigerweise starren Körpers herzuleiten. Zuerst fragen wir uns, wie groß die Kraft \mathbf{G} sein muss, um den Körper im (konstanten) Schwerfeld \mathbf{g} der Erde zu halten. Nota bene, \mathbf{g} ist die Erdbeschleunigung mit $g \approx 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Wir müssen sie mit der Masse eines Volumenelements dm multiplizieren, um den Kraftbeitrag aufgrund der Erdanziehung zu berechnen. Das Massenelement beziehen wir auf das Volumenelement am Ort \mathbf{x} und erhalten so die ortsabhängige Massendichte:

$$\rho(\mathbf{x}) = \frac{dm}{dV}. \quad (1.47)$$

Danach ist über alle Massenelemente zu summieren, also über den Körper des Volumens V zu integrieren. Kräftegleichgewicht nach [Gleichung \(1.29\)](#) erfordert mithin:

$$\mathbf{G} + \left(\int_V \rho(\mathbf{x}) dV \right) \mathbf{g} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{G} = -m\mathbf{g}, \quad (1.48)$$

wobei die Gesamtmasse $m = \int_V \rho(\mathbf{x}) dV$ des Körpers verwendet wurde. Man beachte, dass \mathbf{g} aufgrund seiner Ortsunabhängigkeit aus dem Gravitationskraftintegral gezogen werden konnte. Dieses Ergebnis ist einleuchtend: Man muss eine dem Produkt aus Gesamtmasse und Erdbeschleunigung betragsmäßig gleiche Kraft applizieren, um Kräftegleichgewicht zu erreichen. $-\mathbf{G}$ nennt man das **Gewicht** des Körpers. Aber an welcher Stelle \mathbf{x}^s muss diese Kraft angreifen? Die Antwort lautet, sie muss so platziert werden, dass Momentengleichgewicht herrscht, also [Gleichung \(1.30\)](#) erfüllt ist. Das bedeutet:

$$\mathbf{x}^s \times m\mathbf{g} + \left(\int_V \rho(\mathbf{x}) \mathbf{x} dV \right) \times \mathbf{g} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}^s = \frac{1}{m} \int_V \rho(\mathbf{x}) \mathbf{x} dV. \quad (1.49)$$

Das beendet die physikalisch auf der Gravitation basierenden Definitionen des Gewichts und der Schwerpunktslage. Einige Kommentare erscheinen angebracht.

- Um eine geschlossene Form der Lösung für die Schwerpunktslage zu erhalten, war entscheidend, dass die Schwerebeschleunigung \mathbf{g} nicht ortsabhängig ist, denn sonst hätte man sie nicht einfach aus dem Integral ziehen können. Ein sehr ausgedehnter, massebehafteter Körper jedoch steht unter dem Einfluss eines positionsabhängigen Feldes $\mathbf{g}(\mathbf{x})$, das sich quadratisch im Abstand verringert, je weiter wir uns von der Erde entfernen.

- Der Schwerpunkt ist nicht notwendigerweise ein materieller Punkt. Man sieht das sofort ein, wenn man an einen Hohlkörper denkt. Hier kann \mathbf{x}^s auch im materiefreien Inneren liegen. Wie man dann die Haltekraft applizieren soll, bleibt dabei unklar.
- Solche defätistischen Bemerkungen geben Anlass zur mathematischen Definition des Schwerpunktes einer Massenverteilung in Anlehnung an die obige Formel, ohne dass man auf die Schwerebeschleunigung Bezug nimmt. Den Schwerpunkt einer Massenverteilung bestimmt man einfach aus der mit dem Ortsvektor gewichteten Summe der Massenanteile:

$$\mathbf{x}^s = \frac{\int_V \rho(\mathbf{x}) \mathbf{x} dV}{\int_V \rho(\mathbf{x}) dV}, \quad \mathbf{x}^s = \frac{\sum_{i=1}^N \rho^i V^i \mathbf{x}^{i,s}}{\sum_{i=1}^N \rho^i V^i}, \quad (1.50)$$

wobei rechts die diskrete Version für N Körper der homogenen Teilvolumina V^i mit den Schwerpunkten $\mathbf{x}^{i,s} = \frac{1}{V^i} \int_{V^i} \mathbf{x} dV$ angegeben wurde. Sie folgt aus der ersten Formel aufgrund der Tatsache, dass Integrale in Teilgebiete aufgespalten werden können. Ihre Auswertung erfolgt vorzugsweise im **Tabellenverfahren**. Im Zusammenhang mit **Gleichung (1.50)** empfiehlt es sich, von den Gleichungen für das **Massenzentrum** zu reden. In ihnen realisiert sich das mathematische Wort „gewichteten“, und das gibt dem Begriff Gewicht, den wir ursprünglich einführt, eine völlig neue Bedeutung.

- Der Vorteil der Definition des Massenzentrums wird sich später erschließen. Gewisse Varianten der Bewegungsgleichungen nehmen eine besonders einfache Form an, wenn man die Gleichungen auf das Massenzentrum spezialisiert.
- Oft ist der Körper homogen, d. h. die Massendichte nicht ortsabhängig. Dann kann man die Dichten kürzen und **Gleichung (1.50)** vereinfacht sich zu:

$$\mathbf{x}^v = \frac{\int_V \mathbf{x} dV}{\int_V dV}, \quad \mathbf{x}^v = \frac{\sum_{i=1}^N V^i \mathbf{x}^{i,v}}{\sum_{i=1}^N V^i}. \quad (1.51)$$

Dies ist dann gleichzeitig das **Volumenzentrum**, also eine rein geometrische Kenngröße. Sie kann selbstverständlich auch für einen inhomogenen Körper berechnet werden, nur dann fällt sie im Allgemeinen **nicht** mit dem Massenzentrum zusammen. Die Berechnung der diversen Summen geschieht am besten ebenfalls im Tabellenverfahren. Bemerkenswert ist, dass man Hohlräume inkludieren kann, und zwar indem man deren Volumina mit negativem Vorzeichen versieht. Das geht übrigens nicht in analoger Weise bei der Berechnung diskreter Massenschwerpunkte, indem man z. B. die Massendichte eines Hohlraumes gleich Null setzt.

1.4.3 Flächen- und Linienzentren

In der Grundlagenvorlesung zur Technischen Mechanik interessiert oft das Deformationsverhalten von geraden Balken unter Last. Auch Drähte und Kabel sind von Interesse. Ersteres ist

in der Cartoonmechanik der Ebene eine zweidimensionale Struktur, bei der sich der Flächenquerschnitt ggf. abschnittsweise mit der Längsachse ändert. Drähte sind hingegen als eindimensionale Gebilde im Raum modellierbar, aber eventuell abschnittsweise aus unterschiedlichem Material gemacht. Wir wollen Folgendes vereinbaren. Für den Balken bezeichnen wir die Längsachse mit x und Positionen innerhalb der Querschnittsfläche A mit y, z . Die Orientierung erfolgt dabei wie gezeichnet über ein kartesisches Einheitsdreibein $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$: Abb. 1.16. Positionen auf dem Draht erfassen wir über die Bogenlänge s , die sich von 0 bis zur Drahtlänge l entwickelt. Im Prinzip kann die Massendichte sich innerhalb des Querschnittes oder entlang des Drahtes ändern: $\bar{\rho}(y, z)$ und $\bar{\rho}(s)$. Der Querstrich über dem Symbol soll andeuten, dass es sich um Massen pro Flächen- bzw. pro Längeneinheit handelt. Beim Träger wurde sozusagen über die Längsachse und beim Draht über die Querschnittsfläche integriert.

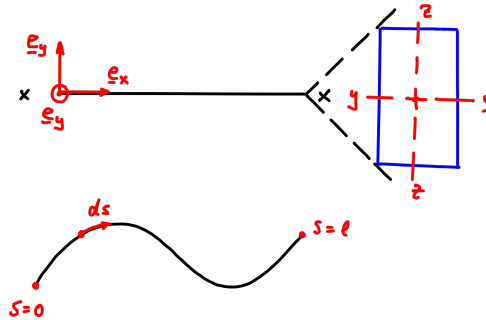


Bild 1.16 Achsenbezeichnungen bei einem Träger mit Rechteckquerschnitt sowie einem 3D-Draht.

Analog zu Gleichung (1.50) kommt man so auf die Gleichungen des **Flächenschwerpunktes**:

$$\begin{bmatrix} y^s \\ z^s \end{bmatrix} = \frac{\int_A \bar{\rho}(y, z) \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} dA}{\int_A \bar{\rho}(y, z) dA}, \quad \begin{bmatrix} y^s \\ z^s \end{bmatrix} = \frac{\sum_{i=1}^N \bar{\rho}^i A^i \begin{bmatrix} y^{i,s} \\ z^{i,s} \end{bmatrix}}{\sum_{i=1}^N \bar{\rho}^i A^i}, \quad \begin{bmatrix} y^{i,s} \\ z^{i,s} \end{bmatrix} = \frac{1}{A^i} \int_A \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} dA, \quad (1.52)$$

mit den Unterflächen A^i konstanter Dichte $\bar{\rho}^i$; sowie die des **Linien Schwerpunktes**:

$$\mathbf{x}^s = \frac{\int_l \bar{\rho}(s) \mathbf{x} ds}{\int_l \bar{\rho}(s) ds}, \quad \mathbf{x}^s = \frac{\sum_{i=1}^N \bar{\rho}^i l^i \mathbf{x}^{i,s}}{\sum_{i=1}^N \bar{\rho}^i l^i}, \quad \mathbf{x}^{i,s} = \frac{1}{l^i} \int_{l^i} \mathbf{x} ds, \quad (1.53)$$

mit den Teillängen l^i konstanter Dichte $\bar{\rho}^i$. Beides sind in der obigen Darstellung **Massenzentren**. Für den Flächenschwerpunkt muss man offensichtlich nur zwei Koordinaten berechnen. Hingegen ist der Linien schwerpunkt im Allgemeinen ein dreidimensionaler Vektor. Falls die Träger und Drähte homogen sind, kürzen sich alle Dichten, und man gelangt zum **Flächenschwerpunkt**:

$$\begin{bmatrix} y^A \\ z^A \end{bmatrix} = \frac{\int_A \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} dA}{\int_A dA}, \quad \begin{bmatrix} y^A \\ z^A \end{bmatrix} = \frac{\sum_{i=1}^N A^i \begin{bmatrix} y^{i,s} \\ z^{i,s} \end{bmatrix}}{\sum_{i=1}^N A^i} = \frac{\sum_{i=1}^N A^i \begin{bmatrix} y^{i,s} \\ z^{i,s} \end{bmatrix}}{\sum_{i=1}^N A^i} \quad (1.54)$$