

Werner Helm
Andreas Pfeifer
Joachim Ohser



Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

Ein Lehr- und Übungsbuch für Bachelors



3., aktualisierte Auflage

HANSER



Ihr Plus – digitale Zusatzinhalte!

Auf unserem Download-Portal finden Sie zu diesem Titel kostenloses Zusatzmaterial. Geben Sie dazu einfach diesen Code ein:

plus-9xb72-tka14

plus.hanser-fachbuch.de



Bleiben Sie auf dem Laufenden!

Hanser Newsletter informieren Sie regelmäßig über neue Bücher und Termine aus den verschiedenen Bereichen der Technik. Profitieren Sie auch von Gewinnspielen und exklusiven Leseproben. Gleich anmelden unter

www.hanser-fachbuch.de/newsletter

Werner Helm
Andreas Pfeifer
Joachim Ohser

Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

Ein Lehr- und Übungsbuch für Bachelors

3., aktualisierte Auflage

HANSER

Autoren:

Prof. Dr. Werner Helm
Hochschule Darmstadt
FB Mathematik und Naturwissenschaften
Werner.Helm@h-da.de

Prof. Dr. Andreas Pfeifer
Hochschule Darmstadt
FB Mathematik und Naturwissenschaften
Andreas.Pfeifer@h-da.de

Prof. Dr. Joachim Ohser
Hochschule Darmstadt
FB Mathematik und Naturwissenschaften
Joachim.Ohser@h-da.de



Alle in diesem Buch enthaltenen Informationen wurden nach bestem Wissen zusammengestellt und mit Sorgfalt geprüft und getestet. Dennoch sind Fehler nicht ganz auszuschließen. Aus diesem Grund sind die im vorliegenden Buch enthaltenen Informationen mit keiner Verpflichtung oder Garantie irgendeiner Art verbunden. Autor(en, Herausgeber) und Verlag übernehmen infolgedessen keine Verantwortung und werden keine daraus folgende oder sonstige Haftung übernehmen, die auf irgendeine Weise aus der Benutzung dieser Informationen – oder Teilen davon – entsteht.

Ebenso wenig übernehmen Autor(en, Herausgeber) und Verlag die Gewähr dafür, dass die beschriebenen Verfahren usw. frei von Schutzrechten Dritter sind. Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek:

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt.

Alle Rechte, auch die der Übersetzung, des Nachdruckes und der Vervielfältigung des Buches, oder Teilen daraus, vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf ohne schriftliche Genehmigung des Verlages in irgendeiner Form (Fotokopie, Mikrofilm oder ein anderes Verfahren) – auch nicht für Zwecke der Unterrichtsgestaltung – reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden.

© 2021 Carl Hanser Verlag München, www.hanser-fachbuch.de

Lektorat: Frank Katzenmayer

Herstellung: Anne Kurth

Covergestaltung: Max Kostopoulos

Coverkonzept: Marc Müller-Bremer, www.rebranding.de, München

Titelbild: © shutterstock.com/AB Visual Arts

Satz: Die Autoren mit Unterstützung von Dr. Steffen Naake, Brand-Erbisdorf

Druck und Bindung: CPI books GmbH, Leck

Printed in Germany

Print-ISBN 978-3-446-46913-6

E-Book-ISBN 978-3-446-46937-2

Vorwort zur 3. Auflage

Für die vorliegende dritte Auflage wurde der gesamte Text kritisch durchgesehen und aktualisiert (wie beispielsweise der Einkommensteuertarif). Fehler wurden korrigiert, Ungenauigkeiten klargestellt und viele Anregungen von Studierenden eingearbeitet.

Auf plus.hanser-fachbuch.de finden Sie umfangreiches Zusatzmaterial, beispielsweise ein Zusatzkapitel über Differenzialgleichungen. Auch sind dort die Lösungen zu allen Aufgaben vorhanden. Ebenso zahlreiche Excel-Dateien zur Finanzmathematik, mit denen die Lösungen der Aufgaben einfach und leicht ermittelt werden können.

Der vorliegende Band richtet sich speziell an Studierende der Wirtschaftswissenschaften im weitesten Sinne, an Berufsakademien, Hochschulen oder Universitäten und ist geeignet als vorlesungsbegleitendes Lehr- und Übungsbuch, kann aber auch wegen der Vielzahl von Beispielen und Aufgaben zum Selbststudium verwendet werden.

Die Autoren sind sich dessen bewusst, dass Studierende der Volks- und Betriebswirtschaft, der Wirtschaftsinformatik oder des Wirtschaftsingenieurwesens sowie verwandter Disziplinen eine fachgerichtete Aufbereitung der Mathematik – auch der Grundlagen der Mathematik – erwarten. Daher sind grundlegende Begriffe der Mathematik wie z. B. der der Funktion von einer oder mehreren Variablen oder der Begriff des Differenzials aus Sicht des Wirtschaftswissenschaftlers dargestellt und mit fachspezifischen Beispielen versehen. Ausführlich dargestellt ist das Thema betriebswirtschaftliche Kostenfunktionen. Insofern ist dieser Band in sich abgeschlossen und kann auch als umfassendes Mathematik-Lehrbuch für Studierende der Wirtschaftswissenschaften dienen. Die Autoren lassen ihre jahrelange vielfältige Lehr- erfahrung in dieses Buch einfließen. Vom Schwierigkeitsgrad zielt das Buch auf die Mitte: Da, wo in den Vorlesungen eine abstraktere Sicht auf die Mathematik betont wird, kann das Buch bei der unverzichtbaren praktischen Umsetzung helfen (Learning by Doing). An anderen Hochschulen mit einem geringen Stundenumfang in Mathematik kann das Buch als Universalreferenz dienen, deckt es doch einen sehr breiten Bereich an Inhalten ab, die auch für Lehrveranstaltungen relevant sind, die nicht die Bezeichnung Mathematik im Titel tragen, wie Kostenrechnung, Finanzierung oder Operations Research.

Das Vorgängerwerk *Lehr- und Übungsbuch MATHEMATIK in Wirtschaft und Finanzwesen* wurde gründlich überarbeitet, aktualisiert und an die Rahmenbedingungen der heutigen Bachelor-Studiengänge angepasst. Es bietet die **grundlegende Wirtschaftsmathematik komplett in einem Band**, geht an einigen Stellen leicht darüber hinaus und bildet Brücken aus zur praktischen Verwendung mathematischer Methoden auch in höheren Semestern. Ob Kostenfunktionen, Kundenwanderung, Lineare oder Nichtlineare Optimierung, Projektplanung oder Netzplantechnik – mit und ohne Computer – das Buch ist aus der Sicht der Nutzer und Anwender entwickelt, ohne dabei die mathematische Substanz zu opfern. Die kompakte und trotzdem vollständige Darstellung der klassischen Finanzmathematik vom Autor des in der sechsten Auflage erschienenen Buches *Finanzmathematik – Lehrbuch für Studium und Praxis* enthält zahlreiche Anwendungsbeispiele.

In den ersten fünf Kapiteln werden die Grundlagen der Mathematik für Volks- und Betriebswirte dargestellt und anhand von ökonomischen Problemen in einem praxisorientierten Zusammenhang erläutert. Dazu zählen Funktionen, Differenzial- und Integralrechnung und Lineare Algebra – Theorie eng verknüpft mit ökonomischen Anwendungen. Kapitel 6 enthält die Lineare Optimierung mit dem Simplex-Algorithmus. Kapitel 7 umfasst die gesamte klassische Finanzmathematik von der Zinsrechnung bis zu den Abschreibungsarten auf aktuellem Stand und führt heran an die Begriffe *Rendite*, *Risiko*, *Call* und *Put*. In Kapitel 8 werden in knapper Form weitere praktische Probleme und deren Lösungsmethoden dargestellt. Stichworte sind: Nichtlineare Programmierung, Optimierung eines Portfolios, Netzplantechnik (CPM, PERT) mit GANTT-Charts.

In allen Kapiteln enthalten sind viele praktische und zeitgemäße durchgerechnete Beispiele, die das Erlernen und Behalten der Begriffe wesentlich fördern. In vielen Fällen werden bei der Berechnung und Darstellung der Lösungen professionelle Softwaresysteme wie z. B. das System SAS verwendet. SAS gilt als die weltweit beste Analytics-Software, renommierte wie aufstrebende Fachbereiche *leisten* sich SAS. Damit wird eine Einführung in die Handhabung dieser auch in Wirtschaft und Industrie vielfach verwendeten Software gegeben. Das Buch enthält Hinweise auf Excel-Programme zur Finanzmathematik. Die zahlreichen Aufgaben, deren Lösungen am Ende des Buches zu finden sind, sollen dem Festigen der erworbenen Kenntnisse und natürlich auch der Prüfungsvorbereitung dienen.

Autoren und Verlag hoffen, auch mit diesem Buch den Studierenden ein wertvolles Studienmaterial bereitzustellen. Hinweise, Erfahrungen und Anregungen seitens der Studierenden und der Lehrenden nehmen die Autoren und der Verlag gern entgegen.

Wir bedanken uns bei allen, die Anregungen und Korrekturvorschläge zu den Voraufagen gegeben haben. Auch über Hinweise und Bemerkungen zur neuen, dritten Auflage freuen wir uns.

Dezember 2020

Die Autoren

Inhaltsverzeichnis

1	Funktionen einer reellen Variablen in ökonomischen Problemen	13
1.1	Mathematische Grundbegriffe	13
1.1.1	Funktionsbegriff	13
1.1.2	Ein Funktionenreservoir	17
1.1.3	Eigenschaften von Funktionen	21
1.1.4	Umkehrfunktion	24
1.2	Funktionen für ökonomische Zusammenhänge	29
1.3	Funktionen und ökonomisches Wachstum	30
	Aufgaben 1.1 bis 1.18	33
2	Differenzialrechnung für Funktionen einer reellen Variablen in ökonomischen Problemen	36
2.1	Einführung	36
2.2	Mathematische Grundlagen	37
2.2.1	Grenzwert	37
	Aufgaben 2.1 bis 2.6	43
2.2.2	Stetigkeit	44
2.2.3	Ableitung	47
	Aufgaben 2.7 bis 2.15	55
2.2.4	Differenzial	56
	Aufgabe 2.16	60
2.2.5	Untersuchung von Funktionen mithilfe ihrer Ableitungen	60
	Aufgaben 2.17 und 2.18	66
2.2.6	Nichtlineare Gleichungen in ökonomischen Problemen und deren Lösung	66
	Aufgaben 2.19 und 2.20	70
2.3	Ökonomische Probleme und Ableitungen von Funktionen	71
	Aufgaben 2.21 bis 2.29	78
2.4	Reagibilität und Ableitungen	79
	Aufgaben 2.30 bis 2.41	96
2.5	Extremwertaufgaben der Ökonomie	98
2.5.1	Extrema für Kostenfunktionen	98
	Aufgaben 2.42 bis 2.48	109
2.5.2	Gewinnmaximum	110
	Aufgaben 2.49 bis 2.57	140
2.6	Die Regel von de L'HOSPITAL	142
	Aufgabe 2.58	145
2.7	Reihen und Potenzreihen	145
2.7.1	Reihen	145
2.7.2	Potenzreihen	150

2.8	Entwicklung einer Funktion in eine Potenzreihe	153
2.8.1	MACLAURINSche Reihen	153
2.8.2	Allgemeine TAYLOR-Reihen	157
	Aufgaben 2.59 bis 2.61	158
2.9	Komplexe Zahlen	159
2.9.1	Definition und Darstellung komplexer Zahlen	159
2.9.2	Das Rechnen mit komplexen Zahlen	163
3	Funktionen mit mehreren Veränderlichen	169
3.1	Definition und Darstellungsform von Funktionen mit mehreren Veränderlichen	169
3.2	Partielle Differenziation	172
	Aufgaben 3.1 bis 3.3	175
3.3	Partielle Ableitungen höherer Ordnung	175
	Aufgabe 3.4	177
3.4	Tangentialebene und das totale Differenzial	178
3.4.1	Geometrische Betrachtungen	178
	Aufgabe 3.5	179
3.4.2	Das totale Differenzial	179
3.5	Spezielle Ableitungstechniken	181
3.5.1	Differenziation nach einem Parameter	181
3.5.2	Implizite Differenziation	182
3.6	Anwendungen	182
3.6.1	Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme	183
3.6.2	Lokale Extrema und Sattelpunkte	185
3.6.3	Fehlerrechnung	190
3.6.4	Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen	191
	Aufgaben 3.6 bis 3.8	194
4	Integralrechnung	195
4.1	Integration als Umkehrung der Differenziation – das unbestimmte Integral	195
	Aufgaben 4.1 bis 4.3	202
	Aufgabe 4.4	203
4.2	Das bestimmte Integral – Hauptsatz der Integralrechnung	204
	Aufgaben 4.5 und 4.6	209
4.3	Uneigentliche Integrale	209
4.4	Geometrische Anwendungen	211
4.4.1	Flächenberechnung	211
4.4.2	Länge einer Kurve	213
4.4.3	Volumen und Oberfläche von Rotationskörpern	214
4.5	Anwendung der Integralrechnung in ökonomischen Zusammenhängen	216
4.6	Numerische Integration	219
	Aufgabe 4.7	221
4.7	Doppelintegrale	221
4.7.1	Doppelintegrale in kartesischen Koordinaten	221

4.7.2	Doppelintegrale in Polarkoordinaten	224
	Aufgabe 4.8.	227
5	Lineare Algebra in Betriebs- und Volkswirtschaft	228
5.1	Einführende Beispiele ökonomischen Inhalts	228
	Aufgaben 5.1 und 5.2	231
5.2	Mathematische Grundlagen der Matrizen- und Vektorrechnung	231
5.2.1	Matrizen und Vektoren sowie ihre Spezifizierungen	232
	Aufgaben 5.3 und 5.4	236
5.2.2	Rechnen mit Matrizen und Vektoren	236
	Aufgaben 5.5 bis 5.8	245
5.2.3	Inverse Matrix	245
	Aufgaben 5.9 bis 5.12	251
5.2.4	GAUSSScher Algorithmus	252
	Aufgaben 5.13 und 5.14.	257
5.2.5	Lineare Unabhängigkeit von Vektoren	258
	Aufgaben 5.15 bis 5.17	262
5.3	Matrizen und Vektoren in Betriebs- und Volkswirtschaft	263
	Aufgaben 5.18 bis 5.22	272
5.4	Mathematische Grundlagen linearer algebraischer Gleichungssysteme	275
5.4.1	Einführung	275
5.4.2	Lösung linearer algebraischer Gleichungssysteme: Begriff und Methode	277
	Aufgaben 5.23 bis 5.25	280
5.4.3	GAUSSScher Algorithmus zur Lösung linearer algebraischer Gleichungssysteme	281
	Aufgaben 5.26 bis 5.30	291
5.4.4	Basislösungen	292
	Aufgaben 5.31 bis 5.36	298
5.4.5	Zusammenfassende Aussagen über lineare algebraische Gleichungssysteme	299
	Aufgaben 5.37 bis 5.40	301
5.5	Lineare algebraische Gleichungssysteme in Betriebs- und Volkswirtschaft	302
	Aufgaben 5.41 und 5.42.	310
5.6	Determinante einer Matrix	311
	Aufgaben 5.43 und 5.44.	314
5.7	Das Eigenwertproblem für quadratische Matrizen	315
	Aufgabe 5.45.	319
6	Lineare Optimierung in Volkswirtschaft und Betriebswirtschaft	320
6.1	Problemstellungen und Grundbegriffe	320
6.1.1	Aufgabenstellung und Beispiele	320
6.1.2	Das Rechnen mit Ungleichungen	323
6.1.3	Die grafische Lösung	326
6.1.4	Allgemeine mathematische Formulierung des linearen Optimierungsproblems	331
6.2	Der Simplex-Algorithmus	333
6.2.1	Die Grundideen des Simplex-Verfahrens	333
6.2.2	Der Austauschschritt im Simplex-Tableau	334

6.2.3	Die Simplex-Regeln	338
6.2.4	Der Simplex-Algorithmus (Phase II)	340
6.2.5	Theoretische Ergänzungen und Sonderfälle	341
6.3	Der Simplex-Algorithmus für allgemeine lineare Programme	343
6.3.1	Minimumprobleme, Gleichungsrestriktionen, Varianten der Vorzeichenbeschränkungen, obere und untere Schranken	343
6.3.2	Simplex-Algorithmus: Phase I und Phase II	346
6.4	Dualität	348
6.4.1	Primal-Dual-Beziehung und Dualitätssätze	348
6.4.2	Primal-Dual-Beziehung und Komplementarität	351
6.4.3	Dualer Simplex-Algorithmus (Phase III)	353
6.4.4	Ökonomische Interpretationen der Größen in den Simplex-Tableaus	356
6.5	Weiterführende Aspekte	357
6.5.1	Modellbildung	357
6.5.2	Spezialfälle linearer Optimierung	359
6.5.3	Sensitivitätsanalyse bei der linearen Optimierung	362
6.5.4	Parametrische (lineare) Optimierung	363
6.5.5	Effizienz und Vergleich von LP-Solvern	363
6.5.6	Ganzzahlige lineare Optimierung	363
6.5.7	Nichtlineare Optimierung	364
	Aufgaben 6.1 bis 6.11	364
7	Finanzmathematik	368
7.1	Zinsrechnung	369
7.1.1	Einfache Zinsen und Zinseszinsen	369
7.1.2	Vorschüssige Verzinsung	375
7.1.3	Gemischte Verzinsung	377
7.1.4	Unterjährige Verzinsung	378
7.1.5	Stetige Verzinsung	380
	Aufgaben 7.1 bis 7.11	381
7.2	Barwert, Äquivalenz und Rendite	382
7.2.1	Barwert und Äquivalenz	382
7.2.2	Kapitalwertmethode	384
7.2.3	Rendite	386
7.2.4	Mittlerer Zahlungstermin und Duration	390
	Aufgaben 7.12 bis 7.20	391
7.3	Rentenrechnung	392
7.3.1	Nachschüssige und vorschüssige Renten	392
7.3.2	Aufgeschobene, abgebrochene und ewige Rente	398
7.3.3	Jährliche Verzinsung – unterjährige Rentenzahlung	400
7.3.4	Unterjährige Verzinsung	405
	Aufgaben 7.21 bis 7.31	406
7.4	Kreditrechnung	408
7.4.1	Grundbegriffe	408
7.4.2	Ratentilgung	410

7.4.3	Annuitätentilgung	410
7.4.4	Unterjährige Verzinsung, Tilgung und Rückzahlung	414
7.4.5	Ratenkredit	421
	Aufgaben 7.32 bis 7.41	422
7.5	Kurs- und Renditerechnung	424
7.5.1	Grundlagen	424
7.5.2	Zinsschuld	425
7.5.3	Annuitätenschuld	429
	Aufgaben 7.42 bis 7.48	433
7.6	Abschreibung	434
7.6.1	Grundlagen	434
7.6.2	Lineare Abschreibung	435
7.6.3	Geometrisch-degressive Abschreibung	436
7.6.4	Weitere Abschreibungsarten	437
7.6.5	Vergleich linearer und geometrisch-degressiver Abschreibung	439
	Aufgaben 7.49 bis 7.55	441
7.7	Weitergehende Betrachtungen	442
7.7.1	Rendite und Risiko	442
7.7.2	„Neuere“ Finanzprodukte	444
	Aufgaben 7.56 bis 7.58	445
8	Weitere praktische Probleme und deren Lösung	446
8.1	Nichtlineare Optimierung	446
8.1.1	Problemstellung, Grundlagen und grafische Lösungen	447
8.1.2	Karush-Kuhn-Tucker-Theorie (KKT-Theorie)	454
8.1.3	Nichtlineare Optimierungsprobleme ohne Nebenbedingungen	458
8.1.4	Bausteine der allgemeinen NLP-Techniken (Übersicht)	460
	Aufgaben 8.1 bis 8.5	462
8.2	Problemlösungen mit einem Standard-Software-System	462
8.2.1	Allgemeine LP-Probleme	463
8.2.2	Ausgewählte NLP-Probleme	467
8.2.3	Portfolio-Probleme	468
8.2.4	Transportprobleme	471
8.2.5	Zuordnungsprobleme	473
8.2.6	Netzwerkprobleme	474
8.2.7	Netzplantechniken	476
8.2.8	Kundenwanderung	483
8.2.9	Verwaltung von Modellen: Algebraische Eingabe und Solver	485
	Literaturverzeichnis	488
	Sachwortverzeichnis	490

1

Funktionen einer reellen Variablen in ökonomischen Problemen

Zusammenhänge zwischen den Größen wirtschaftlicher Erscheinungen als mathematische Funktion zu betrachten und aus ihrer formal-mathematischen Analyse inhaltlich-ökonomische Informationen zu gewinnen, hat sich zu einem bewährten Hilfsmittel entwickelt. Davon zeugen unter anderem die vielfältigen Produktionsfunktionen in Betriebs- und Volkswirtschaft sowie die verschiedenen Typen von Wachstumsfunktionen.

1.1 Mathematische Grundbegriffe

1.1.1 Funktionsbegriff

BEISPIEL

1.1 Zuordnungen als ein Grundelement von Funktionen

Die Herstellung eines Produktes verursacht Kosten. Setzt man sie ins Verhältnis zur Zahl der erzeugten Exemplare des Produktes (zur Produktionsmenge), erhält man die Durchschnittskosten. Letztere werden auch Stückkosten oder spezifische Kosten genannt. Sowohl Kosten als auch Durchschnittskosten ändern sich mit der Produktionsmenge. Dabei wird – gewisse Produktionsbedingungen innerhalb eines Zeitraumes als konstant vorausgesetzt – jeder Produktionsmenge eine bestimmte Kostensumme zugeordnet, und umgekehrt gehört zu jeder Kostensumme eine bestimmte Produktionsmenge. Für die Durchschnittskosten gilt nur Ersteres, während zu einer gegebenen Höhe von Durchschnittskosten durchaus zwei verschiedene Produktionsmengen gehören können. *Tabelle 1.1* zeigt eine mögliche konkrete Zuordnung der genannten ökonomischen Größen.

Tabelle 1.1 Produktionsmenge P (in Mengeneinheiten ME), Kosten K (in Geldeinheiten GE) und Durchschnittskosten k (in GE/ME)

P in ME	2	4	6	8	10	12	14	16
K in GE	38,6	47,6	51,8	56	65	83,6	116,6	168,8
k in GE/ME	19,3	11,9	8,6 $\bar{3}$	7	6,5	6,9 $\bar{6}$	8,33	10,55

Das Charakteristische im *Beispiel 1.1* besteht darin, dass jedem Wert P genau ein Wert K bzw. genau ein Wert k zugeordnet wird. Es ergeben sich Wertepaare $(P; K)$ bzw. $(P; k)$.

Sind M_1 und M_2 zwei Mengen reeller Zahlen ($M_1, M_2 \subseteq \mathbf{R}$), und ist jedem $x \in M_1$ genau ein $y \in M_2$ zugeordnet, so heißt die dadurch gegebene paarweise Zuordnung reelle **Funktion** f . Dabei heißt M_1 Definitionsbereich von f ; er wird mit $D(f)$ bezeichnet.

Als Symbole dienen

$$f: M_1 \rightarrow M_2 \quad \text{oder ausführlicher} \quad (1.1a)$$

$$y = f(x), x \in D(f). \quad (1.1b)$$

Für die Größen x und y einer Funktion (1.1b) werden folgende Namen synonym verwendet:

x **unabhängige Variable**, Urbildpunkt, **Argument**,

y **abhängige Variable**, Bildpunkt, **Funktionswert**.

Des Weiteren sind die Bezeichnungen Funktionsterm für $f(x)$ und Zuordnungsvorschrift oder Funktionsrelation für $y = f(x)$ gebräuchlich.

Hier werden nur reelle Funktionen betrachtet, und daher wird der Zusatz „reell“ künftig nicht angegeben.

Die Menge aller derjenigen Werte y , die sich für eine Funktion f aus ihrer Zuordnungsvorschrift $y = f(x)$ ergeben, wenn x den gesamten Definitionsbereich $D(f)$ durchläuft, wird **Wertebereich** genannt und mit $W(f)$ bezeichnet.

Zur Vorgabe einer Funktion gehören unbedingt die beiden Elemente „Zuordnungsvorschrift“ und „Definitionsbereich“ (siehe 1.1b)¹⁾. Durch sie ist der Wertebereich eindeutig festgelegt, was jedoch nicht bedeutet, dass seine Ermittlung in jedem Falle elementar verläuft. Die Angabe des Definitionsbereiches einer Funktion ist besonders für angewandte Probleme von Bedeutung, weil die Ergebnisse wesentlich vom Definitionsbereich abhängen können.

BEISPIEL

1.2 Einfluss des Definitionsbereiches auf Eigenschaften von Funktionen

Die Funktion $y = f_1(x)$, $x \in [0, 10]$, mit $f_1(x) = (x - 3)^2 + 1$ hat wegen $(x - 3)^2 \geq 0$ die Eigenschaft $f_1(x) \geq 1$ für alle $x \in [0, 10]$. Dabei wird der kleinste Funktionswert für $x = 3$ angenommen: $f_1(3) = 1$.

Ändert man für f_1 den Definitionsbereich und betrachtet beispielsweise $y = f_2(x)$, $x \in [5, 10] = D(f_2)$, mit $f_2(x) = (x - 3)^2 + 1$, so gilt hier $(x - 3)^2 \geq 2^2 = 4$ für alle $x \in D(f_2)$, und der kleinste Funktionswert wird für $x = 5$ angenommen:

$$f_2(x) \geq f_2(5) = 5. \quad \blacksquare$$

Aus den Argumenten x und den Funktionswerten y einer Funktion f können geordnete Wertepaare $(x; y)$ gebildet werden, bei denen immer x an erster und y an zweiter Stelle steht. Die Wertepaare $(x; y)$ lassen sich als Punkte in einem kartesischen Koordinatensystem darstellen. Die Gesamtheit aller Punkte $(x; y)$, die man erhält, wenn x alle Werte von $D(f)$ durchläuft, bildet den **Graphen** G_f der Funktion.

BEISPIEL

1.3 Darstellung von Funktionen mittels ihres Graphen

Der Graph der Funktion $y = 0,5x + 1$, $-3 \leq x \leq 6$, ist eine Strecke (s. *Bild 1.1*). Der Graph der Funktion $y = (x - 3)^2 + 1$, $0 \leq x \leq 5$, ist ein Parabelabschnitt (s. *Bild 1.2*).

¹⁾ Ausgenommen hiervon ist der Fall, dass die Funktion nur aus endlich vielen, aufgelisteten Wertepaaren $(x_i; y_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$, besteht.

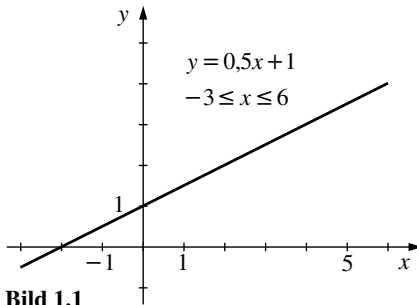


Bild 1.1

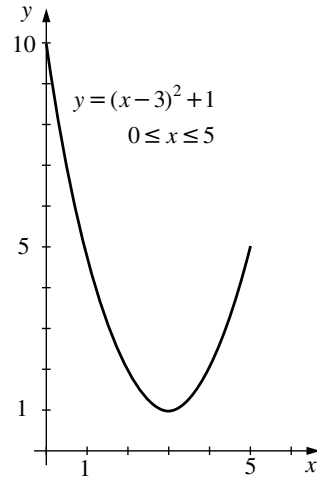


Bild 1.2

Graphen von Funktionen können Strecken, Streckenzüge, Geraden, Kurven, Punktfolgen oder aus den genannten Elementen zusammengesetzt sein.

BEISPIEL

1.4 Punktfolgen und Streckenzüge als Graphen von Funktionen

Der Graph der Durchschnittskostenfunktion $k = k(P)$ aus *Tabelle 1.1* ist eine Punktfolge (s. *Bild 1.3*).

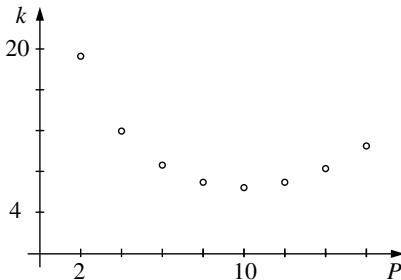


Bild 1.3

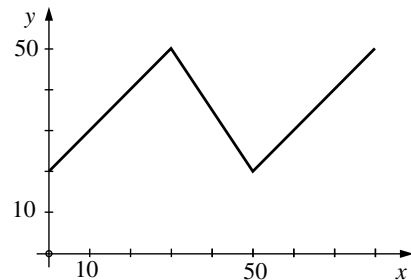


Bild 1.4

Bild 1.4 zeigt einen Streckenzug als Graphen. Er ist aus 3 Strecken zusammengesetzt.

Graphen von Funktionen besitzen eine charakteristische Eigenschaft: Jede Parallele zur vertikalen Achse des kartesischen Koordinatensystems schneidet den Graphen höchstens in einem Punkt. Ursache hierfür ist der Sachverhalt, dass jedem Argument x genau ein Funktionswert y zugeordnet ist. Man vergleiche hierzu die *Bilder 1.1* bis *1.4*. Deshalb muss durchaus nicht jede Kurve in einem kartesischen Koordinatensystem Graph einer Funktion sein. So stellen beispielsweise die Kurven in den *Bildern 1.5* und *1.6* keine Funktionen dar. Dagegen können

Parallelen zur horizontalen Achse des kartesischen Koordinatensystems den Graphen einer Funktion durchaus in mehr als einem Punkt schneiden. Das gilt beispielsweise für die in den Bildern 1.2 und 1.4 dargestellten Graphen.

BEISPIEL

1.5 Kurven, die nicht Graph einer Funktion sind

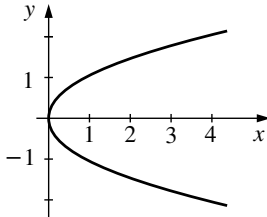


Bild 1.5

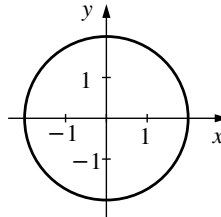


Bild 1.6

■

Die Vorgabe von Funktionen kann auf sehr vielfältige Weise erfolgen. Genannt seien hier folgende Möglichkeiten:

- M1: Wertetabelle (siehe *Tabelle 1.1*)
- M2: Analytische Vorgabe in der Form $y = f(x)$, $x \in D(f)$, wobei $f(x)$ ein mathematischer Term ist (vgl. *Beispiel 1.3*).
- M3: Grafische Vorgabe durch eine Kurve im kartesischen Koordinatensystem, die von Parallelen zur vertikalen Achse höchstens einmal geschnitten wird (s. *Bilder 1.1* und *1.2*).
- M4: Vorgabe in zusammengesetzter Form, d. h. durch unterschiedliche Zuordnungen in verschiedenen Teilen des Definitionsbereiches. *Bild 1.4* zeigt eine zusammengesetzte Funktion. Ihre analytische Vorgabe ist durch

$$y = \begin{cases} x + 20 & \text{für } 0 \leq x \leq 30 \\ -1,5x + 95 & \text{für } 30 < x < 50 \\ x - 30 & \text{für } 50 \leq x \leq 80 \end{cases}$$

gegeben.

- M5: Implizite Vorgabe durch eine Gleichung der Art $g(x, y) = 0$. Dabei muss $g(x, y)$ ein mathematischer Term sein, der jedem x aus einer gewissen Menge reeller Zahlen genau einen Wert y zuordnet.

BEISPIEL

1.6 Eine Preis-Absatz-Relation als implizite Funktion

Von zwei Produkten A und B sei bekannt, dass Produkt A einen festen Preis p_A erzielt, während der Preis von B mit der abgesetzten Menge sinkt. Die konkrete Preis-Mengen-Funktion sei zu $p_B(y) = 10.000/(50 + 4y)$, $10 \leq y \leq 100$, ermittelt worden, wobei y die von B abgesetzte Menge angibt. Wird die von A abgesetzte Menge mit x bezeichnet, so liefert die Summe $p_A x + p_B(y)y$ den beim Absatz von x und y erzielten Erlös E : $p_A x + p_B(y)y = E$. Soll nun ein ganz bestimmter Erlös E_0 erzielt werden, so ist das mit verschiedenen Kombinationen der Absatzmengen x und y möglich. Sie müssen der Relation $p_A x + p_B(y)y = E_0$ oder

$$g(x, y) = 0 \quad \text{mit} \quad g(x, y) = p_A x + \frac{10.000}{50 + 4y} y - E_0$$

genügen, wobei jeder zulässigen Absatzmenge x genau eine Absatzmenge y zugeordnet ist (s. Aufgabe 1.11). ■

1.1.2 Ein Funktionenreservoir

Funktionen, die bei der Bearbeitung ökonomischer Phänomene auftreten, besitzen in vielen Fällen einen recht einfachen Aufbau. Wir wollen sie unter der Bezeichnung „elementare Funktionen“ zusammenfassen. Sie bilden das Funktionenreservoir, mit dem wir uns im Weiteren beschäftigen wollen. Ihre Bausteine sind einige wenige **Grundfunktionen**. Dazu zählen:

Potenzfunktionen

$$y = x^n, \quad n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}, \quad x \in (-\infty, +\infty), \quad \text{wobei } \mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\} \quad (1.2)$$

$$y = x^k, \quad k \in \mathbf{Z}, \quad x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) = \mathbf{R} \setminus \{0\}. \quad (1.3)$$

Die Graphen von Potenzfunktionen mit positivem Exponenten n sind Parabeln n -ten Grades. Sie verlaufen alle durch die Punkte $(0; 0)$ und $(1; 1)$. Für geradzahlige Exponenten n verlaufen die Parabeln außerdem immer durch den Punkt $(-1; 1)$, für ungeradzahlige Exponenten n dagegen immer zusätzlich durch den Punkt $(-1; -1)$ (siehe Bild 1.7).

Die Graphen von Potenzfunktionen mit negativem Exponenten k sind Hyperbeln. Sie verlaufen alle durch den Punkt $(1; 1)$. Für geradzahligen Exponenten k verlaufen die Hyperbeln außerdem immer durch den Punkt $(-1; 1)$, für ungeradzahligen Exponenten k dagegen immer zusätzlich durch den Punkt $(-1; -1)$ (siehe Bild 1.8).

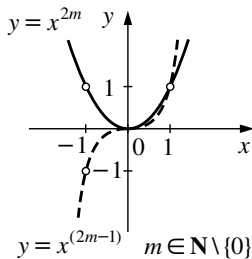


Bild 1.7

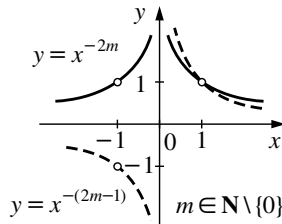


Bild 1.8

Wurzelfunktionen

$$y = x^a, \quad a = \frac{p}{q}, \quad p, q \in \mathbf{N} \setminus \{0\}, \quad a \notin \mathbf{N}, \quad x \in [0, +\infty). \quad (1.4)$$

Die Graphen von Wurzelfunktionen beginnen im Koordinatenursprung $(0; 0)$ und verlaufen alle durch den Punkt $(1; 1)$. Sie liegen ausschließlich im 1. Quadranten des kartesischen Koordinatensystems. Für die Spezialfälle $a = \frac{1}{q}, q \in \mathbf{N} \setminus \{0, 1\}$ sind die Graphen Parabeläste; für diese Spezialfälle mit ungeraden q kann der Definitionsbereich auf ganz \mathbf{R} ausgedehnt werden.

BEISPIEL**1.7** Wurzelfunktion mit dem Exponenten 0,1

Die Funktion $y = x^{0,1}$, $0 \leq x < +\infty$, nimmt beispielsweise für $x = 2$ den Funktionswert $y = 1,0718$ an, den man u. a. mit einem Taschenrechner durch die Eingabenfolge $2 [y^x] 0,1 [=]$ erhält. ■

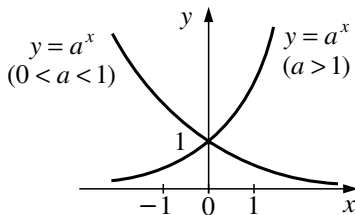
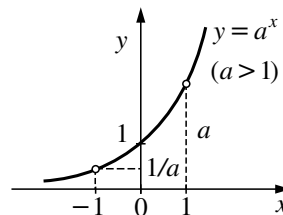
Potenz- und Wurzelfunktionen können zusammengefasst und auf beliebige Exponenten a verallgemeinert werden:

$$y = x^a, \quad a \in \mathbf{R}, x \in (0, +\infty). \quad (1.5)$$

Exponentialfunktionen

$$y = a^x, \quad a > 0 \quad \text{und} \quad a \neq 1, x \in \mathbf{R}. \quad (1.6)$$

Die Graphen von Exponentialfunktionen liegen ausnahmslos in der oberen Halbebene des kartesischen Koordinatensystems und verlaufen alle durch den Punkt $(0; 1)$. Für ein konkretes a verläuft der entsprechende Graph darüber hinaus durch die beiden Punkte $\left(-1; \frac{1}{a}\right)$ und $(1; a)$ (s. *Bilder 1.9a, 1.9b* und vgl. Lösung zur Aufgabe 1.6).

**Bild 1.9a****Bild 1.9b**

In enger Beziehung zu den Exponentialfunktionen stehen die Logarithmusfunktionen.

Logarithmusfunktionen

$$y = \log_a x, \quad a > 0 \quad \text{und} \quad a \neq 1, x > 0. \quad (1.7)$$

Die Graphen von Logarithmusfunktionen liegen ausnahmslos in der rechten Halbebene des kartesischen Koordinatensystems und verlaufen alle durch den Punkt $(1; 0)$. Man erhält sie durch Spiegelung der Graphen entsprechender Exponentialfunktionen an der Geraden $y = x$. Daher verläuft auch für ein konkretes a der zugehörige Graph der Logarithmusfunktion durch die beiden Punkte $\left(\frac{1}{a}; -1\right)$ und $(a; 1)$ (s. *Bilder 1.10a, 1.10b* und vgl. Lösung zur Aufgabe 1.7).

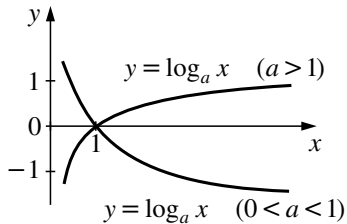


Bild 1.10a

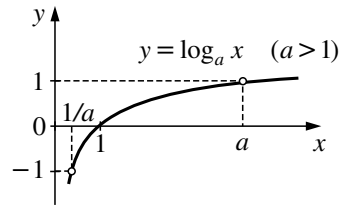


Bild 1.10b

Für die Werte $a = e$ (e die Eulersche Zahl, $e \approx 2,718\,28$ – natürliche Wachstumskonstante), $a = 2$ und $a = 10$ ergeben sich spezielle Logarithmusfunktionen:

$$y = \log_e x = \ln x, \quad x > 0, \quad (1.7a)$$

$$y = \log_2 x = \text{ld } x, \quad x > 0, \quad \text{und} \quad (1.7b)$$

$$y = \log_{10} x = \text{lg } x, \quad x > 0. \quad (1.7c)$$

In älteren Tafelwerken sind $\ln x$ und $\text{lg } x$ noch tabelliert. Heute sind auf einschlägigen Taschenrechnern entsprechende Funktionstasten vorhanden.

Trigonometrische Funktionen (Winkelfunktionen)

$$y = \sin x, \quad x \in \mathbf{R}, \quad (1.8a)$$

$$y = \cos x, \quad x \in \mathbf{R}, \quad (1.8b)$$

$$y = \tan x, \quad x \in \mathbf{R} \text{ und } x \neq \frac{\pi}{2} \pm k\pi, k \in \mathbf{N}, \quad (1.9)$$

$$y = \cot x, \quad x \in \mathbf{R} \text{ und } x \neq \pm k\pi, k \in \mathbf{N}. \quad (1.10)$$

Die *Bilder 1.11* und *1.12* zeigen Teile der Graphen von $y = \sin x$ und $y = \cos x$.

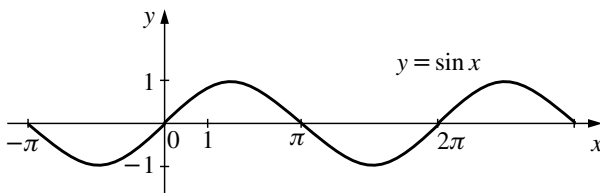


Bild 1.11

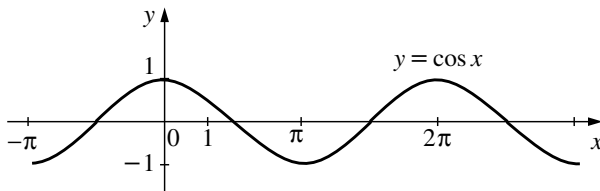


Bild 1.12

Von den trigonometrischen Funktionen können insbesondere $y = \sin x$ und $y = \cos x$ bei der Untersuchung von Saisonschwankungen und Konjunkturerscheinungen von Bedeutung sein.

Als letzte Gruppe der Grundfunktionen seien die Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen, die sogenannten **Arkusfunktionen**, hier erwähnt.

Werden die Grundfunktionen durch Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division¹⁾ und/oder Verkettung miteinander verknüpft, so ergeben sich neue Funktionen. Werden auf sie ebenfalls uneingeschränkt die genannten Verknüpfungen angewandt, so ergibt sich ein unerschöpfliches Reservoir von Funktionen. Jede auf diese Weise gebildete Funktion wollen wir **elementare Funktion** nennen.

Die Verknüpfungen Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division¹⁾ zweier Funktionen setzen voraus, dass beide Funktionen den gleichen Definitionsbereich haben. Sie bestehen dann einfach in der Ausführung der entsprechenden algebraischen Operationen mit den Funktionswerten.

BEISPIELE elementarer Funktionen:

- 1.8** Mit $y = 3 - 5x + 7x^2 - 9x^3$, $x \in \mathbf{R}$, ist eine Summe bzw. Differenz von Potenzfunktionen gegeben. Allgemein spricht man bei Summen bzw. Differenzen von Potenzfunktionen von **Linearkombinationen** von Potenzfunktionen. Sie werden kurz **Polynome** genannt.
- 1.9** Mit $y = (1 + x^2)(1 - x^2)$, $x \in \mathbf{R}$, ist das Produkt einer Summe und einer Differenz von Potenzfunktionen, d. h. das Produkt zweier Polynome gegeben.
- 1.10** Mit $y = (1 + x^2)/(1 - x^2)$, $x \in \mathbf{R}$ und $x \neq \pm 1$, ist der Quotient zweier Polynome und damit ein Beispiel für rationale Funktionen gegeben. ■

Die **Verkettung** zweier Funktionen g und h zu einer neuen Funktion f besteht darin, die Funktionswerte $g(x)$ als Argumente der Funktion h einzusetzen:

$$f(x) = h(g(x)), \quad x \in D(f) = D(g). \quad (1.11)$$

Der Term $h(g(x))$ ist nur sinnvoll, wenn der Funktionswert $g(x)$ zum Definitionsbereich von h gehört. Deshalb erfordert die Bildung der verketteten Funktion (1.11) die Bedingung $W(g) \subseteq D(h)$ als Voraussetzung. Gegebenenfalls muss der Definitionsbereich von g entsprechend eingeschränkt werden (s. *Beispiel 1.11*). Damit ist auch klar, dass man die Reihenfolge bei der Verkettung zweier Funktionen einhalten muss. Im Falle der verketteten Funktion (1.11) nennt man g die **innere Funktion** und h die **äußere Funktion**.

BEISPIEL

1.11 Verkettete Funktion

Die Funktion $y = \sqrt{(x-1)(x^2+1)}$, $x \geq 1$, kann als Verkettung der inneren Funktion $g(x) = (x-1)(x^2+1)$, $x \geq 1$, und der äußeren Funktion $h(g) = \sqrt{g}$, $g \geq 0$, aufgefasst werden. Da die innere Funktion eine elementare Funktion, die äußere sogar eine Grundfunktion darstellen, gehört die gegebene verkettete Funktion ebenfalls zu den

¹⁾ Bei der Division zweier Funktionen muss natürlich der Divisor von null verschieden sein.

elementaren Funktionen. Hier ist der Funktionsterm $g(x) = (x - 1)(x^2 + 1)$ für alle $x \in \mathbf{R}$ erklärt. Er müsste deshalb vorbereitend auf $x \geq 1$ eingeschränkt werden. ■

1.1.3 Eigenschaften von Funktionen

Wir betrachten eine Auswahl einfachster Eigenschaften von Funktionen, wie sie bei der Untersuchung ökonomischer Größen häufig auftreten.

BEISPIELE

1.12 Logistische Wachstumsfunktionen und ihre charakteristischen Eigenschaften

Der Ausstattungsgrad ist eine ökonomische Kennzahl, die angibt, wieviel von 100 Haushalten im Durchschnitt über ein bestimmtes technisches Konsumgut – z. B. Waschmaschine – verfügen (vgl. [29]). Der maximale Wert eines Ausstattungsgrades ist offensichtlich 100. Man nennt ihn Sättigungswert. Jeder Ausstattungsgrad ist daher durch den Sättigungswert 100 nach oben beschränkt. Weiter erweist es sich, dass die Werte $y(t)$ eines bestimmten Ausstattungsgrades i. Allg. von Jahr zu Jahr größer werden. Schließlich zeigt es sich für einen konkreten Ausstattungsgrad häufig, dass die jährlichen Zuwächse $\Delta y(t) = y(t) - y(t - 1)$ in einer Anfangsphase zunächst ebenfalls wachsen, während sie in der Endphase – bei entsprechender Annäherung an den Sättigungswert – kleiner werden, d. h. sinken. Als Modelle solcher Entwicklungen dienen u. a. sogenannte **logistische Wachstumsfunktionen** mit den charakteristischen S-förmigen Graphen (s. *Bild 1.13*).

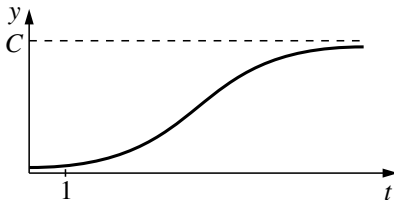


Bild 1.13 Logistische Wachstumsfunktion mit Sättigungskonstante C

1.13 Kostenfunktionen und ihre charakteristischen Eigenschaften

Die Kosten K für die Herstellung eines Produktes wachsen mit der produzierten Menge x . Dieses Wachstum unterscheidet sich aber i. Allg. wesentlich von dem im *Beispiel 1.12* beschriebenen. So wird zwar der Kostenwert $K(x)$ für jede konkrete Produktionsmenge x eine endliche Zahl sein, aber es wäre wenig sinnvoll anzunehmen, dass für die Kosten $K(x)$ bei unbeschränkter Vergrößerung der Produktionsmenge x ein maximaler Kostenwert existiert, der nicht überschritten wird. Weiter geht man in der Betriebswirtschaftslehre teilweise davon aus, dass die Zuwächse $\Delta K(x) = K(x) - K(x - 1)$ für kleine Produktionsmengen x zunächst sinken, und ab einer bestimmten Produktionsmenge zu wachsen beginnen. Es ist dies die Situation, die man bei der Unterstellung sogenannter ertragsgesetzlicher Kostenfunktionen antrifft (vgl. Aufgabe 1.10). ■

Eine Funktion $y = f(x)$, $x \in D(f)$, heißt **nach unten** bzw. **nach oben beschränkt**, wenn ihr Wertebereich $W(f)$ nach unten bzw. nach oben beschränkt ist, d. h., wenn es eine Konstante c bzw. C derart gibt, dass

$$c \leq f(x) \quad \text{bzw.} \quad f(x) \leq C \quad \text{für alle } x \in D(f) \quad (1.12)$$

gilt. Existiert sogar eine Konstante K derart, dass

$$|f(x)| \leq K \quad \text{für alle } x \in D(f) \quad (1.13)$$

gilt, wird die Funktion **beschränkt** genannt.

BEISPIEL

1.14 Beschränkte Funktionen

Die Funktion $f(x) = 0,5x + 1$, $-1 \leq x \leq 6$, ist nach unten durch $c = 0,5$, nach oben durch $C = 4$ und insgesamt durch $K = 4$ beschränkt:

$$0,5 \leq f(x), \quad f(x) \leq 4 \quad \text{und} \quad |f(x)| \leq 4 \quad \text{für alle } x \in [-1, 6].$$

Die Funktion $f(x) = (x - 3)^2 + 1$, $0 \leq x \leq 5$, ist nach unten durch $c = 0$, nach oben durch $C = 10$ und insgesamt durch $K = 10$ beschränkt:

$$0 \leq f(x), \quad f(x) \leq 10 \quad \text{und} \quad |f(x)| \leq 10 \quad \text{für alle } x \in [0, 5].$$

Die genannten Ergebnisse werden durch die *Bilder 1.1* und *1.2* illustriert. ■

Eine Funktion $y = f(x)$, $x \in D(f)$, heißt in einem Intervall $I \subseteq D(f)$ **monoton wachsend** bzw. **monoton fallend**, wenn die Ungleichung

$$f(x_1) \leq f(x_2) \quad \text{bzw.} \quad f(x_1) \geq f(x_2) \quad (1.14)$$

für beliebige $x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$ erfüllt ist. Entsprechend heißt die Funktion **streng monoton wachsend** bzw. **streng monoton fallend** in I , wenn

$$f(x_1) < f(x_2) \quad \text{bzw.} \quad f(x_1) > f(x_2) \quad (1.15)$$

für beliebige $x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$ gilt.

Das Wesen der Monotonie liegt darin, dass größeren Argumenten bei wachsenden Funktionen jeweils größere Funktionswerte zugeordnet sind, während bei fallenden Funktionen zum größeren Argument immer der kleinere Funktionswert gehört.

BEISPIEL

1.15 Monotone Funktionen

Die Funktion $f(x) = 0,5x + 1$, $-1 \leq x \leq 6$, ist in ihrem gesamten Definitionsbereich streng monoton wachsend (vgl. *Bild 1.1*).

Die Funktion $f(x) = (x - 3)^2 + 1$, $0 \leq x \leq 5$, ist in $I_1 = [0, 3] \subseteq D(f)$ streng monoton fallend, in $I_2 = [3, 5] \subseteq D(f)$ dagegen streng monoton wachsend (vgl. *Bild 1.2*). ■

Für Grundfunktionen gelten u. a. folgende **Aussagen**:

- A1.1 Potenzfunktionen (1.2) sind für geradzahligem Exponenten n in $(-\infty, 0]$ streng monoton fallend, in $[0, +\infty)$ dagegen streng monoton wachsend; für ungeradzahligem Exponenten n sind sie in ihrem gesamten Definitionsbereich $(-\infty, +\infty)$ streng monoton wachsend.
- A1.2 Exponentialfunktionen (1.6) sind für $0 < a < 1$ in $(-\infty, +\infty)$ streng monoton fallend, für $a > 1$ sind sie dagegen in $(-\infty, +\infty)$ streng monoton wachsend (vgl. Aufgabe 1.6).
- A1.3 Logarithmusfunktionen (1.7) sind für $0 < a < 1$ in $(0, +\infty)$ streng monoton fallend, für $a > 1$ sind sie dagegen in $(0, +\infty)$ streng monoton wachsend (vgl. Aufgabe 1.7).

In den *Beispielen 1.12* und *1.13* (vgl. auch die Aufgaben 1.9 und 1.10) wurde zur näheren Charakterisierung des Wachstums der dort betrachteten ökonomischen Größen Ausstattungsgrad und Kosten das Monotonieverhalten ihrer Zuwächse benötigt. Allgemein charakterisiert das Monotonieverhalten der Zuwächse $\Delta f(x)$ einer Funktion f ihre Krümmungseigenschaften.

Eine Funktion $y = f(x)$, $x \in D(f)$, heißt in $I \subseteq D(f)$ **konvex** oder **linksgekrümmt** bzw. **konkav** oder **rechtsgekrümmt**, wenn

$$\Delta f(x_1) \leq \Delta f(x_2) \text{ bzw. } \Delta f(x_1) \geq \Delta f(x_2) \quad (1.16)$$

für beliebige $x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$ gilt. Entsprechend heißt f in I **streng konvex** bzw. **streng konkav**, wenn

$$\Delta f(x_1) < \Delta f(x_2) \text{ bzw. } \Delta f(x_1) > \Delta f(x_2) \quad (1.17)$$

für beliebige $x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$ erfüllt ist. Dabei bezeichnet $\Delta f(x_i)$ hier einen Zuwachs (eine Veränderung) der Funktionswerte, der gemäß

$$\Delta f(x_i) = f(x_i + h) - f(x_i), \quad i = 1, 2,$$

mit hinreichend kleinem $h > 0$ zu bilden ist (siehe auch *Abschnitt 2.2.5* und *8.1.1*).

BEISPIEL

1.16 Untersuchung des Krümmungsverhaltens der Parabel 3. Grades

Die Parabel 3. Grades $f(x) = x^3$, $-\infty < x < +\infty$, ist in $I_1 = (-\infty, 0]$ streng konkav und in $I_2 = [0, +\infty)$ streng konvex.

Den Nachweis beginnen wir mit dem einfacheren Teil.

Für beliebige $x_1, x_2 \in I_2$ mit $x_1 < x_2$ muss gezeigt werden, dass $\Delta f(x_1) < \Delta f(x_2)$ ist.

Für $f(x) = x^3$ lautet diese Ungleichung

$$(x_1 + h)^3 - x_1^3 < (x_2 + h)^3 - x_2^3.$$

Hieraus erhält man schrittweise

$$x_1^3 + 3x_1^2h + 3x_1h^2 + h^3 - x_1^3 < x_2^3 + 3x_2^2h + 3x_2h^2 + h^3 - x_2^3, \text{ weiter}$$

$$3x_1^2h + 3x_1h^2 + h^3 < 3x_2^2h + 3x_2h^2 + h^3$$

oder (nach Subtraktion von h^3 und anschließender Division durch $3h$)

$$x_1(x_1 + h) < x_2(x_2 + h).$$

Die letzte Relation ist aber für $0 < x_1 < x_2$ und $0 < x_1 + h < x_2 + h$ immer erfüllt. Da alle Umformungen umkehrbar sind, ist die geforderte Ungleichung $\Delta f(x_1) < \Delta f(x_2)$ für I_2 gezeigt.

Für I_1 muss – entsprechend der behaupteten strengen Konkavität – die entgegengesetzte Ungleichung $\Delta f(x_1) > \Delta f(x_2)$ gezeigt werden. Hierzu wählen wir den umgekehrten Weg im Vergleich zu I_2 . Es seien $x_1, x_2 \in I_1$ beliebig fixierte Werte mit $x_1 < x_2$. Dann gibt es immer Werte $h > 0$, sodass $x_1 < x_2 < x_2 + h < 0$. Hieraus folgt $-x_1 > -x_2 > 0$ und $-(x_1 + h) > -(x_2 + h) > 0$. Multipliziert man nun einerseits die beiden größeren und andererseits die beiden kleineren positiven Werte miteinander, so ergibt sich

$$(-x_1)[-(x_1 + h)] > (-x_2)[-(x_2 + h)] \quad \text{oder} \quad x_1^2 + x_1h > x_2^2 + x_2h.$$

Die erhaltene Ungleichung multipliziert man zunächst mit $3h$, danach wird h^3 addiert. Das liefert

$$3x_1^2h + 3x_1h^2 + h^3 > 3x_2^2h + 3x_2h^2 + h^3 \quad \text{oder} \quad (x_1 + h)^3 - x_1^3 > (x_2 + h)^3 - x_2^3,$$

womit die geforderte Relation $\Delta f(x_1) > \Delta f(x_2)$ für beliebige $x_1 < x_2 < 0$ nachgewiesen ist. ■

Das Krümmungsverhalten von Funktionen lässt sich veranschaulichen. Es zeigt sich nämlich, dass für eine in $I \subseteq D(f)$ konvexe Funktion gilt: Wie immer man zwei Punkte $P_1 = (x_1; f(x_1))$ und $P_2 = (x_2; f(x_2))$ auf dem Graphen von f über I fixiert, der Graph zwischen P_1 und P_2 liegt im Falle strenger Konvexität immer ganz unterhalb der Sekante zwischen P_1 und P_2 (s. *Bild 1.14*). Entsprechend liegt im Falle strenger Konkavität der Graph zwischen P_1 und P_2 immer ganz oberhalb der Sekante zwischen P_1 und P_2 (s. *Bild 1.15*). Insbesondere diese Sachverhalte legitimieren die Bezeichnungen „linksgekrümmt“ und „rechtsgekrümmt“.

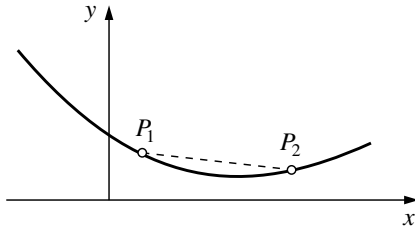


Bild 1.14

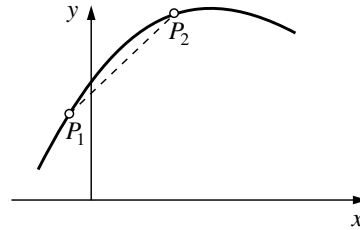


Bild 1.15

1.1.4 Umkehrfunktion

In Zusammenhängen zwischen zwei ökonomischen Größen kann jede der Größen häufig sowohl als unabhängige Variable als auch als abhängige Variable aufgefasst werden. Es ist dabei möglich und teilweise erforderlich, von der Zuordnung einer Größe zu einer anderen auch deren Umkehrung zu betrachten.

BEISPIEL

1.17 Preis-Absatz-Funktion und ihre Umkehrung

Der Preis p eines Produktes kann in Abhängigkeit von der abgesetzten Menge x dieses Produktes aufgefasst werden. Für einfachste Untersuchungen unterstellt man eine lineare Abhängigkeit. Um hier mit konkreten Zahlen arbeiten zu können, wählen wir $p(x) = 400 - 0,5x, 0 \leq x \leq 800$.

Da die Preis-Absatz-Funktion $p = p(x)$ streng monoton fallend ist, ergibt sich der Wertebereich zu $W(p) = [0, 400]$, d. h. $0 \leq p \leq 400$ (s. Bild 1.16).

Kehrt man die Zuordnung um und betrachtet den Absatz x in Abhängigkeit vom Preis p , so erhält man die entsprechende Funktion, indem man die Preis-Absatz-Funktion $p = p(x)$ nach x auflöst:

$$p = 400 - 0,5x \text{ liefert } 2p = 800 - x \text{ und schließlich } x = 800 - 2p, 0 \leq p \leq 400.$$

Das Resultat kann auch so notiert werden

$$x = p^U(p), 0 \leq p \leq 400, \text{ mit } p^U(p) = 800 - 2p.$$

Dabei gilt $p^U(p(x)) = 800 - 2p(x) = 800 - 2(400 - 0,5x) = x$.

Die Umkehrung $x = p^U(p)$ der Preis-Absatz-Funktion $p = p(x)$ ist im Bild 1.17 dargestellt. Diese Darstellung ist ergänzt durch die ursprüngliche Funktion $p = p(x)$ mit ihrem Koordinatensystem (siehe gestrichelte Linien).

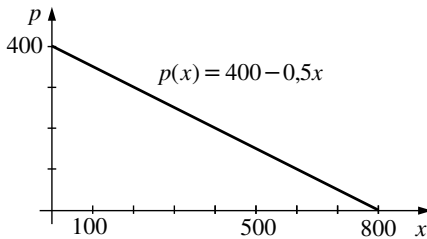


Bild 1.16

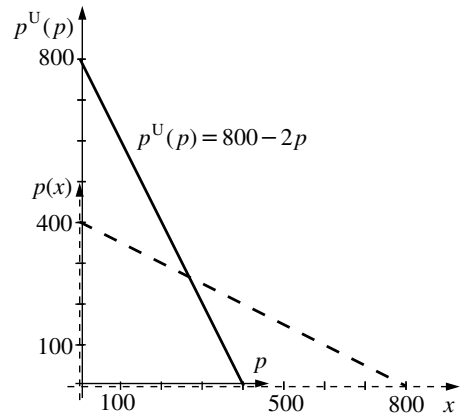


Bild 1.17

Bei der Umkehrung von Funktionen mit ökonomischen Größen ist es nicht üblich, die Variablsymbole formal zu vertauschen. Das würde zur Verwirrung führen, weil hier die Variablsymbole meistens nicht formal gewählt, sondern mit bestimmten Inhalten belegt sind.

Zur Definition der Umkehrfunktion wird der Begriff der Eineindeutigkeit benötigt.

Eine Funktion $y = f(x), x \in D(f)$, heißt **eineindeutig**, wenn verschiedenen Argumenten immer verschiedene Funktionswerte zugeordnet sind, d. h., wenn

$$f(x_1) \neq f(x_2) \text{ für alle } x_1, x_2 \in D(f) \text{ mit } x_1 \neq x_2. \tag{1.18}$$

Eineindeutige Funktionen zeichnen sich dadurch aus, dass ihr Graph nicht nur von jeder Parallelen zur y -Achse, sondern auch von jeder Parallelen zur x -Achse höchstens einmal geschnitten oder tangiert wird. Das gilt von den vier Graphen aus den *Bildern 1.1 bis 1.4* nur für den im *Bild 1.1*.

Von den Grundfunktionen sind alle Potenzfunktionen (1.2) mit ungeradzahligem Exponenten n , alle Exponentialfunktionen (1.6) ebenso wie alle Logarithmusfunktionen (1.7) eineindeutig. Potenzfunktionen (1.2) mit geradzahligem Exponenten n erweisen sich dagegen als nicht eineindeutig. Allerdings kann man durch Einschränkung des Definitionsbereiches auch für sie eineindeutige Parabeläste erhalten. So sind z. B. die Funktionen $y = x^n$, $0 \leq x < +\infty$, auch für geradzahligem Exponenten n eineindeutig. Die Überlegung, durch Einschränkung des Definitionsbereiches einer Funktion deren Eineindeutigkeit zu erreichen, ist in Anwendungsproblemen von Bedeutung.

BEISPIEL

1.18 Eineindeutige Funktion und Einschränkung einer nicht eineindeutigen Funktion auf eineindeutige Äste

Die Funktion $y = 0,5x + 1$, $-3 \leq x \leq 6$, ist eineindeutig (vgl. *Beispiel 1.3*). Die Funktion $y = (x - 3)^2 + 1$, $0 \leq x \leq 5$, ist nicht eineindeutig (vgl. *Beispiel 1.3*). Aber jede ihrer beiden Einschränkungen $f_1(x) = (x - 3)^2 + 1$, $0 \leq x \leq 3$, und $f_2(x) = (x - 3)^2 + 1$, $3 \leq x \leq 5$, sind eineindeutige Funktionen. ■

Es sei

$$y = f(x), x \in D(f),$$

eine eineindeutige Funktion. Dann existiert eine Funktion f^U , die $W(f)$ auf $D(f)$ abbildet, und für die $f^U(f(x)) = x$ für alle $x \in D(f)$ gilt. Sie wird **Umkehrfunktion** von f genannt und mit f^{-1} bezeichnet.

Aus der Definition der Umkehrfunktion f^{-1} ergibt sich (vgl. mit $p^U(p(x)) = x$ im *Beispiel 1.17*)

$$f^{-1}(f(x)) = x \text{ für alle } x \in D(f). \quad (1.19)$$

Für Definitions- und Wertebereich von f^{-1} folgen die Relationen

$$D(f^{-1}) = W(f) \quad \text{und} \quad W(f^{-1}) = D(f). \quad (1.20)$$

Weiter gilt: Wenn f eineindeutig ist, dann ist es auch ihre Umkehrfunktion f^{-1} , wobei

$$(f^{-1})^{-1} = f, \quad (1.21)$$

d. h., die *Umkehrfunktion von einer Umkehrfunktion ist* – wie nicht anders zu erwarten – *gleich der Ausgangsfunktion*. Die Relation (1.21) erinnert an die für Zahlen $a \neq 0$ gültige Gleichung $(a^{-1})^{-1} = a$, muss aber von ihr unterschieden werden. Die hochgestellte -1 im Symbol der Umkehrfunktion hat keineswegs die Bedeutung eines Exponenten wie bei a^{-1} .

Deshalb muss die Umkehrfunktion f^{-1} auch prinzipiell vom Kehrwert $\frac{1}{f}$ einer Funktion unterschieden werden:

$$f^{-1} \neq \frac{1}{f}. \quad (1.22)$$

Ein relativ einfaches Hilfsmittel für den Nachweis der Existenz der Umkehrfunktion ist die Monotonie. Es gilt nämlich: Wenn f eine *streng* monotone Funktion ist, dann existiert f^{-1} . Die Umkehrung dieser Aussage gilt i. Allg. nicht, d. h., es gibt Funktionen f , die nicht streng monoton sind, deren Umkehrfunktion jedoch existiert.

Für die praktische Ermittlung der Umkehrfunktion f^{-1} von $y = f(x)$, $x \in D(f)$, skizzieren wir hier zwei Wege.

Beim analytischen Weg wird versucht, die Zuordnungsvorschrift $y = f(x)$ nach x aufzulösen. Wenn die Auflösung eindeutig möglich ist, dann liefert sie bereits die Umkehrfunktion

$$x = f^{-1}(y), y \in D(f^{-1}) = W(f). \quad (1.23)$$

Zu beachten ist hier, dass Existenz der Umkehrfunktion nicht automatisch die Auflösbarkeit der Zuordnungsvorschrift $y = f(x)$ nach x im Sinne eines geschlossenen mathematischen Terms $f^{-1}(y)$ bedeutet. So kann z. B. von der Funktion $y = f(x)$ mit $f(x) = e^x - 3x$, $x \geq 2$, gezeigt werden (siehe Aufgabe 2.18), dass sie streng monoton wachsend ist, sodass ihre Umkehrfunktion f^{-1} existiert. Dennoch gelingt es nicht, die Zuordnungsvorschrift $y = e^x - 3x$ so nach x aufzulösen, dass man einen geschlossenen mathematischen Term $f^{-1}(y)$ erhält. Möglich ist es hier lediglich, für jeden konkreten Wert $y \in W(f)$ mit einem Näherungsverfahren (siehe *Abschnitt 2.2.6*) den zugehörigen x -Wert zu berechnen. Beispielsweise liefert $y = 2 \in W(f)$ den Wert $x = 2,125\,391\,2$. Man erhält ihn als (eindeutige!) Lösung der nichtlinearen Gleichung $2 = e^x - 3x$.

Der grafische Weg zur Lösung des Problems der Umkehrfunktion bietet sich an, wenn der Graph von f bereits vorliegt. Dann ist zunächst zu prüfen, ob alle Parallelen zur x -Achse den Graphen von f höchstens einmal schneiden oder tangieren. Ist das der Fall, existiert die Umkehrfunktion f^{-1} , und ihren Graphen erhält man einfach dadurch, dass der Graph von f einschließlich der Koordinatenachsen an der Geraden $y = x$ (Winkelhalbierende des 1. Quadranten) gespiegelt wird (vgl. die *Bilder 1.16* sowie *1.17* und siehe *Beispiel 1.19*).

BEISPIEL

1.19 Bildung einer Umkehrfunktion

Gegeben sei die (streng monoton wachsende) Kostenfunktion

$$K(x) = 0,05x^2 + 0,25x + 2, \quad 1 \leq x \leq 10, \quad \text{also} \quad D(K) = [1; 10].$$

(Diese Kostenfunktion ist durch monoton wachsende Kostenzuwächse charakterisiert und gehört damit zu den sogenannten neoklassischen Kostenfunktionen).

Aus der Monotonie von $K(x)$ folgt zunächst, dass

$$K(1) = 2,3 \leq K \leq 9,5 = K(10) \text{ gilt, d. h.}$$

$$W(K) = [2,3; 9,5] = \{x \in \mathbf{R}: 2,3 \leq K \leq 9,5\}.$$

Stellt man sich die Frage, welche Produktmenge x für einen Kostenbetrag von $K \in W(K)$ hergestellt werden kann, so erfordert das die Ermittlung der Umkehrfunktion K^{-1} . Dazu versuchen wir die Zuordnungsvorschrift $K=0,05x^2+0,25x+2$ nach x aufzulösen. Multiplikation mit 20 schafft zunächst bei x^2 den Faktor 1 und liefert $20K=x^2+5x+40$ oder $x^2+5x-20(K-2)=0$.

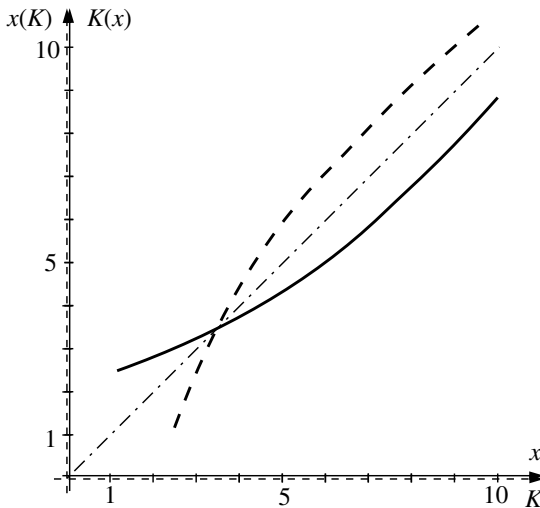


Bild 1.18

Diese quadratische Gleichung besitzt formal die beiden Lösungen

$$x_{1,2} = -2,5 \pm \sqrt{2,5^2 + 20(K-2)},$$

von denen aber der negative Wert $x_1 = -2,5 - \sqrt{2,5^2 + 20(K-2)}$ ausscheidet, weil er nicht zu $D(K)$ gehört. Also ist die Auflöser von $K = K(x)$ nach x hier eindeutig möglich und liefert die Umkehrfunktion

$$K^{-1}: x = -2,5 + \sqrt{6,25 + 20(K-2)}, \quad 2,3 \leq K \leq 9,5.$$

Im *Bild 1.18* sind $K(x)$ und ihre Umkehrfunktion (gestrichelt) grafisch dargestellt, wobei zum besseren Erkennen der spiegelsymmetrischen Lage die Gerade $K = x$ als Hilfsgerade eingezeichnet ist. ■

Unter den Grundfunktionen stehen Exponential- und Logarithmusfunktion im Verhältnis von Umkehrfunktionen zueinander. Deshalb gilt für jedes fixierte $a > 0$, $a \neq 1$ (vgl. (1.19))

$$\log_a a^x = x \text{ für alle } x \in \mathbf{R} \text{ sowie } a^{\log_a x} = x \text{ für alle } x > 0. \quad (1.24)$$

Diese Relationen können hilfreich bei der Lösung gewisser nichtlinearer Gleichungen sein (s. Aufgabe 1.15).

Für die Übertragung von Monotonie und Krümmung einer Funktion f auf deren Umkehrfunktion f^{-1} gelten die **Aussagen**:

- A1.4 Existiert f^{-1} von f , und ist f in $I \subseteq D(f)$ streng monoton wachsend (fallend), dann ist die Umkehrfunktion f^{-1} in $f(I) \subseteq W(f)$ ebenfalls streng monoton wachsend (fallend).
- A1.5 Existiert f^{-1} von f , und ist f in $I \subseteq D(f)$ konvex, dann ist die Umkehrfunktion f^{-1} in $f(I) \subseteq W(f)$ konkav.
- A1.6 Existiert f^{-1} von f , und ist f in $I \subseteq D(f)$ konkav, dann ist die Umkehrfunktion f^{-1} in $f(I) \subseteq W(f)$ konvex.

Hierbei bezeichnet $f(I)$ den Teil des Wertebereiches $W(f)$, der sich ergibt, wenn x alle Werte des Intervalls $I \subseteq D(f)$ durchläuft.

1.2 Funktionen für ökonomische Zusammenhänge

Produktions- und Kostentheorie stellen wesentliche Gebiete der Betriebswirtschaftslehre dar, denen Funktionen immanent sind. Deshalb nutzen sie zu Recht und mit Erfolg dieses mathematische Hilfsmittel. Dabei geht es neben der Berechnung bestimmter Werte vor allem um die Gewinnung von Informationen über die jeweiligen Zusammenhänge. In Einzelfällen hat das bis zur Erkennung und Formulierung von Gesetzmäßigkeiten geführt. Produktions- und Kostenfunktionen bilden daher auch im *Kapitel 2* wesentliche Schwerpunkte der Anwendungen. Ergänzt werden diese beiden Klassen von Funktionen durch einige weitere funktionale Zusammenhänge, die typisch für betriebswirtschaftliche Untersuchungen sind.

Für die Darstellung von mengenmäßigen Beziehungen zwischen ökonomischen Größen mittels Funktionen sind einige Vereinbarungen erforderlich. So werden wir zwischen **Einfluss-** oder **Faktorgrößen** – kurz Faktor – einerseits und **Ziel-** oder **Wirkungsgrößen** – kurz Wirkung – unterscheiden. Im *Beispiel 1.1* der Kostenfunktion übt die Produktmenge Einfluss auf die Kosten bzw. Durchschnittskosten aus. Deshalb stellt die Produktmenge hier die Einflussgröße dar, während Kosten und Durchschnittskosten Zielgrößen sind. Die Einteilung ökonomischer Größen in Einfluss- und Zielgrößen hängt von der Spezifik der jeweiligen Beziehung ab. Sie kann sich daher von Fall zu Fall ändern. So wird im *Beispiel 1.19* von einer Kostenfunktion ausgegangen, für die die eben genannte Einteilung in Einfluss- und Zielgrößen gilt. Die dort anschließend behandelte Frage nach den herstellbaren Produktmengen zu gegebenen Kostenbeiträgen kehrt diese Einteilung genau um: Die Kosten werden zur Einflussgröße und die Produktmenge zur Zielgröße. Die Symbole werden – ähnlich wie in der Physik – in Anlehnung an die bezeichneten ökonomischen Größen gewählt.

In *Tabelle 1.2* sind einige Funktionen angegeben. Mit [...] sind die Maßeinheiten der jeweiligen ökonomischen Größe bezeichnet. Dabei bedeuten ME_r – Mengeneinheiten der Ressource, ME_x – Mengeneinheiten des Produktes, GE – Geldeinheiten.

Für einige der Funktionen lassen sich bestimmte Eigenschaften angeben, die auf inhaltlich-ökonomischen Sachverhalten beruhen. So ist es ökonomisch unmittelbar plausibel, dass Kosten- und Erlösfunktion streng monoton wachsend sind. Dagegen ist die Preis-Absatz-Funktion für ein normales Konsumgut streng monoton fallend. Da der Gewinn sich als Differenz der beiden streng monoton wachsenden Größen Erlös minus Kosten darstellt, besitzt die Gewinnfunktion kein eindeutiges Monotonieverhalten. Allgemein zeigt sich, dass der Gewinnverlauf in zwei Phasen zerfällt: Zunächst steigt der Gewinn bis zu einem absoluten Maximum, und danach sinkt er (vgl. *Abschnitt 2.5.2*). Die Entwicklung der Kosten in Abhängigkeit vom

Tabelle 1.2 Eine Auswahl von Funktionen für ökonomische Zusammenhänge

Einflussgröße, Faktor	Zielgröße, Wirkung	funktionaler Zusammenhang	Funktion (Name)
r eingesetzte Menge eines Produktions- faktors (Ressource), $[r] = \text{ME}_r$	x Produktionsoutput, $[x] = \text{ME}_x$	$x = x(r)$	Produktions- funktion
x Produktionsoutput, $[x] = \text{ME}_x$	K Kosten, $[K] = \text{GE}$	$K = K(x)$	Kosten- funktion
x Produktionsoutput, $[x] = \text{ME}_x$	k Stück- oder Durch- schnittskosten, $[k] = \text{GE}/\text{ME}_x$	$k = k(x)$ $= \frac{K(x)}{x}$	Durchschnitts- kostenfunktion
x Nachfrage eines Produktes, $[x] = \text{ME}_x$	p Preis des Produk- tes, $[p] = \text{GE}/\text{ME}_x$	$p = p(x)$	Preis-Absatz- Funktion
x Absatz eines Produktes, $[x] = \text{ME}_x$	E Erlös für die abge- setzte Produktmen- ge, $[E] = \text{GE}$	$E = E(x)$	Erlösfunktion
x Absatz eines Produktes, $[x] = \text{ME}_x$	G Gewinn für die abgesetzte Produkt- menge, $[G] = \text{GE}$	$G = G(x)$ $= E(x) - K(x)$	Gewinn- funktion
Y Haushaltseinkommen, $[Y] = \text{GE}$	K Ausgaben für Kon- sum, $[K] = \text{GE}$	$K = K(Y)$	Konsum- funktion

Output, d. h. der Verlauf der Kostenfunktion, ist neben der strengen Monotonie noch durch weitere Eigenschaften charakterisiert. Dabei hängen die Einzelheiten von den Annahmen ab, die der jeweiligen Betrachtung zugrunde liegen. Wird die Gültigkeit des klassischen Ertragsgesetzes unterstellt, so ist die Kostenfunktion für kleine Produktmengen konkav, für größere dagegen konvex. Auf der Basis der neoklassischen Produktionstheorie ist die Kostenfunktion dagegen durchgehend konvex (vgl. *Beispiel 1.19*).

1.3 Funktionen und ökonomisches Wachstum

Ökonomische Größen verändern sich in der Zeit. Statistische Jahrbücher erfassen diese Veränderungen in der Zeit für die Volkswirtschaft sowie ihre Bereiche und sind über hunderte von Seiten mit entsprechenden Zeitreihen gefüllt. Jedes Unternehmen führt seinerseits genau Buch über die zeitliche Entwicklung einer Reihe ökonomischer Kenngrößen, wie z. B. Fremd- und Eigenkapital, Umsatz, Gewinn, Kosten, Anlagevermögen und Abschreibungen.

Die Erfassung einer solchen Vielfalt von Daten dient nicht nur der einfachen Dokumentation. Ihre Hauptbestimmung liegt vielmehr darin, eine Grundlage für die Analyse und Prognose wirtschaftlicher Entwicklungen zu schaffen. So gilt es u. a., die zeitlichen Veränderungen – wir verwenden hierfür im Weiteren den Sammelbegriff „Wachstum“ – einzelner Kennzahlen näher zu charakterisieren und untereinander zu vergleichen. Dabei haben sich Funktionen als ein gutes Hilfsmittel bewährt.

Wir nennen hier zunächst drei klassische Typen ökonomischen Wachstums und deren Funktionen.

Lineares Wachstum einer Kennzahl y ist dadurch charakterisiert, dass die Zuwächse Δy in Zeitintervallen gleicher Länge immer gleich groß sind. Das führt mathematisch zu Polynomen 1. Ordnung

$$y = at + b, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (1.25)$$

Hier und im Weiteren bezeichnet t die veränderliche Zeit, und $[0, T]$ ist das Zeitintervall, für welches das Wachstum betrachtet wird. Die Parameter a und b sind gewisse Konstanten mit inhaltlicher Bedeutung: b gibt den Anfangswert der Kennzahl zum Zeitpunkt $t = 0$ an, a gibt den Zuwachs der Kennzahl y in einem Zeitintervall der Länge 1 an, d. h., es gilt $y(t) - y(t-1) = a$ für $t, t-1 \in [0, T]$. In der grafischen Darstellung führt lineares Wachstum immer zu einem Geradenabschnitt (vgl. *Bild 1.1*).

Exponentielles Wachstum einer Kennzahl y ist dadurch charakterisiert, dass y von Zeiteinheit zu Zeiteinheit immer um den gleichen Prozentsatz w – bezogen auf den jeweiligen Wert von y in der vorhergehenden Zeiteinheit – wächst:

$$\Delta y(t) = wy(t-1) \quad \text{oder} \quad y(t) = (1+w)y(t-1), \quad t \in [1, T]. \quad (1.26)$$

Das führt mathematisch auf Exponentialfunktionen der Form

$$y(t) = y_0(1+w)^t, \quad t \in [0, T], \quad (1.27)$$

(vgl. mit (1.6)). Hier gibt y_0 den **Anfangswert** der Kennzahl y zum Zeitpunkt $t = 0$ an. Er wird als bekannt vorausgesetzt. Der Parameter w wird allgemein als **Wachstumsrate** bezeichnet.

Ein typisches Feld für exponentielles Wachstum stellt die Entwicklung von Guthaben bei Zinseszins dar. Weiterhin wird exponentielles Wachstum in angenäherter Form für volkswirtschaftliche Kennzahlen wie z. B. Bruttosozialprodukt und Anlagevermögen beobachtet.

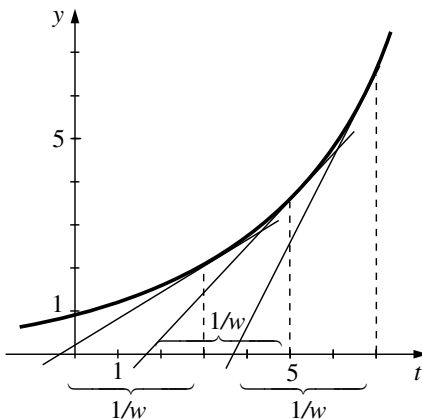


Bild 1.19

In volkswirtschaftlichen Modellen verwendet man anstelle von (1.27) häufig

$$y(t) = y_0 e^{wt}, \quad t \in [0, T]. \quad (1.28)$$

Ausgehend von dieser Darstellung kann die Wachstumsrate w grafisch interpretiert werden. Zeichnet man an einen beliebigen Punkt des Graphen der Exponentialfunktion (1.28) die Tangente und bringt diese mit der x -Achse zum Schnitt, so ist die Entfernung des Schnittpunktes vom Lotpunkt des Tangentialpunktes auf der x -Achse gleich $\frac{1}{w}$. Im *Bild 1.19* ist dieser Sachverhalt für $y(t) = 0,85e^{0,3t}$ dargestellt.

BEISPIEL

1.20 Zinseszins und exponentielles Wachstum

Für ein Guthaben von 20.000 € ist über einen Zeitraum von 10 Jahren Zinseszins mit jährlich 4,75 % Zinsen vereinbart. Dann wächst das Guthaben (vgl. (1.26)) nach einem Jahr auf 20.950 € an:

$$\Delta G(1) = 0,0475 \cdot 20.000 = 950 \quad \text{oder} \quad G(1) = 1,0475 \cdot 20.000 = 20.950.$$

Werden auf diese Weise sukzessiv die Guthaben für die Jahre 2 bis 10 berechnet, erhält man die Zeitreihe

t	0	1	2	3	4	5
$G(t)$	20.000	20.950	21.945,13	22.987,52	24.079,43	25.223,20
t	6	7	8	9	10	
$G(t)$	26.421,30	27.676,31	28.990,93	30.368,00	31.810,48	

Die Jahreswerte müssen nicht sukzessiv gemäß (1.26) berechnet werden. Will man sich nur über den einen oder anderen Jahreswert informieren, so ist für dessen Ermittlung (1.27) besser geeignet. Beispielsweise erhält man damit für $t = 7$ unmittelbar

$$G(7) = 20.000 \cdot 1,0475^7 = 20.000 \cdot 1,3838156 = 27.676,31. \quad \blacksquare$$

Sättigungsprozesse sind eine Erscheinungsform für **gebremstes Wachstum**. Ist y die Kennzahl eines Sättigungsprozesses, so kann ihre zeitliche Entwicklung durch zwei Merkmale charakterisiert sein:

$$\Delta y(t) \sim y(t-1), \quad (1.29)$$

$$\Delta y(t) \sim [C - y(t-1)]. \quad (1.30)$$

Die erste dieser beiden Proportionen beschreibt exponentielles und damit unbeschränktes Wachstum. Die zweite widerspiegelt einen bremsenden Einfluss, wenn man unterstellt, dass $0 < y(t) < C$ gilt. Der Parameter C ist hierbei der größtmögliche Wert oder Sättigungswert der Kennzahl y (vgl. *Beispiel 1.12*). Beide Proportionen lassen sich zu einer Entwicklungsgleichung zusammenfassen¹⁾:

$$\Delta y(t) = \alpha y(t-1)[C - y(t-1)], \quad 1 \leq t \leq T. \quad (1.31)$$

¹⁾ Eine derartige Gleichung wurde 1845 von dem belgischen Biologen J. VERHULST (1804-1849) bei der Untersuchung von Bakterienkolonien genutzt. In den letzten beiden Jahrzehnten spielte sie in modifizierter Form eine grundlegende Rolle bei der Analyse von Fraktalen und Chaos (s. [4], S. 77 f.).

Betrachtet man statt des Zeitsprungs 1 ZE auch beliebig kleine positive zeitliche Veränderungen Δt , so führt die sich dabei ergebende Entwicklungsgleichung auf **logistische Wachstumsfunktionen** mit der Darstellung

$$y(t) = \frac{C}{1 + ae^{-bt}}, \quad 0 \leq t \leq T, \text{ mit } a, b > 0. \quad (1.32)$$

Bild 1.13 zeigt einen Graphen derartiger Funktionen.

AUFGABEN

- 1.1** Bilden Sie zu der Kostenfunktion $K = K(x)$, $1 \leq x \leq 15$, mit $K(x) = 0,05x^3 - 0,9x^2 + 6x + 10$, die Durchschnittskostenfunktion $k = k(x)$!
- 1.2** Stellen Sie zu $K(x)$ und $k(x)$ aus Aufgabe 1.1 die Wertetabellen für $x = 1, 2, 3, \dots, 15$ auf!
- 1.3** Markieren Sie die Wertepaare $(x; K(x))$ sowie $(x; k(x))$ aus Aufgabe 1.2 in einem kartesischen Koordinatensystem; wählen Sie dabei die Maßstäbe auf den Achsen in angemessener Weise (vgl. *Beispiel 1.4*)! Skizzieren Sie anschließend die Graphen der Funktionen K und k !
- 1.4** Stellen Sie unter Verwendung eines Taschenrechners zu der Funktion $y = x^{0,85}$, $x > 0$, eine Wertetabelle für $x = 10, 20, 30, \dots, 100$ auf!
- 1.5** Berechnen Sie unter Verwendung eines Taschenrechners $\sqrt[10]{2}$!
- 1.6** Erstellen Sie die Graphen der 6 Exponentialfunktionen $y = a^x$, $-2 \leq x \leq 2$, für $a = \frac{1}{4}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, 2, \frac{5}{2}, 4$.
Empfehlung: Verwenden Sie dazu einen PC oder grafikfähigen Taschenrechner.
- 1.7** Erstellen Sie die Graphen der 6 Logarithmusfunktionen $y = \log_a x$ für $a = \frac{1}{4}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, 2, \frac{5}{2}, 4$.
Wählen Sie dabei die Definitionsbereiche selbst, und vergleichen Sie die erhaltenen Graphen mit denen von Aufgabe 1.6!
- 1.8** Erstellen Sie den Graphen der logistischen Wachstumsfunktion $y = \frac{100}{1 + 9e^{-0,3t}}$, $0 \leq t \leq 15$!
- 1.9** Stellen Sie zu der in Aufgabe 1.8 gegebenen logistischen Wachstumsfunktion für $t = 1, 2, 3, \dots, 15$ die Wertetabelle der Zuwächse $\Delta y(t) = y(t) - y(t-1)$ auf! Prüfen Sie, in welchem Zeitabschnitt diese Zuwächse $\Delta y(t)$ sinken und in welchem sie wachsen!
- 1.10** Stellen Sie zu der Kostenfunktion $K(x) = 0,05x^3 - 0,9x^2 + 6x + 10$, $1 \leq x \leq 15$, die Wertetabelle für deren Zuwächse $\Delta K(x) = K(x) - K(x-1)$ mit $x = 1, 2, 3, \dots, 15$ auf (vgl. Aufgaben 1.1 und 1.2)! Prüfen Sie, in welchem Bereich diese Zuwächse $\Delta K(x)$ sinken und in welchem Bereich sie wachsen!

- 1.11** Die Gleichung $p_A x + 10.000y/(50 + 4y) - E_0 = 0$ mit $p_A, E_0 > 0$ ist für $x, y > 0$ näher zu untersuchen.
- Lösen Sie die gegebene Gleichung nach y auf!
 - Zeigen Sie – ausgehend von dem unter a) erhaltenen Resultat –, dass durch die gegebene Gleichung jedem x mit $0 < x < E_0/p_A$ genau ein y zugeordnet wird!
- 1.12** Zeigen Sie, dass die Normalparabel $f(x) = x^2$, $-\infty < x < +\infty$, streng konvex im Sinne von (1.17) ist!
- 1.13** Zeigen Sie, dass jede Exponentialfunktion $f(x) = a^x$, $x \in \mathbf{R}$, für $a > 1$ sowohl streng monoton wachsend als auch streng konvex ist.
- 1.14** Gegeben ist die Funktion $f: y = 0,2(x - 2)^2 - 2$, $a \leq x \leq 10$. Prüfen Sie, ob es Werte $a \geq 1$ derart gibt, dass für f die Umkehrfunktion f^{-1} existiert und ermitteln Sie diese ggf.!
- 1.15** Lösen Sie die Gleichungen $e^{4x-10} = 7$ sowie $\lg(x^2 + 4) = 1,30103!$
- Hinweis:* Denken Sie daran, dass Exponential- und Logarithmusfunktionen im Verhältnis von Umkehrfunktionen zueinander stehen (siehe (1.24)).
- 1.16** Laut Einkommensteuergesetz § 32a (Stand 2020) ist die tarifliche Einkommensteuer S wie folgt zu ermitteln:

$$S = \begin{cases} 0, & E \leq 9.408 \\ (972,87 \cdot y + 1.400) \cdot y, & 9.409 \leq E \leq 14.532 \\ (212,02 \cdot z + 2.397) \cdot z + 972,79, & 14.533 \leq E \leq 57.051 \\ 0,42 \cdot E - 8.963,74, & 57.052 \leq E \leq 270.500 \\ 0,45 \cdot E - 17.078,74, & 270.501 \leq E \end{cases}$$

wobei E das auf einen vollen Euro abgerundete zu versteuernde Einkommen bedeutet und $y = (E - 9.408)10^{-4}$ sowie $z = (E - 14.532)10^{-4}$ zu setzen ist.

Der sich ergebende Steuerbetrag ist auf den nächsten vollen Euro-Betrag abzurunden (§ 32a, (1)).

- Berechnen Sie S für $E_1 = 7.900$, $E_2 = 12.900$, $E_3 = 38.000$ sowie $E_4 = 56.900$.
- Ermitteln Sie für die Bereiche

$$9.409 \leq E \leq 14.532 \text{ und } 14.533 \leq E \leq 57.051$$

die Funktion S in Abhängigkeit von E .

- 1.17** Eine Autovermietung bietet für einen PKW über das Wochenende zwei Tarife an:
- Grundmiete 100 €, bis 100 km 1 €/km, für jeden weiteren gefahrenen Kilometer über 100 km bis 200 km 0,80 €/km, für jeden weiteren Kilometer über 200 km bis 400 km 0,60 €/km, jeder weitere Kilometer kostet 0,50 €.
 - Grundmiete 150 €, bis 200 km 0,70 €/km, für jeden weiteren gefahrenen Kilometer über 200 km bis 500 km 0,50 €/km, jeder weitere Kilometer kostet 0,40 €.

- a) Geben Sie für beide Tarife die Kostenfunktionen an, und stellen Sie diese grafisch dar!
 - b) Ermitteln Sie die km-Bereiche und die Tarife, die für den Mieter am günstigsten sind!
- 1.18** Für ein Guthaben von 125.000 € werden einschließlich der anfallenden Zinsen über einen Zeitraum von 20 Jahren jährlich 4,9 % Zinsen gezahlt.
- a) Auf welchen Betrag ist das Guthaben nach Ablauf der 20 Jahre gewachsen?
 - b) Stellen Sie die Zeitreihe des Guthabens für die Jahre 16 bis 20 auf.

2

Differenzialrechnung für Funktionen einer reellen Variablen in ökonomischen Problemen

2.1 Einführung

Der Grenznutzen in einem Punkt ist nichts anderes als die Steigung der Tangente in diesem Punkt. Der moderne Ökonom spricht beim Grenznutzen vom Nutzen einer zusätzlichen „infinitesimal kleinen“ Einheit. GOSSEN (1810–1858) sprach anschaulich vom Nutzen „eines neu hinzukommenden Atoms“. Vgl. [23], S. 193.

Der Grenznutzen war der Ausgangspunkt für die „marginalistische Revolution“ (vgl. [23], S. 177), mit der im 19. Jahrhundert eine neue Epoche in der bürgerlichen Ökonomie eingeleitet worden ist. Die von JEVONS (1835–1882), MENGER (1840–1921) und WALRAS (1834–1910) geschaffene Marginalanalyse bildet eine wichtige Denkweise der heutigen Wirtschaftstheorie. Im Zentrum der Marginalanalyse steht die Frage nach der Reaktion einer ökonomischen Zielgröße (z. B. der Kosten oder des Gewinns) bei einer „infinitesimal kleinen“ Änderung der Einflussgröße (z. B. der Produktionsmenge oder der Absatzmenge).

Die Fragestellung der Marginalanalyse ist vergleichbar mit der Problematik, die NEWTON (1642–1727) bei der Entwicklung seiner Theorie der Planetenbewegung antraf. Er musste die Frage nach der Reaktion des zurückgelegten Weges eines sich bewegenden Körpers bei einer „infinitesimal kleinen“ Änderung der Zeit klären.

Die Verwandtschaft der Untersuchungsziele von Marginalanalyse und Planetenbewegung führte trotz grundlegender Unterschiede der fachspezifischen Inhalte dazu, dass in beiden Bereichen mit ähnlichen Begriffen gearbeitet wurde. So charakterisierte NEWTON die momentane Vergrößerung des zurückgelegten Weges durch die Geschwindigkeit als Fluxion (vgl. [21], S. 203/205), was dem GOSSENSchen „neu hinzukommenden Atom“ recht nahe kommt. In beiden Fällen wird versucht, Veränderung durch infinitesimale Größen zu messen.

Die von NEWTON zum Verständnis der Planetenbewegung entwickelte Infinitesimalrechnung enthält bereits die wesentlichen Grundbegriffe der heutigen Differenzial- und Integralrechnung wie Grenzwert, Stetigkeit, Ableitung, Differenzial und Integral. Am Rande sei vermerkt, dass die gegenseitige Bedingtheit von Infinitesimalrechnung einerseits und Bedürfnis zum Verständnis der Planetenbewegung – z. B. für die englische Seefahrt – andererseits NEWTON in seinem Motto „Die Grundlage jeder Theorie ist die soziale Praxis“ (zitiert nach [7], S. 88) auf natürliche Weise bestärkte. Für die Differenzial- und insbesondere für die Infinitesimalrechnung können drei Entwicklungsstapen benannt werden. Die erste beginnt im Zeitraum 1665–1670 mit NEWTONS Grundlagen der Infinitesimalrechnung und erstreckt sich über mehr als eineinhalb Jahrhunderte(!). In diesem Zeitraum wird sie einerseits erfolgreich ausgebaut und angewendet. Andererseits erfährt sie ständige Kritik. Letztere beruht auf der Zweideutigkeit infinitesimaler Größen. Man fasste sie in einer Situation als unendlich kleine Größen, die verschieden von null sind, auf. In einer anderen Situation setzte man sie dagegen einfach null. Das rief bei Zeitgenossen Unbehagen, Unverständnis und teilweise Ablehnung

hervor. LEIBNIZ (1646–1716) – der zweite geistige Vater der Differenzialrechnung – hat diese Problematik wohl erkannt. Er behauptete nicht, dass infinitesimale Größen existieren, sondern vertrat den Standpunkt, dass man, ohne in einen Irrtum zu verfallen, so argumentieren könne, als ob sie existierten. Die zweite Etappe beginnt etwa 1820 mit den Ergebnissen des französischen Mathematikers CAUCHY (1789–1857) und wird unter Führung des deutschen Analytikers WEIERSTRASS (1815–1897) zu einem gewissen Höhepunkt gebracht. Das erklärte Ziel dieser Etappe war erreicht: Die infinitesimalen Größen waren aus der Differenzial- und Integralrechnung vertrieben. Der Preis hierfür war die ε - δ -Definition des Grenzwertes (vgl. [7], S. 255), die bis auf den heutigen Tag viele Nichtmathematiker verschreckt, von ihnen gefürchtet und verflucht wird. Nicht zuletzt deshalb haben Physiker und Ingenieure nie aufgehört, sich der infinitesimalen Größen zu bedienen, wobei sie mit ihnen wie mit endlichen Zahlen rechnen und sie ggf. null setzen oder gegen null konvergieren lassen. Die Ökonomen haben diese Denkweise übernommen. In der dritten Etappe wurden die infinitesimalen Größen gewissermaßen rehabilitiert. Sie begann etwa Mitte des 20. Jahrhunderts und hängt wesentlich mit den Arbeiten von ROBINSON (1918–1974) zusammen. Er konstruierte ein System, das infinitesimale Größen enthält, aber das Paradoxon ihrer Zweideutigkeit vermeidet.

Der dargelegte gedrängte historische Abriss zur Differenzialrechnung ist als kleiner Trost für den Leser gedacht. Wenn er heute als Student in wenigen Wochen eines Semesters mit den Grundlagen der Differenzialrechnung wiederholend vertraut gemacht wird, so hat er gewissermaßen die Quintessenz einer jahrhundertelangen, von Widersprüchen getragenen Entwicklung zu durchschreiten. Unsere Hilfe dabei sehen wir darin, die mathematischen Grundlagen auf die für den Studenten der Wirtschaftswissenschaften unbedingt notwendigen Begriffe zu beschränken und diese selbst möglichst verständlich sowie im Zusammenhang mit ökonomisch-inhaltlichen Sachverhalten zu formulieren. Eine solche Vorgehensweise impliziert, dass die Darlegung nicht immer den letzten Ansprüchen der Mathematik nachkommt. Dennoch ist unser Bestreben auf exakte Begriffsbildungen gerichtet.

2.2 Mathematische Grundlagen

Zu den Grundbegriffen der Differenzialrechnung gehören Ableitung und Differenzial. Sie basieren auf dem Grenzwert. Mit ihm hängt die Stetigkeit von Funktionen zusammen.

2.2.1 Grenzwert

CAUCHY hat sich bleibende Verdienste bei der strengen Begründung der Differenzialrechnung erworben. Den Grenzwertbegriff behandelt er mit besonderer Sorgfalt, weil er bei ihm zur Grundlage wird. Als Referenz an seine Leistung halten wir uns an die von ihm gegebene Definition (zitiert nach [21], S. 218):

Wenn sich die Werte, die man ein und derselben Variablen nacheinander gibt, unbeschränkt einem festen Wert nähern, sodass die Differenz (zwischen der Folge der Variablenwerte und dem festen Wert, G. Z.) beliebig klein wird, heißt dieser letztere **Grenzwert** der anderen Werte.

Ist für eine Folge von Variablenwerten der Sachverhalt des Grenzwertes erfüllt, so sagt man, die Folge **konvergiert** oder **strebt** gegen den Grenzwert.

BEISPIEL

2.1 Eine beliebig fixierte Zahl a kann Grenzwert jeweils einer Folge von Werten der Variablen x sein.

Tatsächlich, man kann der Variablen x z.B. die Werte $x_n = a + \frac{1}{n}$ erteilen, wobei n nacheinander die Werte $1, 2, 3, \dots$ durchläuft. Dann ergibt sich $x_n - a = \frac{1}{n}$, d. h., die Differenz zwischen den Variablenwerten und a wird mit wachsendem n beliebig klein. Werden speziell die Werte $x_n = \frac{1}{n}$ betrachtet, so konvergiert diese Folge gegen den Grenzwert null. ■

Im Weiteren werden wir – wie üblich – den schwerfälligen Begriff „Folge von Variablenwerten“ durch „Zahlenfolge“ oder einfach kurz durch „**Folge**“ ersetzen. Für Folgen werden die Symbole $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ oder $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ usw. benutzt. Dann wird die Konvergenz einer Zahlenfolge $\{x_n\}$ gegen den Grenzwert a durch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \quad (\text{„Limes } x_n \text{ für } n \text{ gegen unendlich gleich } a\text{“}) \quad \text{oder kurz} \quad (2.1a)$$

$$x_n \rightarrow a \quad (\text{„}x_n \text{ strebt bzw. konvergiert gegen } a \text{ für } n \text{ gegen unendlich“}) \quad (2.1b)$$

ausgedrückt. Eine nicht konvergente Folge heißt **divergent**; es gibt verschiedene Typen von Divergenz.

Ist der Grenzwert einer Folge null, so spricht man von einer Nullfolge. Als Beispiele für Nullfolgen seien genannt $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = q^n$, $-1 < q < 1$, für $n = 1, 2, 3, \dots$

Die CAUCHYSche Definition unterstellt als Grenzwert eine endliche Zahl (einen „festen Wert“). Diese Voraussetzung wird von uns beibehalten. Allerdings kann der Grenzwertbegriff auch auf $+\infty$ und $-\infty$ ausgedehnt werden. Das gilt jedoch nicht für den Konvergenzbegriff. So ist es beispielsweise im Sinne der „unbeschränkten Annäherung“ natürlich, für die Zahlenfolge $c_n = q^n$, $n = 1, 2, 3, \dots$, bei $q > 1$ vom Grenzwert $+\infty$ zu sprechen.

Konvergente Folgen besitzen eine Reihe von Eigenschaften. Die wichtigsten werden hier zusammengestellt. Als Erstes nennen wir:

Jede konvergente Zahlenfolge $\{x_n\}$ ist beschränkt, d. h., es existiert eine Konstante $C < +\infty$ derart, dass $|x_n| \leq C$ für alle $n = 1, 2, \dots$ gilt.

Will man diese Aussage beweisen, so bringt man den Grenzwert a der konvergenten Folge ins Spiel und geht wie folgt vor.

$$|x_n| = |x_n - a + a| = |(x_n - a) + a| \leq |x_n - a| + |a|.$$

Wegen der Konvergenz $x_n \rightarrow a$ müssen die Differenzen $x_n - a$ „beliebig klein“ werden. Es gibt daher speziell einen Wert N_1 , sodass $|x_n - a| < 1$ für alle $n = N_1, N_1 + 1, N_1 + 2, \dots$ gilt. Damit haben wir bereits $|x_n| \leq 1 + |a|$ für alle Werte x_n der Folge mit Ausnahme der ersten N_1 Werte x_1, x_2, \dots, x_{N_1} . Bezeichnet man nun mit C den größten der endlich vielen Werte $|x_1|, |x_2|, \dots, |x_{N_1}|$ sowie $1 + |a|$, so ergibt sich die Beschränktheitsrelation $|x_n| \leq C$ für alle $n = 1, 2, \dots$

Von grundlegender Bedeutung ist die Tatsache, dass mit konvergenten Folgen so wie mit gewöhnlichen Zahlen gerechnet werden kann, d. h., man kann sie addieren, subtrahieren, multiplizieren und dividieren. Dabei werden die jeweiligen Rechenoperationen für die Folgen einfach auf deren Grenzwerte übertragen.

Es seien $\{a_n\}$ bzw. $\{b_n\}$ konvergente Folgen mit den Grenzwerten a bzw. b , d. h., es gelte $a_n \rightarrow a$ bzw. $b_n \rightarrow b$. Dann sind für beliebig fixiertes $\alpha \in \mathbf{R}$ auch $\{\alpha a_n\}$ sowie $\{a_n b_n\}$ konvergente Folgen, und es gelten die Relationen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha a_n = \alpha a \quad (2.2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b \quad (2.3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = ab. \quad (2.4)$$

Gilt außerdem $b_n \neq 0$ für alle $n = 1, 2, \dots$ sowie $b \neq 0$, dann ist auch $\{a_n/b_n\}$ eine konvergente Folge, und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}. \quad (2.5)$$

BEISPIELE

- 2.2** $\{a_n\}$ und $\{b_n\}$ seien zwei konvergente Zahlenfolgen mit $a_n \rightarrow 7$ und $b_n \rightarrow 3$. Es ist zu zeigen, dass die Zahlenfolge $\{c_n\}$ mit $c_n = 2a_n - 4b_n$ gegen den Grenzwert 2 konvergiert.

Lösung: Tatsächlich, zunächst liefert (2.3) die Relation $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 2a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} 4b_n$. Sie kann unter Verwendung von (2.2) fortgesetzt werden zu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - 4 \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 2 \cdot 7 - 4 \cdot 3 = 2.$$

- 2.3** Die Folge $\{a_n\}$ mit $a_n = 5 \cdot \frac{2+3n}{2n} + \frac{1}{2}(3-q^n)$, $n = 1, 2, \dots$, $0 < q < 1$, ist auf Konvergenz zu untersuchen, und ggf. ist ihr Grenzwert zu ermitteln.

Lösung: Zur Nutzung der Arithmetik konvergenter Zahlenfolgen empfiehlt es sich im vorliegenden Falle, $\{a_n\}$ als Linearkombination zweier Folgen, nämlich $a_n = 5b_n + \frac{1}{2}c_n$ mit $b_n = (2+3n)/2n$ und $c_n = 3 - q^n$, darzustellen und zunächst die Hilfsfolgen $\{b_n\}$ und $\{c_n\}$ auf Konvergenz und Grenzwert zu untersuchen. Es ergibt sich $b_n = \frac{1}{n} + \frac{3}{2}$, sodass $b_n \rightarrow \frac{3}{2}$, und $c_n = 3 - q^n \rightarrow 3$ wegen $0 < q < 1$. Somit ist auch die Ausgangsfolge $\{a_n\}$ konvergent, und für ihren Grenzwert erhält man $a_n \rightarrow 5 \cdot \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cdot 3 = 9$. ■

Die Vorgehensweise von *Beispiel 2.3* ist bei der Ermittlung von Grenzwerten in vielen Fällen hilfreich (vgl. Aufgaben 2.2-2.4).

Die Eigenschaften (2.2) und (2.3) haben weitreichende Auswirkungen für die gesamte Differenzial- und Integralrechnung. In ihnen drückt sich zusammengefasst die sogenannte **Linea-**

rität der Konvergenz aus. An entsprechender Stelle werden wir darauf zurückkommen. Im gegebenen Falle besagt sie:

Sind $\{a_n\}$ bzw. $\{b_n\}$ zwei konvergente Zahlenfolgen mit den Grenzwerten a bzw. b , so ist auch jede ihrer **Linearkombinationen** $c_n = \alpha a_n + \beta b_n$, α und β – beliebig fixierte reelle Zahlen, konvergent, und ihr Grenzwert ist gleich der entsprechenden Linearkombination der einzelnen Grenzwerte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \beta \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \alpha a + \beta b. \quad (2.6)$$

Linearität ist nicht auf Konvergenz und mit ihr zusammenhängenden Erscheinungen beschränkt. Sie stellt eine umfassendere Kategorie dar. In diesem Buch treffen wir sie ausführlich in den *Kapiteln 5* und *6* wieder. Man denke aber auch an Begriffe wie „lineare Kosten“, „lineares Wachstum“ oder „lineares Modell“. Allgemein kann man sagen, dass zwischen linearen und nichtlinearen Erscheinungen tiefliegende Unterschiede bestehen.

Die bisher für Folgen betrachteten Begriffe „Grenzwert“ und „Konvergenz“ können auf Funktionen $y = f(x)$, $x \in D(f)$, übertragen werden. Wählt man nämlich eine Folge $\{x_n\}$ mit $x_n \in D(f)$, so kann die Folge der Funktionswerte $\{y_n\}$ mit $y_n = f(x_n)$ gebildet werden. Für sie ergeben sich dann ebenfalls die Fragen nach Konvergenz und Grenzwert sowie nach Eigenschaften. Eine Grundvoraussetzung für die Konvergenz von $\{y_n\}$ mit $y_n = f(x_n)$ besteht sicher darin, dass $\{x_n\}$ selbst konvergiert. Aber gerade damit hängt eine neue Problematik zusammen. Wählt man nämlich ein $a \in D(f)$, so existieren dazu verschiedene Folgen $\{x_n\}$, $x_n \in D(f)$ mit $x_n \rightarrow a$. Dabei können die entsprechenden Folgen $\{f(x_n)\}$ ganz unterschiedliches Verhalten zeigen: Sie können konvergieren oder nicht konvergieren, und im Falle ihrer Konvergenz können sie durchaus verschiedene Grenzwerte besitzen.

BEISPIEL

2.4 Problematik der Konvergenz von Funktionen

Wir betrachten die in *Bild 2.1* dargestellte Funktion $y = f(x)$.

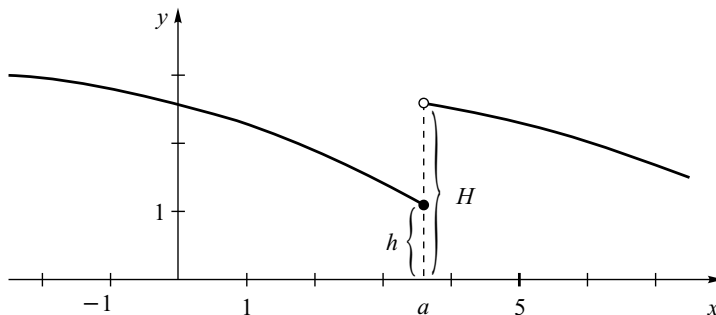


Bild 2.1 Grenzwerte bei einer Funktion mit Sprungstelle

Wählt man für f die drei gegen a konvergierenden Folgen $x_n = a - \frac{1}{n}$, $\tilde{x}_n = a + \frac{1}{n}$ sowie $\hat{x}_n = a + (-1)^n/n$, so zeigen die entsprechenden Folgen der Funktionswerte

ganz unterschiedliches Verhalten. Weil alle $x_n < a$, dagegen alle $\tilde{x}_n > a$, so ist aus *Bild 2.1* unmittelbar ersichtlich, dass $f(x_n) \rightarrow h$, dagegen $f(\tilde{x}_n) \rightarrow H$ gilt. Beide Folgen von Funktionswerten konvergieren, ihre Grenzwerte sind jedoch verschieden ($H \neq h$). Demgegenüber konvergiert die Folge $\{f(\hat{x}_n)\}$ nicht einmal. Tatsächlich, die Werte \hat{x}_n alternieren um a : $x_1 = a - 1 < a$, $x_2 = a + \frac{1}{2} > a$, $x_3 = a - \frac{1}{3} < a$, $x_4 = a + \frac{1}{4} > a$ usw. Daher nähern sich die Funktionswerte $f(\hat{x}_n)$ für ungerades n beliebig an h an, während sich $f(\hat{x}_n)$ für gerades n beliebig an H annähert, sodass $\{f(\hat{x}_n)\}$ insgesamt keinen Grenzwert besitzt. Mit den Ergebnissen wird bestätigt, was bereits die einfache Anschauung vermittelt: Es ist wenig sinnvoll, für die in *Bild 2.1* dargestellte Funktion von einem Grenzwert bei $x = a$ auszugehen. ■

Situationen, wie sie im *Beispiel 2.4* für $x = a$ bestehen, schließt man zunächst aus und definiert:

Wenn für *jede* Folge $\{x_n\}$, $x_n \in D(f)$, mit $x_n \rightarrow a$ die entsprechende Folge von Funktionswerten $\{f(x_n)\}$ gegen den gleichen Wert A konvergiert, so wird A **Grenzwert der Funktion** $y = f(x)$, $x \in D(f)$, an der Stelle $x = a$ genannt, und man schreibt

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A. \tag{2.7}$$

BEISPIELE Grenzwerte von Funktionen

2.5 Für die Funktion $Z(x) = 4x^2 + 5x - 1$, $0 \leq x \leq 10$, ist zu prüfen, ob sie an der Stelle $x = 3$ einen Grenzwert besitzt; ggf. ist er zu berechnen.

Lösung: Prüfung und Berechnung erfolgen auf der Grundlage der Gesetze (2.2) bis (2.4) gleichzeitig. Dazu wird eine *beliebige* Folge $\{x_n\}$ mit $x_n \in D(Z)$ und $x_n \rightarrow 3$ gewählt. Für die zugehörige Folge von Funktionswerten $\{Z(x_n)\}$ ergibt sich (vgl. (2.2) sowie (2.3) und man beachte, dass für jede Zahlenfolge $\{c_n\}$ mit $c_n = c$ für $n = 1, 2, 3, \dots$ immer $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = c$ gilt)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Z(x_n) = 4 \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^2 + 5 \lim_{n \rightarrow \infty} x_n - 1 = 4 \lim_{n \rightarrow \infty} x_n x_n + 5 \cdot 3 - 1.$$

Unter Berücksichtigung von (2.4) folgt schließlich

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Z(x_n) = 4 \cdot 3 \cdot 3 + 5 \cdot 3 - 1 = 50.$$

Somit hat $Z(x)$ an der Stelle $x = 3$ einen Grenzwert: $\lim_{x \rightarrow 3} Z(x) = 50$.

2.6 Für die Funktion $Q(x) = (4x^2 + 5x - 1)/(x^2 + 1)$, $0 \leq x \leq 10$, ist zu prüfen, ob sie an der Stelle $x = 3$ einen Grenzwert besitzt; ggf. ist er zu berechnen.

Lösung: Wir benutzen die Darstellung $Q(x) = Z(x)/N(x)$ mit $Z(x) = 4x^2 + 5x - 1$ und $N(x) = x^2 + 1$. Wird nun wieder eine *beliebige* Folge $\{x_n\}$ mit $x_n \in D(Q)$ und $x_n \rightarrow 3$ gewählt, so wurde in *Beispiel 2.5* bereits gezeigt, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} Z(x_n) = 50$. In völlig analoger Weise erhält man $\lim_{n \rightarrow \infty} N(x_n) = 10$. Somit folgt auf der Basis von (2.5)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q(x_n) = \frac{50}{10} = 5. \text{ Da das erhaltene Resultat für beliebige Folgen } \{x_n\} \text{ mit } x_n \rightarrow 3 \text{ gilt, besitzt } Q(x) \text{ an der Stelle } x = 3 \text{ den Grenzwert } 5, \text{ d. h. } \lim_{x \rightarrow 3} Q(x) = 5. \quad \blacksquare$$

Gemäß der obigen Definition ist der Grenzwert von Funktionen aufs Engste mit dem Grenzwert von Folgen verknüpft. Daher übertragen sich die Eigenschaften (2.2) bis (2.6) auf Funktionen.

Es seien f und g zwei Funktionen mit dem gleichen Definitionsbereich D , die in $x = a \in D$ einen Grenzwert besitzen, d. h., es gelte $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A_f$ und $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = A_g$. Dann besitzen für beliebig fixiertes $\alpha \in \mathbf{R}$ auch die Funktionen αf , $f \pm g$ sowie f/g einen Grenzwert in $x = a$, und es gelten die Relationen

$$\lim_{x \rightarrow a} \alpha f(x) = \alpha A_f \quad (2.8)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = A_f \pm A_g \quad (2.9)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = A_f A_g. \quad (2.10)$$

Gilt außerdem $A_g \neq 0$, dann hat auch der Quotient $f(x)/g(x)$ in $x = a$ einen Grenzwert, und es gilt

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A_f}{A_g}. \quad (2.11)$$

Die Eigenschaft der Linearität der Konvergenz lässt sich für Funktionen wie folgt formulieren: Sind f und g zwei Funktionen mit dem gleichen Definitionsbereich D , die in $x = a \in D$ einen Grenzwert besitzen, d. h., für die $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A_f$ und $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = A_g$ erfüllt ist, dann hat für beliebig fixierte reelle Zahlen α und β auch $\alpha f + \beta g$ in $x = a$ einen Grenzwert, und es gilt

$$\lim_{x \rightarrow a} [\alpha f(x) + \beta g(x)] = \alpha \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \beta \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \alpha A_f + \beta A_g. \quad (2.12)$$

Man sagt:

Der Grenzwert einer **Linearkombination von Funktionen** $\alpha f(x) + \beta g(x)$ ist gleich der Linearkombination ihrer Grenzwerte $\alpha A_f + \beta A_g$.

In einer Reihe von Zusammenhängen spielen sogenannte einseitige Grenzwerte für Funktionen eine Rolle. Das ist z. B. der Fall, wenn eine Funktion in einem abgeschlossenen Intervall $a \leq x \leq b$ definiert ist. Dann kann man nach den Grenzwerten der Funktion in den Randpunkten $x = a$ bzw. $x = b$ fragen. Aber auch Funktionen, wie sie im *Beispiel 2.4* betrachtet wurden, legen die Frage nach einseitigen Grenzwerten nahe. Deshalb wird definiert:

Wenn für *jede* Folge $\{x_n\}$, $x_n \in D(f)$, mit $x_n \rightarrow a$ und $x_n > a$ (bzw. $x_n < a$) die entsprechende Folge von Funktionswerten $\{f(x_n)\}$ gegen den gleichen Grenzwert A^+ (bzw. A^-) konvergiert, so wird A^+ **rechtsseitiger** (bzw. A^- **linksseitiger**) **Grenzwert der Funktion** $y = f(x)$, $x \in D(f)$, an der Stelle $x = a$ genannt, und man schreibt

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = A^+ \quad (\text{bzw. } \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = A^-). \quad (2.13)$$

Besitzt eine Funktion f an einer Stelle $x = a \in D(f)$ sowohl den rechtsseitigen als auch den linksseitigen Grenzwert und sind diese gleich, dann existiert auch ihr Grenzwert an dieser Stelle, und er ist gleich dem gemeinsamen Wert der beiden einseitigen Grenzwerte, d. h., aus

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = A \quad \text{folgt} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A. \quad (2.14)$$

Ist $a \in D(f)$ kein Randpunkt von $D(f)$, so gilt auch die Umkehrung von (2.14), d. h., aus

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \quad \text{folgt} \quad \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x). \quad (2.15)$$

Es ist jedoch zu beachten, dass die Existenz beider einseitigen Grenzwerte $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ und $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$ noch nicht hinreichend dafür ist, dass auch der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existiert. Davon zeugt das obige *Beispiel 2.4*.

Für das in 1.1.2 eingeführte Reservoir von Funktionen gilt die erfreuliche Aussage:

Jede elementare Funktion besitzt für jede Stelle ihres Definitionsbereiches einen Grenzwert (in Randpunkten handelt es sich dabei um den entsprechenden einseitigen Grenzwert), und dieser ist gleich dem Funktionswert an der betrachteten Stelle.

Dieses Ergebnis ist das Anfangsglied einer Kette von Eigenschaften, die die elementaren Funktionen als Gesamtheit besitzen. In jedem der folgenden Teilabschnitte von *Abschnitt 2.2* werden weitere Merkmale der elementaren Funktionen aufgezeigt.

BEISPIEL

2.7 Grenzwerte einer elementaren Funktion

Von der Funktion $f(x) = \sqrt{(x-1)(x^2+1)}$, $x \geq 1$, ist für ein beliebig fixiertes $a \geq 1$ der Grenzwert zu ermitteln.

Lösung: In *Beispiel 1.11* wurde gezeigt, dass f eine elementare Funktion ist. Daher gilt gemäß der obigen Aussage:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) = \sqrt{(a-1)(a^2+1)} \quad \text{für } a > 1,$$

und speziell für den Randpunkt $a = 1$ des Definitionsbereiches ergibt sich

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = f(1) = 0. \quad \blacksquare$$

AUFGABEN

2.1 Gegeben sind zwei konvergente Zahlenfolgen $\{a_n\}$ und $\{b_n\}$ mit $a_n \rightarrow 4$ und $b_n \rightarrow 5$ für $n \rightarrow \infty$, wobei $b_n \neq 0$ für alle $n = 1, 2, \dots$ gilt. Für die nachfolgend angegebenen Folgen ist der Grenzwert zu ermitteln:

$$c_n = 6a_n + 2b_n, \quad d_n = 7a_n - 3b_n, \quad p_n = 3(a_n - 2)b_n, \quad q_n = \frac{5a_n - 8b_n}{2b_n}!$$

- 2.2 Die Folge $\{a_n\}$ mit $a_n = 7 \left(3 - \frac{7+6n}{2n} \right)$ ist auf Konvergenz zu untersuchen, und ggf. ist ihr Grenzwert zu ermitteln!
- 2.3 Die Folge $\{a_n\}$ mit $a_n = 3 \frac{4+5n}{2n} \left(7q^n - \frac{2n}{n+1} \right)$ ist für $0 < q < 1$ auf Konvergenz zu untersuchen, und ggf. ist der Grenzwert zu ermitteln!
- 2.4 Gegeben ist die konvergente Zahlenfolge $\{a_n\}$ mit $a_n \rightarrow 2$ für $n \rightarrow \infty$. Es ist der Grenzwert für $\{y_n\}$ mit $y_n = (a_n + 3)^2 - 12$ zu ermitteln!
- 2.5 Von den Funktionen f und g sind die Grenzwerte $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 5$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 7$ bekannt. Für die nachfolgend genannten Funktionen sind jeweils die Grenzwerte an der Stelle $x = a$ zu ermitteln:
 a) $4f(x) - 3g(x)$, b) $[f(x) - 2]^2 [(g(x))^2 + 1]$, c) $[f(x) - 2]^2 / [(g(x))^2 + 1]$!
- 2.6 Für die Funktion $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 15}$, $x \in \mathbf{R}$, ist an den Stellen $x_1 = 4$, $x_2 = 5$, $x_3 = 6$, $x_4 = 7$ jeweils der Grenzwert zu ermitteln.

2.2.2 Stetigkeit

In der Realität sind sowohl kontinuierliche als auch diskontinuierliche Erscheinungen zu beobachten. So können sich die Zahl der Beschäftigten oder die Zahl der Maschinen eines Unternehmens nur diskontinuierlich ändern. Dagegen können Durchschnittsalter der Beschäftigten oder Anlagevermögen des Unternehmens als kontinuierliche Größen aufgefasst werden. Beschreibt man Parameter bzw. Kenngrößen von Prozessen, die kontinuierlich ablaufen, durch Funktionen, so führt das zu stetigen Funktionen. Stetigkeit wird also hier als Eigenschaft von Funktionen betrachtet.

Hat die Funktion $y = f(x)$, $x \in D(f)$, an der Stelle $x = a \in D(f)$ einen Grenzwert, und ist dieser gleich dem Funktionswert $f(a)$, d. h. gilt

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \quad \text{für } a \in D(f), \quad (2.16)$$

dann heißt f **stetig an der Stelle** $x = a \in D(f)$.

Gilt darüber hinaus (2.16) für alle $a \in I \subseteq D(f)$, dann heißt f **stetig im Intervall** $I \in D(f)$.

Ist $D(f)$ selbst ein Intervall (bzw. enthält $D(f)$ keine isolierten Punkte), und gilt (2.16) für alle $a \in D(f)$, wird f **stetig** genannt.

Diese Stetigkeitsdefinition erfasst im Falle von abgeschlossenen Intervallen $a \leq x \leq b$ als Definitionsbereich auch die Randpunkte $x = a$ und $x = b$. Dazu ist eine Erläuterung erforderlich. Der Grenzwert im jeweiligen Randpunkt versteht sich natürlich nur als entsprechender einseitiger Grenzwert, sodass (2.16) die speziellen Formen

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a) \quad \text{bzw.} \quad \lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = f(b) \quad (2.16a)$$

annimmt. Daher nennt man eine Funktion $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, die (2.16a) erfüllt, für $x = a$ **rechtsseitig** und für $x = b$ **linksseitig stetig**.

BEISPIEL**2.8** Stetigkeit einer Funktion

Es ist zu zeigen, dass die Funktion $f(x) = \sqrt{(x-1)(x^2+1)}$, $x \geq 1$, stetig ist!

Lösung: Die Behauptung folgt unmittelbar aus den Ergebnissen von *Beispiel 2.7*. Dort wurde gezeigt, dass für jedes $a > 1$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \quad \text{und außerdem} \quad \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = f(1) = 0$$

gilt. Das bedeutet aber, dass die gegebene Funktion stetig ist. Für $x = 1$ erweist sie sich speziell als rechtsseitig stetig. ■

Als unmittelbare Folgerung der entsprechenden Grenzwertaussage für die Vertreter des in *Abschnitt 1.1.2* eingeführten Reservoirs von Funktionen ergibt sich die bereits recht umfassende **Aussage:**

Jede elementare Funktion ist in ihrem Definitionsbereich stetig.

Aber durchaus nicht jede Funktion $y = f(x)$, $x \in D(f)$, erweist sich als stetig. Ist für ein $a \in D(f)$ die Stetigkeit von f nicht gegeben, so sagt man, die Funktion f ist an der Stelle $x = a \in D(f)$ **unstetig**. Ein diesbezügliches Negativbeispiel liefert die in *Bild 2.1* dargestellte Funktion. Sie ist zwar an der Stelle $x = a$ linksseitig stetig, weil $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = h = f(a)$. Insgesamt ist sie jedoch an der Stelle $x = a$ unstetig, weil $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = H \neq f(a)$.

BEISPIEL**2.9** Eine überall unstetige Funktion (DIRICHLET-Funktion)

In gewissen Zusammenhängen spielt die sogenannte **charakteristische Funktion** $\chi(x)$ des Intervalls $0 \leq x \leq 1$ eine Rolle. Sie nimmt nur die Werte 0 und 1 an, und zwar wird

$\chi(x) = 1$, wenn x eine rationale Zahl aus $[0, 1]$ und

$\chi(x) = 0$, wenn x eine irrationale Zahl aus $[0, 1]$,

gesetzt. Es zeigt sich, dass $\chi(x)$ an keiner Stelle ihres Definitionsbereiches $0 \leq x \leq 1$ einen Grenzwert besitzt und somit überall unstetig ist. Mit etwas Phantasie und Großzügigkeit kann man sich $\chi(x)$ als einen Kamm mit unendlich vielen Zinken der Länge 1 vorstellen, wobei sowohl die Dicke der Zinken als auch die Lücken zwischen je zwei benachbarten Zinken „infinitesimal kleine“ Größen sind. ■

Stetige Funktionen besitzen eine Reihe von **Eigenschaften**. Wir nennen hier zwei davon.

Ist $y = f(x)$, $x \in D(f)$, in einem *abgeschlossenen* Intervall $I \in D(f)$ stetig, so besitzt sie in I einen **kleinsten Funktionswert** \underline{f} und einen **größten Funktionswert** \bar{f} , d. h., es gilt

$$f(x_1) = \underline{f} \leq f(x) \leq \bar{f} = f(x_2) \quad \text{für alle } x \in I, \quad (2.17)$$

wobei x_1, x_2 ebenfalls zu I gehören.

BEISPIEL**2.10** Größter und kleinster Funktionswert

Die Funktion $f(x) = (x - 3)^2 + 1$, $0 \leq x \leq 5$, ist eine elementare Funktion mit abgeschlossenem Intervall als Definitionsbereich. Sie erfüllt daher die Bedingungen der soeben formulierten Aussage. Somit muss sie einen kleinsten und einen größten Funktionswert besitzen. Unmittelbar aus *Bild 1.2* (vgl. *Beispiel 1.3*) findet man

$$f(3) = 1 \leq f(x) \leq 10 = f(0) \quad \text{für alle } x \in [0, 5]. \quad \blacksquare$$

Von praktischer Bedeutung, z. B. für die Ermittlung der Nullstellen von Funktionen, ist der sogenannte **Zwischenwertsatz**:

Ist $y = f(x)$ in einem *abgeschlossenen* Intervall $a \leq x \leq b$ definiert und stetig, und gilt $f(a) \neq f(b)$, so nimmt $f(x)$ jeden Wert y_0 zwischen $f(a)$ und $f(b)$ mindestens für ein $x_0 \in (a, b)$ an.

Als Folgerung aus den beiden genannten Eigenschaften ergibt sich schließlich die **Aussage**:

Ist $y = f(x)$, $x \in D(f)$, in einem *abgeschlossenen* Intervall $I \in D(f)$ stetig, so nimmt $f(x)$ jeden Wert zwischen ihrem kleinsten und größten Funktionswert mindestens einmal an.

BEISPIEL**2.11** Annahme aller Werte zwischen kleinstem und größtem Funktionswert

Die Funktion $f(x) = (x - 3)^2 + 1$, $0 \leq x \leq 5$, hat $f(3) = 1$ als kleinsten und $f(0) = 10$ als größten Wert (siehe *Beispiel 2.10*). Aus *Bild 1.2* (vgl. *Beispiel 1.3*) erkennt man, dass der Wertebereich $1 \leq f(x) \leq 10$ in zwei Intervalle aufgeteilt werden kann. Die Funktionswerte zwischen 1 und 5 werden genau zweimal angenommen. Beispielsweise gilt $f(2) = f(4) = 2$. Funktionswerte, die größer als 5, aber kleiner als 10 sind, werden genau einmal angenommen. Insgesamt kann daher festgestellt werden, die betrachtete Funktion nimmt jeden Wert zwischen ihrem kleinsten Funktionswert 1 und ihrem größten Funktionswert 10 mindestens einmal an. ■

Das *Wesen der Stetigkeit* liegt darin, dass kleinen Änderungen des Arguments der Funktion auch nur kleine Änderungen der zugehörigen Funktionswerte entsprechen. Gerade diese Eigenschaft besitzt die in *Bild 2.1* dargestellte Funktion an ihrer Unstetigkeitsstelle $x = a$ nicht. Erteilt man dem Argument $x = a$ einen ganz geringen Zuwachs $\Delta a > 0$, so erhält die Funktion einen relativ großen Zuwachs Δf . Er beträgt (bei entsprechend geringem Δa) mindestens $0,9(H - h)$ und tendiert sogar wachsend gegen $H - h > 0$, wenn Δa gegen null sinkt. Etwas grob, aber im Wesen durchaus zutreffend, lässt sich Stetigkeit anschaulich auch wie folgt charakterisieren: Kann der Graph einer Funktion f „in einem Zug“, also ohne absetzen zu müssen, gezeichnet werden, dann ist f stetig. Daher sind von den in *Bild 2.2* dargestellten Funktionen alle mit Ausnahme von f_3 stetig, und nur f_3 hat in $x = x_1$ eine Unstetigkeitsstelle.

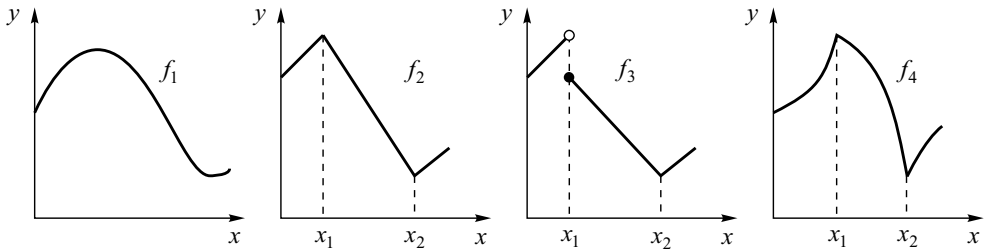


Bild 2.2 Graphen von stetigen (f_1, f_2, f_4) bzw. unstetigen Funktionen (f_3)

2.2.3 Ableitung

Wirtschaftliche Prozesse sind durch Veränderungen der verschiedensten Art gekennzeichnet. Was ist Veränderung? Wie wird Veränderung gemessen? Eine spezielle Form der Veränderung ist die Bewegung. Auf ihr Verständnis waren schon die Bemühungen der Griechen im Altertum gerichtet. Von ZENON (etwa 490–430 v. u. Z.) stammt diesbezüglich eine sehr feinsinnige Beschreibung. Sie besagt, dass die Bewegung eines fliegenden Pfeils darin bestehe, dass er sich in jedem Augenblick an einem Ort und gleichzeitig nicht an diesem Ort befände. Das scheint ein Widerspruch zu sein. Er entsteht daraus, dass Bewegung in einem Augenblick beschrieben wird, obwohl sie eigentlich erst nach Ablauf eines Zeitintervalls wahrgenommen werden kann. Die Lösung des Scheinwiderspruchs ist inzwischen bekannt und wird von jedem motorisierten Verkehrsteilnehmer in Form des Kilometerzählers und des Tachometers praktisch genutzt. Das erste Gerät gibt Auskunft über den Ort, an dem sich das Gefährt im Augenblick befindet. Das zweite Gerät misst die augenblickliche Geschwindigkeit und zeigt damit die Tendenz des Gefährts an, den Ort, an dem es sich im Augenblick befindet, zu verlassen.

Allgemein kann festgestellt werden, dass zur Beschreibung der Veränderung eines Prozessparameters – z. B. der Kosten – zwar dessen quantitative Größe verwendet werden kann. Das Verständnis der jeweiligen Veränderung erfordert jedoch wenigstens noch eine weitere Messgröße. Dafür hat sich für die unterschiedlichsten Erscheinungen die Ableitung von Funktionen bewährt. Es sei $y = f(x)$, $x \in D(f)$, eine gewisse Funktion. Zeichnet man ihren Graphen, so hat man die Veränderung ihrer Werte anschaulich vor sich (siehe *Bild 2.3a*). Das Verständnis dieser Veränderung wird wesentlich durch Untersuchung folgender Messgrößen gefördert:

$$\Delta x \qquad \text{Zuwachs der unabhängigen Veränderlichen } x \qquad (2.18)$$

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) \qquad \text{Zuwachs der Funktionswerte} \qquad (2.19)$$

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \qquad \text{Differenzenquotient} \qquad (2.20)$$

Fassen wir die Funktion f als Zusammenhang zwischen einer Zielgröße y (z. B. den Kosten K) und ihres Einflussfaktors x (z. B. der Produktionsmenge x) auf, so kann der Zuwachs $\Delta f(x)$ als eine erste Messgröße für die Veränderung der Zielgröße y angesehen werden. Genauer gesagt gibt $\Delta f(x)$ die Reaktion der Zielgröße y auf die Veränderung Δx des Einflussfaktors x an. Dann kann der Differenzenquotient $\Delta f(x)/\Delta x$ interpretiert werden als Verhältnis von

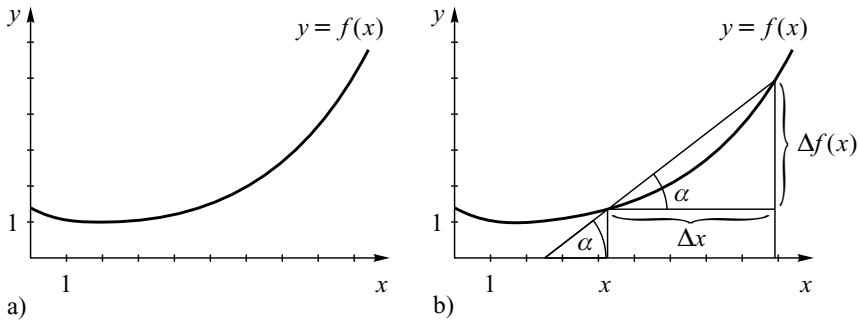


Bild 2.3

Reaktion der Zielgröße y auf die sie hervorrufende Änderung Δx des Einflussfaktors. Mathematisch gibt $\Delta f(x)/\Delta x$ einfach den Tangens des Anstiegswinkels α der entsprechenden Sekante gegenüber der positiven Richtung der x -Achse an (siehe Bild 2.3b)

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \tan \alpha. \quad (2.21)$$

Als Maß für die Veränderung des Funktionswertes *an der Stelle* x wird $\Delta f(x)/\Delta x$ noch nicht allen Anforderungen gerecht. Das ergibt sich schon aus der Abhängigkeit dieses Quotienten von Δx . Deshalb untersucht man ihn für $\Delta x \rightarrow 0$.

Wenn für ein fixiertes $x \in I$, wobei I ein offenes Teilintervall von $D(f)$ ist, der Grenzwert

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (2.22)$$

existiert, dann wird er **Ableitung** der Funktion f **an der Stelle** x genannt, und f heißt **differenzierbar in** x . Existiert der Grenzwert (2.22) für alle $x \in I$, so heißt f **differenzierbar in** I .

Für die Ableitung werden eine Reihe von Symbolen genutzt. Dazu gehören:

$f'(x)$ oder y' („ f Strich von x “ oder „ y Strich“),

$\frac{df(x)}{dx}$ („ df von x nach dx “),

$\frac{df}{dx}$ oder $\frac{dy}{dx}$ („ df nach dx “ oder „ dy nach dx “).

Zur Ableitung gelangt man also über den Grenzwert (2.22):

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x). \quad (2.23)$$

BEISPIEL

2.12 Ermittlung einer Ableitung als Grenzwert des Differenzenquotienten (2.22)

Für die spezielle Grundfunktion $f(x) = x^2$, $x \in \mathbf{R}$, ist die Ableitung zu ermitteln.

Lösung: Es wird zunächst der Zuwachs $\Delta f(x)$ gebildet und vereinfacht:

$$\Delta f(x) = (x + \Delta x)^2 - x^2 = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2 = \Delta x(2x + \Delta x).$$

Hiernach ergibt sich $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x$, d. h. $f'(x) = 2x$,

vgl. (2.24b) in nachfolgender *Tabelle 2.1*. ■

Die Ableitung hätte wohl kaum eine so breite Anwendung gefunden, müsste zu ihrer Ermittlung der jeweilige Grenzwert (2.22) berechnet werden. Das ist jedoch nicht erforderlich. Es erweist sich, dass man zur Bildung von Ableitungen nur einige Fakten kennen sowie wenige Regeln beherrschen muss. Man spricht deshalb zu Recht von der Technik des Differenzierens.

Die erforderlichen Fakten für die Technik des Differenzierens werden von den Ableitungen der Grundfunktionen gebildet. Sie sind in *Tabelle 2.1* zusammengestellt.

Tabelle 2.1 Ableitungen der Grundfunktionen (eine Auswahl)

Funktion	Ableitung
$f(x) = C, x \in \mathbf{R}, C = \text{const}$	$f'(x) = 0, x \in \mathbf{R}$ (2.24a)
$f(x) = x^n, x \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$,	$f'(x) = nx^{n-1}, x \in \mathbf{R}$ (2.24b)
$f(x) = x^k, x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}, k \in \mathbf{Z}$	$f'(x) = kx^{k-1}, x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ (2.24c)
$f(x) = x^a, x \in (0, +\infty), a \in \mathbf{R}$	$f'(x) = ax^{a-1}, x \in (0, +\infty)$ (2.24d)
$f(x) = e^x, x \in \mathbf{R}$	$f'(x) = e^x, x \in \mathbf{R}$ (2.25a)
$f(x) = a^x, x \in \mathbf{R}, a > 0$ und $a \neq 1$	$f'(x) = a^x \ln a, x \in \mathbf{R}$ (2.25b)
$f(x) = \ln x, x \in (0, +\infty)$	$f'(x) = \frac{1}{x}, x \in (0, +\infty)$ (2.26a)
$f(x) = \log_a x, x \in (0, +\infty), a > 0$ und $a \neq 1$	$f'(x) = \frac{1}{x \ln a}, x \in (0, +\infty)$ (2.26b)
$f(x) = \sin x, x \in \mathbf{R}$	$f'(x) = \cos x, x \in \mathbf{R}$ (2.27a)
$f(x) = \cos x, x \in \mathbf{R}$	$f'(x) = -\sin x, x \in \mathbf{R}$ (2.27b)

BEISPIEL

2.13 Ableitung einer Wurzelfunktion

Von der Wurzelfunktion $f(x) = \sqrt[5]{x}, x \in (0, +\infty)$, ist die Ableitung gemäß einer der Formeln aus *Tabelle 2.1* zu ermitteln.

Lösung: Dazu wird die Wurzelfunktion in der Form $f(x) = \sqrt[5]{x} = x^{\frac{1}{5}} = x^{0,2}$ notiert. Hiernach ergibt sich die gesuchte Ableitung gemäß (2.24d) zu

$$f'(x) = 0,2x^{0,2-1} = 0,2x^{-0,8}.$$

Das Endergebnis kann natürlich auch mit dem Wurzelzeichen ausgedrückt werden:

$$f'(x) = 0,2x^{-\frac{4}{5}} = 0,2/x^{\frac{4}{5}} = 0,2/\sqrt[5]{x^4} = \left[5\sqrt[5]{x^4}\right]^{-1}. \quad \blacksquare$$