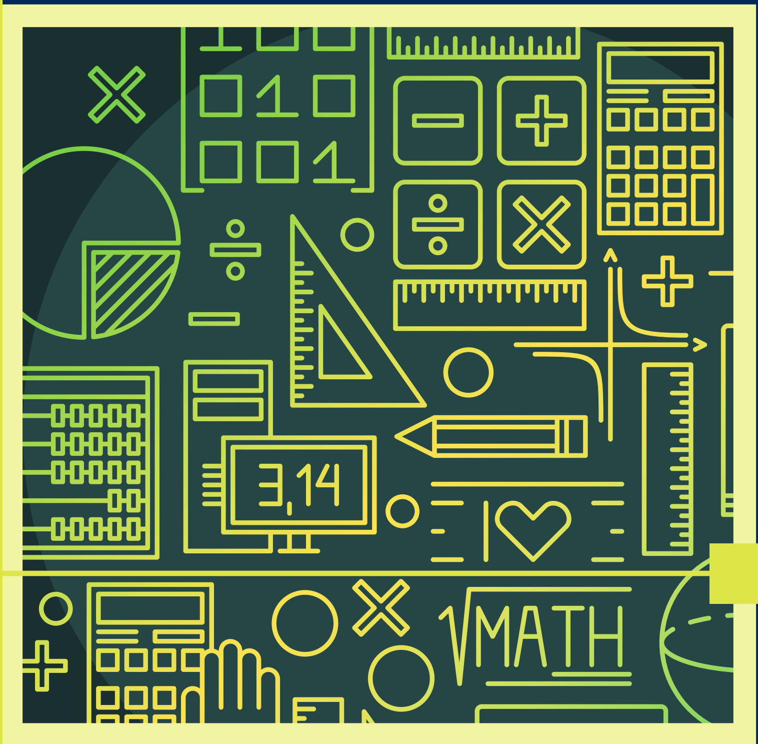
Stephan Emanuel Bucher

PLUS.HANSER-FACHBUCH.DE

Anwendungsorientierte Mathematik für Technikerschulen



2., aktualisierte Auflage

HANSER

Bucher

Anwendungsorientierte Mathematik für Technikerschulen

Stephan Emanuel Bucher

Anwendungsorientierte Mathematik für Technikerschulen

2., aktualisierte Auflage

HANSER

Dieses Buch ist in der Erstauflage unter dem Titel „Anwendungsorientierte Mathematik für Techniker" erschienen.
Aus Gründen der besseren Lesbarkeit wird auf die gleichzeitige Verwendung der Sprachformen männlich, weiblich und divers (m/w/d) verzichtet. Sämtliche Personenbezeichnungen gelten gleichermaßen für alle Geschlechter.

MIX
Papier aus verantwortungsvollen Quellen
FSC® C083411
FSC
www.fsc.org

Print-ISBN: 978-3-446-47869-5
E-Book-ISBN: 978-3-446-47875-6

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek:
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet unter http://dnb.d-nb.de abrufbar.

www.hanser-fachbuch.de
Lektorat: Dipl.-Ing. Natalia Silakova-Herzberg
Herstellung: Der Buchmacher, Arthur Lenner, Windach
Coverkonzept: Marc Müller-Bremer, www.rebranding.de, München
Titelmotiv: © shutterstock/Venomous Vector
Satz: Eberl & Koesel Studio, Kempten
Druck: CPI Books GmbH, Leck
Printed in Germany

Vorwort

Das Buch entstand im Laufe der Unterrichtstätigkeit des Autors an der Inovatech, einer Höheren Fachschule für Technik. Technikerstudenten sind Praktiker mit einer ersten Berufserfahrung. Das Schwergewicht wird deshalb im Unterricht, wo immer möglich, auf die kürzeste Verbindung von der Theorie zur praktischen Anwendung gelegt; auf Beweise, die Diskussion exotischer Spezialfälle und theoretische Spitzfindigkeiten wird weitgehend verzichtet, manchmal vielleicht vom Standpunkt der „reinen Lehre“ aus betrachtet bis hart an die Grenze des Vertretbaren. Auch wird darauf Wert gelegt, den Studierenden jeweils eine Methode zu präsentieren, die immer anwendbar ist – wir sind der Ansicht, dass sich der Technikerstudent nicht mit verschiedenen Methoden für die gleiche Problemlösung belasten sollte.

Mathematik-Lehrbücher für Techniker gibt es im deutschen Sprachraum schon eine ganze Menge. Wir beginnen bei den Grundlagen, haben aber bewusst auch anspruchsvolle Beispiele und Anwendungen eingeschlossen, die nicht zum Standardrepertoire für Techniker gehören. Es geht uns dabei darum, den Studierenden die Breite der Anwendbarkeit der vermittelten Mathematik aufzuzeigen und sie darauf hinzuweisen, dass alles überall noch weitergeht.

Damit, und indem wir entsprechende Stichworte und Anknüpfungspunkte geben, möchten wir interessierte Leser dazu ermutigen, selbständig ihre Kenntnisse zu erweitern und zu vertiefen. Sehr viel Information kann im Internet (speziell auf Youtube) gefunden werden, und es gibt ausgezeichnete weiterführende Werke im Buchhandel (siehe Literaturverzeichnis).

Die vorliegende 2. Auflage wurde in zahlreichen Einzelheiten erweitert und angepasst. Bei Herleitungen und Berechnungen haben wir darauf geachtet, alle wichtigen Schritte und Konzepte aufzuzeigen. Wir hoffen deshalb, dass das Buch auch beim Selbststudium von Nutzen sei. Fundierte Kritik und Verbesserungsvorschläge nehmen wir gerne entgegen.

Der Mathematik-Unterricht an den Technikerschulen umfasste bisher 4 Semester, und dafür ist das Buch ausgelegt. Im neuen Rahmenlehrplan ist vorgesehen, dass die praktischen Anwendungen der Mathematik im Rahmen der einzelnen technischen Fächer (Elektrotechnik, Maschinenelemente, Antriebstechnik, usw.) unterrichtet werden, und er enthält einen nicht unwesentlichen Anteil an selbstständigem „angeleiteten“ Studium. Das Buch kann daran angepasst werden, denn die praktischen Anwendungen sind als solche ersichtlich; sie können im Unterricht übersprungen werden und der Studierende hat die Möglichkeit, sie für sich „angeleitet“ durchzuarbeiten.

Als gute Ergänzung zum Selbststudium empfehlen wir die Webseite von Barbara Flütsch (*https://www.sos-mathe.ch/*) mit zahlreichen (gelösten) Aufgaben unterschiedlicher Schwierigkeit aus allen für uns relevanten Gebieten.

An Taschenrechner werden keine besonderen Anforderungen gestellt; fast alle der im Kurs zu lösenden Probleme sind mit einem TI-30 eco RS zu bewältigen, der einfach und intuitiv zu bedienen ist. Besser geeignet für Techniker ist der etwas anspruchsvollere TI-30X Pro, der quadratische und kubische Gleichungen sowie Gleichungssysteme mit zwei und drei Unbekannten löst, Integrale numerisch auswertet und, neben statistischen Berechnungen und Regressionen, sogar einen beschränkt brauchbaren numerischen Gleichungslöser enthält. Mit programmierbaren Rechnern sind viele unserer Studierenden überfordert – im Unterricht kann dazu keine Unterstützung geleistet werden – und die kompliziertere Bedienung wirkt sich als Nachteil aus.

Immer häufiger wird im Alltag für Berechnungen direkt der PC eingesetzt, was die Dokumentation und Wiederverwendung umfangreicher Berechnungsvorgänge ermöglicht. Wir bevorzugen dafür Mathcad, für tabellenorientierte Anwendungen Excel, und stellen dazu auch Beispiele zur Verfügung.

Ich danke dem Hanser Verlag und seinen Mitarbeitern, insbesondere der Lektorin Frau Natalia Silakova und Ihrer Kollegin Christina Kubiak für ihre sehr engagierte, umsichtige und professionelle Unterstützung und Beharrlichkeit während der nicht immer einfachen Vorbereitungszeit.

Zum Schluss möchte ich mich bei der Schulleitung der Inovatech dafür bedanken, dass sie Vorschlägen gegenüber stets aufgeschlossen ist und eine Atmosphäre des Vertrauens schafft, in der der Dozent bei der Vermittlung der Lehrinhalte Freiheit genießt und nicht über Gebühr administrativ belastet wird.

Rickenbach im Frühjahr 2024 *Stephan Bucher*

Inhalt

1 Grundlagen

1.1 Die Zahlen

Wir unterscheiden folgende Zahlenmengen:

$\mathbb{N}$ **Natürliche Zahlen**, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$

Die natürlichen Zahlen sind bezüglich Addition und Multiplikation *abgeschlossen*, d. h., Addition oder Multiplikation natürlicher Zahlen liefert wieder eine natürliche Zahl.

$\mathbb{Z}$ **Ganze Zahlen:** natürliche und negative Zahlen und die Null, also

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

Die ganzen Zahlen sind bezüglich Addition, Subtraktion und Multiplikation abgeschlossen.

$\mathbb{Q}$ **Rationale Zahlen:** alle Zahlen, die bei der Division von zwei ganzen Zahlen entstehen, wobei nicht durch Null dividiert werden darf:

$$\mathbb{Q} = \{a = p/q \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$$

Jede rationale Zahl kann auch dargestellt werden als p/q, wobei $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$.

In Dezimalschreibweise (mit Dezimalkomma) sind rationale Zahlen *periodisch*, d. h., das gleiche Zahlenmuster wiederholt sich immer wieder. Die Länge der Periode ist höchstens $q - 1$. (Überlege, was bei der schriftlichen Division abläuft!)

Die rationalen Zahlen sind bezüglich Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division (nicht durch Null) abgeschlossen.

$\mathbb{R}$ **Reelle Zahlen:** Es gibt Zahlen, deren Darstellung in Dezimalschreibweise nicht abbricht und die nicht periodisch sind. Beispiele sind die Quadratwurzeln der meisten Zahlen oder die Zahl π, das Verhältnis zwischen Umfang und Durchmesser beim Kreis. Die reellen Zahlen umfassen neben den rationalen Zahlen auch diese *irrationalen Zahlen*.

$\mathbb{C}$ **Komplexe Zahlen:** Es gibt höhere Rechenoperationen, die aus den reellen Zahlen hinausführen, beispielsweise gibt es keine reelle Zahl, die die Quadratwurzel einer negativen reellen Zahl ist. Die komplexen Zahlen stellen eine Erweiterung der reellen Zahlen dar, die *bezüglich aller mathematischen Operationen abgeschlossen* ist. Die komplexen Zahlen vereinfachen die Lösung bestimmter Probleme, und sie werden beispielsweise in der Elektrotechnik bei der Beschreibung des Wechselstroms (siehe *6.7*) und ganz allgemein bei der Behandlung von Schwingungsvorgängen verwendet.

Es gelten folgende Mengenbeziehungen: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

Wir brauchen für alle unsere Berechnungen nur eine kleine Teilmenge der rationalen Zahlen, nämlich diejenigen, die mit 10 (oder was immer der Rechner schafft) dezimalen Stellen dargestellt werden können. Alle reellen Zahlen können beliebig genau durch rationale Zahlen angenähert werden, sodass diese Einschränkung für unseren Alltag keine *praktische* Bedeutung hat.

1.2 Arithmetische Grundoperationen

Als arithmetische Grundoperationen kennen wir *Addition*, *Subtraktion*, *Multiplikation* und *Division*. Die Subtraktion kann man als Addition einer negativen Zahl auffassen, die Division mit einer Zahl a als Multiplikation mit dem Kehrwert $1/a$, sodass Addition und Subtraktion bzw. Multiplikation und Division aufeinander zurückgeführt werden können.

Beispiele:

1.1 $2 - 3 = 2 + (-3) = -1$

1.2 $9 \div 3 = 9 \cdot (⅓) = 3$

Wie bereits erwähnt, sind die rationalen Zahlen bezüglich dieser Operationen abgeschlossen, das Ergebnis der Addition oder Multiplikation rationaler Zahlen ist also immer auch wieder eine rationale Zahl.

Bezeichnungen:

Addition	Summand + Summand = Summe
Subtraktion	Minuend – Subtrahend = Differenz
Multiplikation	Faktor · Faktor = Produkt
Division	Dividend ÷ Divisor = Quotient

1.3 Rechenregeln

1.3.1 Reihenfolge der Operanden

Bei Addition und Multiplikation (und wie wir in *1.2* gesehen haben, kann man eine Subtraktion als Addition einer negativen Zahl schreiben und eine Division als Multiplikation mit dem Kehrwert) darf man die Reihenfolge der Summanden bzw. Faktoren vertauschen, ohne dass sich dadurch am Resultat etwas ändert. Das ist das *Kommutativgesetz*.

Beispiele:

1.3 $2 + 3 = 3 + 2 = 5$

1.4 $4 \cdot 7 = 7 \cdot 4 = 28$

1.3.2 Vorzeichen

Multiplikation einer beliebigen Zahl a mit einer negativen Zahl b kehrt das Vorzeichen von a um, d. h. für positives a wird das Produkt $a \cdot b$ negativ, für negatives a positiv.

Mehrfache Multiplikationen können eine nach der anderen von links nach rechts durchgeführt werden (*1.3.3*), wobei jedesmal die Vorzeichenregel anzuwenden ist.

Beachte: Der Rechner verwendet zur Eingabe negativer Zahlen ein anderes Minuszeichen als bei der Subtraktion! Dieses findet sich unten rechts im Zahlenblock.

Beispiele:

1.5 $2 \cdot (-3) = -6$

1.6 $(-4) \cdot 7 = -28$

1.7 $(-4) \cdot (-5) = +20 = 20$

1.8 $(-2) \cdot (-4) \cdot (-5) = -40$

1.9 $(-2) \cdot (-2) \cdot (-4) \cdot (-5) = +80 = 80$

1.3.3 Reihenfolge der Operationen

Normalerweise führt man gleichberechtigte Operationen *von links nach rechts* durch, darf aber auch anders (*Assoziativgesetz*), außerdem gilt die *Punkt-vor-Strich-Regel*:

> Operationen „mit Punkten“, also Multiplikation und Division, werden zuerst ausgeführt, nachher werden die Zwischenresultate der Multiplikationen und Divisionen addiert bzw. subtrahiert.

Wo Operationen in anderer Reihenfolge auszuführen sind, setzt man **Klammern**. Mehrfache Klammern werden **schrittweise von innen nach außen** ausgewertet.

Die meisten Taschenrechner kennen diese Regel, sehr billige und kaufmännisch orientierte Rechner sind aber manchmal programmiert, jede Operation nach der Eingabe sofort auszuführen.

Beispiele:

1.10 $4 \cdot 7 - 2 \cdot 3 = 28 - 6 = 22$

1.11 $4 \cdot (7 - 2) \cdot 3 = 4 \cdot 5 \cdot 3 = 60$

1.12 $3 + 4 \cdot (18 - 2 \cdot (5 - 1) + 7) = 3 + 4 \cdot (18 - 2 \cdot 4 + 7) = 3 + 4 \cdot 17 = 3 + 68 = 71$

1.13 $7 - 6 \div 3 + 1 = 7 - 2 + 1 = 6$

Wir können anstelle von Zahlen auch mit Buchstaben (als Platzhalter) rechnen.

Beispiel:

1.14 $3 \cdot a - a + 5 \cdot (2 \cdot a + 4 \cdot a - 3 \cdot a) - 8 \cdot a \div 4 = 3 \cdot a - a + 5 \cdot 3 \cdot a - 2 \cdot a$

$$= 3 \cdot a - a + 15 \cdot a - 2 \cdot a$$
$$= 15 \cdot a$$

Das heißt, dass man links für a eine beliebige Zahl einsetzen kann und das Ergebnis immer gleich dem Fünfzehnfachen dieser Zahl ist.

1.3.4 Addition und Subtraktion von Klammerausdrücken

Regeln:

- Wird eine Klammer *als Ganzes* addiert, ist sie überflüssig und kann weggelassen werden.
- Wird eine Klammer *als Ganzes* subtrahiert, so kann sie weggelassen werden, wenn die Vorzeichen aller *Summanden* (bzw. *Subtrahenden*) im Innern der Klammer umgekehrt werden.

Mit „als Ganzes" meinen wir, dass die Klammer nicht noch mit einem Faktor multipliziert sein darf, also beispielsweise

$2 - (3 + 5) = 2 - 3 - 5 = -6$ ist richtig,

$2 - (3 + 5) \cdot 4 = 2 - 3 - 5 \cdot 4$ ist falsch! Hier muss zuerst die Klammer mit 4 multipliziert werden gemäß der Punkt-vor-Strich-Hierarchie.

Beispiele:

1.15 $1 + (3 - 5 \cdot 6) = 1 + 3 - 5 \cdot 6 = 1 + 3 - 30 = -26$

1.16 $2 + 7 \cdot 8 - (2 \cdot 3 + 4 - 9) = 2 + 56 - 2 \cdot 3 - 4 + 9 = 2 + 56 - 6 - 4 + 9 = 57$

1.17 $7 - (5 \cdot 6 + (-2) \cdot 4 - 17) = 7 - 5 \cdot 6 - (-2) \cdot 4 + 17$

$$= 7 - 30 \quad -(-8) \quad + 17$$
$$= 7 - 30 \quad + 8 \quad + 17$$
$$= 2$$

1.3.5 Multiplikation von Klammerausdrücken

Beim Multiplizieren von Klammerausdrücken wird jeder Summand in jedem Klammerausdruck mit jedem Summanden aller anderen Klammerausdrücke multipliziert und diese Glieder addiert (*Distributivgesetz*). Das tönt etwas kompliziert, deshalb ein Beispiel:

Beispiel:

1.18 $(3 + 4 - 5) \cdot (7 - 2) = 3 \cdot 7 + 3 \cdot (-2) + 4 \cdot 7 + 4 \cdot (-2) - 5 \cdot 7 - 5 \cdot (-2)$

$$= 21 \quad - 6 \quad + 28 \quad - 8 \quad - 35 \quad + 10 = 10$$

$3 + 4 - 5 = 2, \quad 7 - 2 = 5, \quad 2 \cdot 5 = 10,$

es stimmt also!

Man kann derartige Operationen in einfachen Fällen auch geometrisch darstellen, siehe *1.5.2*.

1.4 Bruchrechnen

1.4.1 Begriffe

Die Bruchschreibweise ist eine Schreibweise für eine Division, die man noch nicht ausgeführt hat. Der Bruch besteht aus dem *Zähler,* der angibt, wie viele Teile der Bruch zählt, und dem *Nenner,* der angibt, um was für (Bruch-)Teile es sich handelt.

Nachdem die Division ausgeführt wurde, gibt man das Ergebnis als eine Zahl mit Kommastellen an und nennt das einen *Dezimalbruch*.

Beispiel:

1.19 ¼ ist ein Bruch, 0,25 der zugehörige Dezimalbruch.

Man sieht sofort, dass sich der Wert eines Bruches nicht ändert, wenn man Zähler und Nenner mit der gleichen Zahl multipliziert; beispielsweise sind 1/4 und 5/20 gleichwertig, denn sie haben den gleichen Dezimalbruch.

Brüche mit gleichem Nenner nennt man *gleichnamig*, das Multiplizieren von Zähler und Nenner mit der gleichen Zahl *erweitern*. Das Umgekehrte, die Division von Zähler und Nenner durch die gleiche Zahl, heißt *kürzen* (*1.4.3*).

Beim „klassischen" TI-30 werden Brüche wie folgt eingegeben: Zähler [**a**^{b}/$_c$] Nenner (Zähler höchstens 6 Stellen, Nenner höchstens 3 Stellen). Beim TI-30 wechselt [**F↔D**] zwischen Bruch- und Dezimalbruchdarstellung hin und her, beim TX-30XPro [◂▸≈].

1.4.2 Addition von Brüchen; das kleinste gemeinsame Vielfache

Am einfachsten ist es natürlich, wenn man, um zwei Brüche zu addieren, ihre Dezimalbrüche addiert: ½ + ¼ = 0,5 + 0,25 = 0,75. Auf einem Rechner mit Punkt-vor-Strich-Logik kann man einfach alles von links nach rechts eintippen, und das ist immer ein einfaches Mittel zur Kontrolle, ob man richtig gerechnet hat. Aber wir wollen es uns nicht so einfach machen, denn mit etwas Technik im Bruchrechnen kann man sehr häufig Probleme vereinfachen und übersichtlich machen und Zusammenhänge erkennen, die sonst verborgen bleiben.

Addieren kann man gleichartige Dinge, 3 Studenten + 2 Studenten = 5 Studenten. Beim Bruch gibt der Nenner an, auf was für Teile sich der Zähler bezieht. Wir können deshalb Brüche mit gleichem Nenner addieren, indem wir einfach die Zähler addieren, also etwa 1/4 + 3/4 = 4/4. Damit ist die Vorgehensweise skizziert: Wenn wir eine Methode finden, um die Nenner von zwei Brüchen gleich zu machen, können wir die Brüche addieren, indem wir die Zähler addieren.

Den Nenner dürfen wir immer als *natürliche Zahl* ansehen und ein eventuelles negatives Vorzeichen dem Zähler zuschieben.

Wie wir in *1.4.1* festgestellt haben, ändert sich der Wert eines Bruches nicht, wenn Zähler und Nenner mit der gleichen Zahl multipliziert werden. Wir müssen also für jeden Bruch eine solche Zahl so finden, dass alle Nenner am Schluss denselben Wert haben. Wir suchen ein *gemeinsames Vielfaches* der Nenner.

Ein gemeinsames Vielfaches ist immer das Produkt aller voneinander verschiedenen Nenner. Aber damit erhalten wir oft eine große und unhandliche Zahl!

Mit etwas Erfahrung, und wenn man in der Schule einmal die „Reihen“ gut auswendig gelernt hat, entwickelt man schnell ein gewisses „Gefühl“ für Zahlen, sodass man ein geeignetes Vielfaches erkennen kann, ohne viel zu rechnen: *Man sucht eine Zahl – je kleiner, desto besser – die durch alle Nenner teilbar ist.* Optimal ist es, das *kleinste gemeinsame Vielfache* (k. g. V.) zu finden. Wir wollen eine Methode zu seiner Bestimmung nachstehend kurz skizzieren.

Heute können viele Taschenrechner das k. g. V. bestimmen, leider immer nur von 2 Zahlen. Die Funktion heißt bei Texas Instruments **lcm**, *least common multiple*. Aber diese Rechner können auch bruchrechnen, sodass man das k. g. V. – wenigstens aus diesem Grund – gar nicht mehr zu kennen braucht …

Um das k. g. V. für mehrere Zahlen *gleichzeitig* zu bestimmen, müssen wir etwas weiter ausholen.

Primzahlen sind Zahlen, die nur durch 1 und sich selber teilbar sind, also die Zahlen, deren Folge beginnt mit 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, etc. Primzahlen sind sehr interessante und rätselhafte Objekte in der Zahlentheorie. Für uns genügt es im Moment, zu wissen, dass jede Zahl, die nicht selber Primzahl ist, in sogenannte *Primfaktoren* zerlegt werden kann, zum Beispiel $204 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 17$, in Potenzschreibweise (davon mehr in *1.5.1*) lautet das $204 = 2^2 \cdot 3 \cdot 17$. Um die Primfaktoren einer Zahl zu finden, dividiert man sie solange durch 2, bis es „nicht mehr geht“, fährt dann bei 3 fort, dann bei 5 und allen anderen Primzahlen (wenn man die nicht kennt, dividiert man einfach durch alle ungeraden Zahlen). Ein Faktor einer Zahl kann nicht größer sein als ihre Quadratwurzel; beim Erreichen der Quadratwurzel der letzten Zahl kann man deshalb aufhören, der ganze Rest ist dann der letzte Primfaktor.

TI-30X Pro: **math 4: ▸Pfactor**

Das k. g. V. ist ein Vielfaches jeder der Zahlen. Die Primfaktoren des k. g. V. sind also diejenigen Primfaktoren, mit denen man *jede* der Zahlen bilden kann. Jeder Faktor, der *irgendwo* vorkommt, muss darin vorkommen, und zwar mit der höchsten vorkommenden Potenz.

Beispiel:

1.20 Bestimme das k. g. V. der Zahlen 312, 676, 144

Primfaktorzerlegung: $312 = 2^3 \cdot 3 \cdot 13$

$676 = 2^2 \cdot 13^2$

$144 = 2^4 \cdot 3^2$

k. g. V. $= 2^4 \cdot 3^2 \cdot 13^2 = 24336$

Wenn ein geeignetes gemeinsames Vielfaches der Nenner bekannt ist, wird jeder Bruch so erweitert, dass sein Nenner dieser Zahl entspricht, und dann werden die Zähler addiert.

Häufig kann das Ergebnis gekürzt werden (siehe *1.4.3*).

1.4.3 Kürzen

Häufig kann das Ergebnis einer Rechnung mit Brüchen gekürzt werden. Dazu erstellt man die Primfaktorzerlegung von Zähler und Nenner und streicht gemeinsame Faktoren (wenn man nicht schon „von Auge“ sieht, wie gekürzt werden kann).

Hier helfen die *Teilbarkeitsregeln*:

- Eine Zahl ist durch 2 teilbar, wenn ihr Zehnerrest es ist (wenn sie gerade ist).
- Eine Zahl ist durch 3 teilbar, wenn ihre Quersumme (das ist die Summe ihrer Ziffern) durch 3 teilbar ist: (T = Tausender, H = Hunderter, Z = Zehner, E = Einer)

$$\begin{aligned} \mathrm{THZE} &= 1000 \cdot T + 100 \cdot H + 10 \cdot Z + E = 999 \cdot T + 99 \cdot H + 9 \cdot Z + (T + H + Z + E) \\ &= \text{Summe von durch 3 (sogar durch 9) teilbaren Zahlen + Quersumme} \end{aligned}$$

- Eine Zahl ist durch 4 teilbar, wenn ihr Hunderterrest es ist.
- Eine Zahl ist durch 5 teilbar, wenn ihr Einer 0 oder 5 ist.
- Eine Zahl ist durch 6 teilbar, wenn sie gerade und ihre Quersumme durch 3 teilbar ist.
- Eine Zahl ist durch 7 teilbar, wenn die Zahl, die man erhält, wenn man das Doppelte der letzten Ziffer (Einer) vom Rest der Zahl subtrahiert, durch 7 teilbar ist: $385 \rightarrow 38 - 2 \cdot 5 = 28$.
- Eine Zahl ist durch 8 teilbar, wenn ihr Tausenderrest es ist.
- Eine Zahl ist durch 9 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 9 teilbar ist.

Der TI-30 kürzt einen eingegebenen Bruch, wenn man [=] bzw. [enter] drückt.

Es ist oft hilfreich, wenn man zum Kürzen gemeinsame Faktoren aus Summen und Differenzen *ausklammert*:

Beispiel:

1.21 $$\frac{ax+ay}{a+n}+\frac{nx+ny}{a+n}=\frac{ax+ay+nx+ny}{a+n}=\frac{a(x+y)+n(x+y)}{a+n}=\frac{(a+n)(x+y)}{a+n}=x+y$$

1.4.4 Multiplikation von Brüchen

Wird ein Bruch mit einer ganzen Zahl multipliziert, also zum Beispiel 2 · ¼, erhalten wir 2/4, es wird also der Zähler mit der ganzen Zahl multipliziert. Bilden wir die Hälfte der Hälfte, also ½ · ½, sieht man leicht, dass das ¼ ist – die Nenner haben sich multipliziert.

Überraschenderweise ist also das Multiplizieren von Brüchen einfacher als das Addieren: *Wir multiplizieren Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner.*

Häufig kann das Ergebnis gekürzt werden (siehe *1.4.3*).

1.4.5 Division von Brüchen

Beim Dividieren berechnen wir, wie viel mal der Divisor im Dividenden enthalten ist. 2 ist 3x in 6 enthalten, denn $6 \div 2 = 3$.

Wie oft ist ½ in 1 enthalten? Natürlich 2x, also $1 \div \frac{1}{2} = 2$. Wie oft ist ¼ in 1 enthalten? 4x, also $1 \div \frac{1}{4} = 4$. Und wie oft ist ¼ in ½ enthalten? Auch wieder 2x, also $\frac{1}{2} \div \frac{1}{4} = 2$. Wir sehen, wie das Dividieren funktioniert: **Division ist dasselbe wie Multiplikation mit dem Kehrwert des Divisors**.

So werden sogenannte *Doppelbrüche* in einfache Brüche umgewandelt.

1.4.6 Umwandlung von Dezimalbrüchen in Brüche

Bei Division des Zählers durch den Nenner erhalten wir den Dezimalbruch einer Zahl. Dezimalbrüche können natürlich auch wieder in Brüche zurückverwandelt werden.

Am einfachsten ist das bei abbrechenden Dezimalbrüchen; aus 0,125 erhalten wir sofort 125/1000 und daraus durch Kürzen 1/8.

Wie wir eingangs *(1.1)* erwähnten, sind die Dezimalbruchdarstellungen rationaler Zahlen periodisch mit einer Periodenlänge von höchstens dem um 1 verminderten Nenner. Der Trick, mit der nicht abbrechenden Periode fertig zu werden, ist ein Trick, den man in der Mathematik auch bei anderen Problemen gern anwendet. Wir werden bei der Summation geometrischer Reihen in *7.3.2* wieder dasselbe tun: man subtrahiert das, was einen stört, von sich selber und schafft es damit weg.

Wir multiplizieren also unseren Dezimalbruch zuerst so mit einer geeigneten Zahl, dass die Periode gleich nach dem Komma beginnt. Dann multiplizieren wir diese Zahl nochmals so, dass eine ganze Periode vor das Komma zu stehen kommt, und subtrahieren davon die erste Zahl – und weg ist die Periode!

Beispiel:

1.22 Verwandle $p = 0{,}97123123123\ldots$ in einen Bruch!

$$\begin{aligned} 100000 \cdot p &= 97123{,}123123123\ldots \\ -100 \cdot p &= -97{,}123123123\ldots \\ 99900 \cdot p &= 97026 \end{aligned}$$

Jetzt haben wir den Bruch und müssen nur noch kürzen: $p = \dfrac{97026}{99900} = \dfrac{16171}{16650}$

Beim TI-30 wechselt **F↔D** zwischen Bruch- und Dezimalbruchdarstellung, beim TI-30xPro [◂▸≈].

1.5 Potenzen und Wurzeln

1.5.1 Potenzen

Wenn derselbe Faktor a mehrmals (n-mal) mit sich selber multipliziert wird, schreiben wir dafür zur Abkürzung, wie schon in *1.4.2* erwähnt,

$$a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a = a^n,$$

wobei a eine beliebige reelle Zahl und n eine beliebige natürliche Zahl sein können.

Bezeichnungen: a ist die **Basis**, n der **Exponent**, a^n die **Potenz**.

Für Potenzen gelten folgende **Rechenregeln**, die man sofort einsehen kann, wenn man die Potenzen als mehrfache Multiplikationen ausschreibt:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \tag{1.1}$$

$$a^n \div a^m = a^{n-m} \tag{1.2}$$

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m} \tag{1.3}$$

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n \tag{1.4}$$

Die Rechenoperationen werden also um eine Stufe vereinfacht:

- Aus einer Multiplikation wird eine Addition der Exponenten,
- aus einer Potenz wird eine Multiplikation der Exponenten.

Wenn wir eine Potenz mehrmals durch ihre Basis dividieren, erhalten wir eine Folge wie

$$a^n \xrightarrow{\div a} a^{n-1} \xrightarrow{\div a} \ldots \xrightarrow{\div a} a^2 \xrightarrow{\div a} a \xrightarrow{\div a} 1 \xrightarrow{\div a} \frac{1}{a} \xrightarrow{\div a} \frac{1}{a^2},$$

die eine sinnvolle Erweiterung des Potenzbegriffes für Exponenten < 1 nahelegt. Der Exponent nimmt dabei jedesmal um 1 ab. Man sieht, dass für beliebige Zahlen a offenbar gelten soll

$$a^1 = a$$

$a^0 = 1$ (es ist sogar $0^0 = 1$ – siehe Fußnote[1])

und $\quad a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}.$

Wie wir gleich sehen werden, liefert die Anwendung der Rechenregeln für Potenzen auch bei Exponenten ≤ 0 sinnvolle Ergebnisse.

[1] $a^0 = 1$ gilt für beliebig kleine a. Und auch wenn man im Ausdruck x^x den Wert von x immer kleiner macht (gegen null gehen lässt), geht der Wert des Ausdruckes immer näher zu 1.

1.5.2 Quadratische binomische Ausdrücke

Ein *binomischer Ausdruck* oder einfach *Binom* ist ein Ausdruck mit zwei Gliedern, also ein Ausdruck der Form

$$a + b,$$

wo a und b als sogenannte *Monome* bezeichnet werden.

Speziell wichtig sind die Ausdrücke

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \tag{1.5}$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \tag{1.6}$$

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2 \tag{1.7}$$

Diese Identitäten soll man sich einprägen, denn sie werden immer wieder gebraucht, beispielsweise wenn ein quadratischer Ausdruck in Faktoren zerlegt wird. Quadratische Binome können auch graphisch dargestellt werden *(Bild 1.1)*.

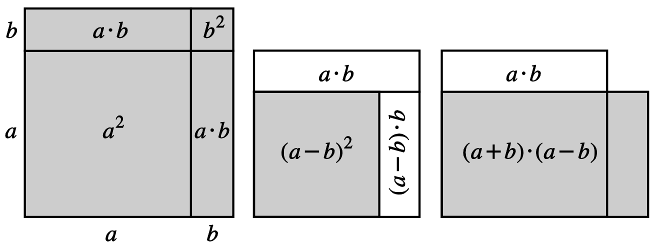


Bild 1.1 Graphische Darstellung von $(a + b)^2$, $(a - b)^2$, $(a + b) \cdot (a - b)$

1.5.3 Höhere Potenzen binomischer Ausdrücke

Wir wollen jetzt systematisch die Potenzen binomischer Ausdrücke untersuchen und bilden nach den Regeln von *1.3.5* die Produkte (Schreibweise: alle oberen Vorzeichen gehören jeweils zusammen sowie alle unteren):

$$(a \pm b)^1 = a \pm b$$

$$(a \pm b)^2 = (a \pm b) \cdot (a \pm b) = a^2 \pm a \cdot b \pm b \cdot a + b^2 = a^2 \pm 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

$$(a \pm b)^3 = (a^2 \pm 2 \cdot a \cdot b + b^2) \cdot (a \pm b) = a^3 \pm 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 \pm b^3$$

$$(a \pm b)^4 = (a^3 \pm 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 \pm b^3) \cdot (a \pm b) = a^4 \pm 4 \cdot a^3 \cdot b + 6 \cdot a^2 \cdot b^2 \pm 4 \cdot a \cdot b^3 + b^4$$

Daraus lassen sich folgende Gesetzmäßigkeiten für $(a + b)^n$ ableiten:

- Die Summe der Exponenten von a und b ist bei jedem Glied gleich n, dem Exponenten des Binoms.
- Das erste Glied ist $a^n = a^n b^0$, dann nimmt der Exponent von a immer um 1 ab, während der Exponent von b um 1 zunimmt.
- Die Koeffizienten der Potenzen beginnen immer mit 1, dann kommt n, und am Ende wieder n und 1. Alle Zeilen sind symmetrisch.

- Die Summe der Koeffizienten der Potenzausdrücke ist gleich 2^n (setze a und b beide = 1).
- Falls b negativ ist, also $b < 0$, hat jedes Glied mit einer ungeraden Potenz von b ein negatives Vorzeichen.

Die Koeffizienten bilden das sogenannte *Pascal'sche Dreieck*[2]:

0									1								
1								1		1							
2							1		2		1						
3						1		3		3		1					
4					1		4		6		4		1				
5				1		5		10		10		5		1			
6			1		6		15		20		15		6		1		
7		1		7		21		35		35		21		7		1	
8	1		8		28		56		70		56		28		8		1

etc.

Jeder Koeffizient ist gleich der Summe der beiden oberhalb von ihm stehenden Koeffizienten.

Damit können wir, ohne viel zu rechnen, sofort angeben, dass

$$(a - b)^7 = a^7 - 7a^6b + 21a^5b^2 - 35a^4b^3 + 35a^3b^4 - 21a^2b^5 + 7ab^6 - b^7$$

oder

$$49^3 = (50 - 1)^3 = 50^3 - 3 \cdot 50^2 + 3 \cdot 50 - 1 = 125\,000 - 7500 + 150 - 1 = 117649.$$

Diese Koeffizienten heißen *Binomialkoeffizienten*. Man kann sie auch direkt berechnen, beispielsweise gilt für die letzte im Dreieck angegebene Zeile (die erste Zahl ist bekanntlich immer = 1)

$$8 = \frac{8}{1}$$

$$28 = \frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2}$$

$$56 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$70 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$

$$56 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$$

$$28 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}$$

$$8 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}$$

$$1 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}$$

[2] benannt nach Blaise Pascal, französischer Mathematiker, 1623–1662

Der TI–30 berechnet Binomialkoeffizienten durch n [**nCr**] k **=**, wo n die Zeile und k die Position von links (beide bei 0 beginnend) im Dreieck sind, also im obigen Beispiel 8 [**nCr**] 3 **=** 56, 8 [**nCr**] 4 **=** 70, 8 [**nCr**] 5 **=** 56, 8 [**nCr**] 6 **=** 28, etc.

Beispiel:

1.23 Wie viele $a^{14}b^7$ gibt es in $(a - b)^{21}$?

Antwort: – 116 280, berechnet als 21 [**nCr**] 14 **=**.

1.5.4 Wurzeln

In *1.5.1* haben wir gesehen, dass $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$. Setzen wir $n = ½$ und $m = 2$, so erhalten wir formal

$$(a^{½})^2 = a^{½} \cdot a^{½} = a^{½+½} = a^{½ \cdot 2} = a^1 = a$$

Eine Zahl, die mit sich selber multipliziert die Zahl a ergibt, nennen wir eine *Quadratwurzel* der Zahl a.

Es liegt deshalb nahe, zu definieren (mit $n \neq 0$)

$$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$$

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

Das ist eine *Erweiterung des Potenzbegriffs*. Bei ganzzahligen Exponenten kann eine Potenz immer auch als Multiplikation geschrieben werden – das geht jetzt nicht mehr!

Mit dieser Schreibweise kann man mit Wurzeln mit den Rechenregeln des Potenzrechnens *1.5.1* rechnen und erhält vernünftige Resultate.

Mit dieser Erweiterung können wir (wenigstens theoretisch) Potenzen mit beliebigen rationalen Exponenten berechnen. Das heißt nichts anderes, als dass wir Potenzen mit beliebigen Exponenten berechnen können!

Beim Rechnen mit Wurzeln ist es häufig sinnvoll, diese als Potenzen zu schreiben, da die Rechnerei mit den Exponenten normalerweise einfacher und weniger fehleranfällig ist.

Beispiel:

1.24 $$3^{-1} \cdot \left(\sqrt[14]{\frac{1}{3^{-2}}}\right)^7 = 3^{-1} \cdot \left(\left(\frac{1}{3^{-2}}\right)^{\frac{1}{14}}\right)^7 = 3^{-1} \cdot \left(\frac{1}{3^{-2}}\right)^{\frac{1}{14} \cdot 7} = 3^{-1} \cdot 3^{2 \cdot \frac{1}{14} \cdot 7} = 3^{-1} \cdot 3^1 = 3^0 = 1$$

Noch eine Bemerkung zu den Vorzeichen: Ungeradzahlige Wurzeln sind die einzigen Potenzen negativer Zahlen mit gebrochenen Exponenten, die in $\mathbb{R}$ existieren!

1.6 Logarithmen

1.6.1 Begriff

In *1.5.4* haben wir gesehen, dass man Potenzen mit beliebigen (rationalen) Exponenten bilden kann. **Umgekehrt kann man auch jede positive Zahl als Potenz einer beliebigen positiven Basis ≠1 darstellen.** Das ist die Grundlage der *Logarithmen*.

Bezeichnungen:

$$y = a^z \quad \leftrightarrow z = \log_a(y)$$

Man nennt z den *Logarithmus*, a die *Basis* und y den *Numerus*.

In der Technik ist diese Basis in den meisten Fällen die Zahl 10. Der Zehnerlogarithmus ist die Zahl, die man bei 10 in den Exponenten schreiben muss, um den gewünschten Wert zu erhalten. Der Logarithmus von 100 zur Basis 10 ist 2, denn $10^2 = 100$. Der Logarithmus von 1000 ist 3, der Logarithmus von 0,1 ist −1, etc.

Schreibweise: $\log_{10}(100) = 2$.

Beim Logarithmieren bestimmt man bei gegebener Basis den Exponenten einer Potenz.

1.6.2 Rechenregeln

Entsprechend *1.5.1* gelten für Logarithmen folgende Rechengesetze (die Basis 10 wurde hier nur als Beispiel gewählt):

$$u \cdot v = 10^{\log(u)} \cdot 10^{\log(v)} = 10^{\log(u)+\log(v)} \Rightarrow \log(u \cdot v) = \log(u) + \log(v) \tag{1.8}$$

$$\Rightarrow \log(u/v) = \log(u) - \log(v) \tag{1.9}$$

$$\log(a^b) = \log(a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots) \qquad \Rightarrow \log(a^b) = b \cdot \log(a) \tag{1.10}$$

1.6.3 Wechsel der Basis

Gebräuchliche Logarithmensysteme sind:

- **lg(x) = $\log_{10}$(x):** dekadische Logarithmen (Basis 10), häufig auch einfach **log(x)**
- **ln(x) = $\log_e$(x):** natürliche Logarithmen (Basis e = 2,7182818 …, mehr in *4.8*)
- **lb(x) = $\log_2$(x):** duale („binäre“) Logarithmen (Basis 2)

Der TI–30 kennt Zehnerlogarithmen **LOG** und natürliche Logarithmen **LN**.

Wenn wir die Logarithmen in *einer* Basis kennen, können wir sie sofort in eine beliebige andere positive Basis umrechnen.

Beispiel:

1.25 Gesucht sei der Logarithmus von 17 zur Basis 3, $z = \log_3(17)$, wenn die Logarithmen zur Basis 10 bekannt sind. Nun ist

$$
\begin{aligned}
3^z &= 17 \\
\left(10^{\lg(3)}\right)^z &= 17 \\
\lg\left(\left(10^{\lg(3)}\right)^z\right) &= z \cdot \lg(3) \cdot \underbrace{\lg(10)}_{1} = \lg(17) \\
z = \log_3(17) &= \frac{\lg(17)}{\lg(3)} = 2.578901923
\end{aligned}
$$

Entsprechend bestehen folgende **Umrechnungen:**

$$
\begin{aligned}
\lg(x) &= \frac{\ln(x)}{\ln(10)} = \frac{\ln(x)}{2.303} = 0.43429 \cdot \ln(x) \\
\ln(x) &= \frac{\lg(x)}{\lg(\mathrm{e})} = \frac{\lg(x)}{0.43429} = 2.303 \cdot \lg(x)
\end{aligned}
$$

Beim Wechsel der Basis werden also alle Logarithmen einfach **mit einer konstanten Zahl multipliziert**.

Eine weitere nützliche Beziehung ist

$$
\left.
\begin{aligned}
b &= a^{\log_a(b)} \\
a = b^{\log_b(a)} &\Rightarrow a^{\frac{1}{\log_b(a)}} = b
\end{aligned}
\right\} \Rightarrow \log_a(b) = \frac{1}{\log_b(a)} \Rightarrow \log_a(b) \cdot \log_b(a) = 1
$$

1.6.4 Die Bedeutung der Logarithmen

Man kann *jede beliebige* positive Zahl als Potenz einer gegebenen positiven Zahl, z. B. 10, darstellen. Es ist

$10^{-1} = 0{,}1$

$10^0 = 1$

$10^1 = 10$

$10^2 = 100$

$10^3 = 1000$

und so weiter. Für die Zahlen zwischen 1 und 10 liegt der Exponent, d. h. der Logarithmus zur Basis 10, dann zwischen 0 und 1, für Zahlen zwischen 10 und 100 zwischen 1 und 2, etc. Bei einer Zahl, die 10x größer ist als eine andere, ist der Logarithmus einfach um 1 größer. Man muss also die Logarithmen *nur für einen 10er-Bereich kennen*, beispielsweise für die Zahlen zwischen 1 und 10, und kann dazu ganzzahlige Zusätze addieren.

Daher kommt die sehr große Bedeutung, die früher (bevor es Rechenmaschinen gab) die Logarithmen hatten. Mithilfe von *Logarithmentafeln* (für den Bereich von 1 bis 10) wurden aus Multiplikationen Additionen, aus Wurzeln Divisionen und aus Potenzen Multiplikationen, sodass auch komplexe Berechnungen von Hand durchführbar wurden.

Folgend zwei kleine Beispiele, wie man „früher" mit Logarithmentafeln rechnen musste.

Beispiele:

1.26 Wie viel ist $2^{3,7}$?

$$\lg(2) = 0{,}3010$$

$$3{,}7 \cdot 0{,}3010 = 1{,}1138$$

In der Logarithmentafel finden wir nur Logarithmen für Zahlen zwischen 1 und 10, das sind Logarithmen zwischen 0 und 1. Wir müssen also die Nachkommastellen unseres Resultats nachschlagen und erhalten für Logarithmus 0,1138 die Zahl 1,2996. Das Resultat für einen Logarithmus von 1,1138 ist zehnmal so viel, also 12,996.

1.27 Bestimme $\sqrt[5]{17}$.

Weil die Logarithmentafel nur den Bereich zwischen 1 und 10 abdeckt, müssen wir unsere Zahl durch Multiplikation/Division mit einer Potenz von 10 in diesen Bereich umskalieren:

$$\begin{aligned}\lg(17) &= \lg(10 \cdot 1{,}7)\\ &= \lg(10) + \lg(1{,}7)\\ &= 1 + 0{,}23045\\ &= 1{,}23045\end{aligned}$$

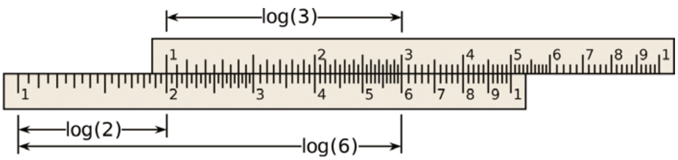
$$\lg(\sqrt[5]{17}) = \frac{\lg(17)}{5} = \frac{1{,}23045}{5} = 0{,}24609$$

Zum Logarithmus 0,24609 gehört die Zahl 1,76234, die unser Resultat ist.

Der bis zum Aufkommen elektronischer Rechner nach 1970 weit verbreitete Rechenschieber enthält zwei gegeneinander verschiebbare logarithmische Skalen. Dadurch kann ein Logarithmus zu einem anderen addiert und das Resultat einer Multiplikation (bzw. Division) direkt abgelesen werden.

Beispiel:

1.28 Rechenschieberanwendung: Multiplikation $2 \cdot 3 = 6$, $\log(2) + \log(3) = \log(6)$



Als Hilfsmittel zum numerischen Rechnen haben die Logarithmen die überragende Bedeutung, die sie während Jahrhunderten und bis etwa 1970 hatten, vollständig verloren.

Sie sind aber nach wie vor bedeutsam, weil zahlreiche wichtige Größen, die sehr große Bereiche abdecken, logarithmisch sinnvoll dargestellt werden können (wir kennen die Richterskala für die in Erdbeben freigesetzte Energie, und viele Sinneswahrnehmungen sind auf einer logarithmischen Skala empfindlich, beispielsweise das Gehör: die Dezibelskala ist eine logarithmische Skala). Außerdem sind Zusammenhänge zwischen Größen oft in logarithmischer Darstellung einfacher; wir verweisen auch auf das Lösen von Exponentialgleichungen in *2.8.1* und die Bemerkungen am Ende von *5.7.2*. Das wird (hoffentlich) alles später noch klarer werden.

Mithilfe der Logarithmen können wir Größen berechnen, die der Taschenrechner nicht darstellen kann, weil sie zu groß (oder zu klein) sind:

Beispiel:

1.29 Wie viel ist 36^{81}?

$\lg(36^{81}) = 81 \cdot \lg(36) = 126{,}0605026$

$36^{81} = 10^{0{,}0605026} \cdot 10^{126} = 1{,}149483024 \cdot 10^{126}$

1.7 Zahlensysteme

1.7.1 Unser Dezimalsystem

Unser Zahlensystem ist auf Potenzen der Zahl 10 aufgebaut. Wir wissen, dass jede Ziffer einer Zahl einen *Zifferwert* und einen *Stellenwert* hat. Der Zifferwert liegt zwischen 0 und 9, beim Stellenwert kennen wir die Einer, Zehner, Hunderter etc.

Dieses System ermöglicht es uns, mit wenigen Ziffern alle für uns wichtigen Zahlen aufzuschreiben und mit ihnen zu rechnen. Man versuche das einmal mit römischen Zahlen!

Entscheidend war das Konzept der Zahl „Null".

Grundsätzlich kann man aus den Potenzen jeder Basis ein Zahlensystem aufbauen und mit denselben Rechenregeln damit rechnen. Neben dem Zehner- oder Dezimalsystem sind auch andere Zahlensysteme wichtig. Wir verwenden für oktal (Basis 8) die Ziffern 0 bis 7 und die Stellenwerte Einer, Achter, Vierundsechziger etc. Bei hexadezimal (Basis 16) verwendet man zusätzlich die Ziffern A = 10, B = 11, C = 12, D = 13, E = 14 und F = 15. Das ist die Bedeutung der Zweitbelegung der Tasten 1 bis 6 mit den Buchstaben A – F beim TI-30X Pro!

Beispiel:

1.30	327 dezimal	= 507 oktal	= 147 hexadezimal
	$= 3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0$	$= 5 \cdot 8^2 + 0 \cdot 8^1 + 7 \cdot 8^0$	$= 1 \cdot 16^2 + 4 \cdot 16^1 + 7 \cdot 16^0$
	$= 3 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 7 \cdot 1$	$= 5 \cdot 64 + 0 \cdot 8 + 7 \cdot 1$	$= 1 \cdot 256 + 4 \cdot 16 + 7 \cdot 1$

Elektronische Rechner arbeiten bekanntlich mit zwei unterscheidbaren Zuständen elektronischer Bausteine und rechnen deshalb im Zweier- oder Binärsystem mit den Ziffern 0 und 1. Weil das für uns unhandlich lange Zahlen gibt, fassen wir 4 solcher „bits“ zu einer hexadezimalen Ziffer zusammen. Eine zweistellige hexadezimale Zahl stellt ein Byte (8 bit) dar.

1.7.2 TI-30X Pro

Der TI-30X Pro zeigt in der Grundeinstellung in der Anzeige alle Ein- und Ausgaben in dezimaler Darstellung an. Diese Einstellung kann unter **[mode]** (nach unten scrollen) geändert werden:[3] in anderen Zahlensystemen werden nur ganzzahlige Eingaben akzeptiert und alle Eingaben werden im eingestellten System interpretiert. Binäre Zahlen werden durch ein nachgestelltes kleines „b“, hexadezimale Zahlen mit „h“ und oktale Zahlen mit „o“ gekennzeichnet. Für hexadezimale Eingaben werden die Buchstaben A – F für die Ziffern 10 – 15 über die Zweitbelegung der Tasten 1 bis 6 aufgerufen.

Binär, oktal und hexadezimal kennt der TI-30X Pro nur ganze Zahlen. Resultate von Divisionen werden ganzzahlig abgerundet (Ganzzahldivision).

Beispiel:

1.31 Einstellung **[mode] HEX**:

102C · 66 = 67188h

67188/7 = EBA5h (abgerundet)

EBA5 · 7 = 67187h (ergibt nicht mehr dasselbe wegen Rundung)

Auch in dezimaler Grundeinstellung kann der Rechner mit den Funktionen unter **[base n]** Eingaben in anderen Zahlensystemen verarbeiten und Resultate umrechnen:

Zur Eingabe einer nicht-dezimalen (ganzen) Zahl wird die Zahl eingegeben und dann ihr Typ über **[base n] TYPE**. Jetzt kann mit dieser Zahl wie mit einer Dezimalzahl gerechnet werden. Alle Resultate werden im Dezimalsystem ausgegeben.

Beispiele:

1.32 638 · 11 = 7018

27Eh · 11 = 7018 (vgl. *Beispiel 1.31*)

1.33 45Bh/7 = 159.2857143

1.34 $\sqrt{256} = 16$

$\sqrt{100h} = 16$

Resultate können über **[base n] CONVR** umgerechnet werden. Dabei wird wieder ganzzahlig abgerundet!

[3] In der obersten Zeile der Anzeige erscheint ein winziges „H“, „B“ oder „O“.

Beispiele:

1.35 225D8h **[enter]** 140760 (Umwandlung nach dezimal)

1.36 10.7 **[base n] CONVR ▶ Hex** Ah (auf 10 abgerundet)

Menü **[base n]** enthält eine dritte Position **LOGIC**. Damit können die bitweisen logischen Verknüpfungen (AND, OR, XOR, XNOR, NOT, etc.) zwischen zwei Zahlen (in binärer Darstellung) vorgenommen werden, mit denen man zu tun hat, wenn man auf Maschinenebene programmiert. Das Resultat einer solchen Operation ist eine Zahl, deren bits entsprechend dem Vergleich der einzelnen bits der beiden Eingaben gesetzt sind. Wir befassen uns damit nicht weiter.

1.7.3 Darstellung von Zahlen in Computern

Die Prozessoren digitaler Computer (CPU) arbeiten mit „Wörtern", wobei ein Wort eine Anzahl von Bytes zu je 8 bit ist. Die modernen PC arbeiten mit einer Wortlänge von 64 bit. Die CPU hat eine Anzahl von Registern, die je ein Wort fassen können. Mit diesen Registern wird gearbeitet, d. h. die CPU führt in einem vorgegebenen Takt an den Registerinhalten Operationen aus ihrem Befehlssatz durch.

Viele PC-Programme sind auch heute noch 32bit-Programme, die die Kapazität eines 64bit-Prozessors nicht ausnutzen (diese hat vor allem beim Rechnen mit 64bit-Zahlen Vorteile).

Für ganze Zahlen wird normalerweise die sogenannte *Zweierkomplementdarstellung* verwendet. Das höchste Bit ist das Vorzeichen (1 entspricht –, 0 entspricht +). Mit 32 bit können ganze Zahlen im Bereich von -2^{31} bis $2^{31}-1$ oder – 2.147.483.648 bis + 2.147.483.647 dargestellt werden. Bei 16 bit liegt der mögliche Wertebereich zwischen – 32.768 und + 32.767:

bit																
16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	Wert
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**–32.768**
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	**–32.767**
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	**–32.766**
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	**–2**
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	**–1**
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**0**
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	**1**
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	**2**
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	**3**
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	**32.766**
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	**32.767**