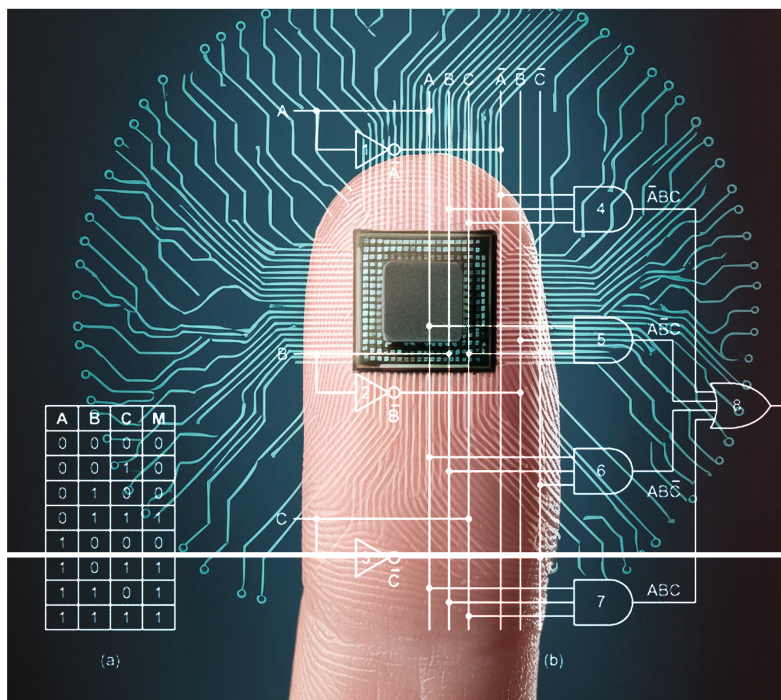


Yavuz Can

# Arithmetik der Schaltalgebra

Ein interdisziplinäres Lehrbuch



HANSER



# Can Arithmetik der Schaltalgebra



## **Bleiben Sie auf dem Laufenden!**

Hanser Newsletter informieren Sie regelmäßig über neue Bücher und Termine aus den verschiedenen Bereichen der Technik. Profitieren Sie auch von Gewinnspielen und exklusiven Leseproben. Gleich anmelden unter

**[www.hanser-fachbuch.de/newsletter](http://www.hanser-fachbuch.de/newsletter)**



Yavuz Can

# **Arithmetik der Schaltalgebra**

Ein interdisziplinäres Lehrbuch

HANSER

Über den Autor:

Dr. Yavuz Can lehrt zusätzlich semesterweise an unterschiedlichen Hochschulen in Deutschland, zusätzlich bietet er mit seinem Unternehmen ExposureOne verschiedene Dienstleistungen im Bereich des Data- und Prozessmanagements an.

Aus Gründen der besseren Lesbarkeit wird auf die gleichzeitige Verwendung der Sprachformen männlich, weiblich und divers (m/w/d) verzichtet. Sämtliche Personenbezeichnungen gelten gleichermaßen für alle Geschlechter.



Print-ISBN: 978-3-446-48247-0

E-Book-ISBN: 978-3-446-48295-1

Alle in diesem Werk enthaltenen Informationen, Verfahren und Darstellungen wurden zum Zeitpunkt der Veröffentlichung nach bestem Wissen zusammengestellt. Dennoch sind Fehler nicht ganz auszuschließen. Aus diesem Grund sind die im vorliegenden Werk enthaltenen Informationen für Autor:innen, Herausgeber:innen und Verlag mit keiner Verpflichtung oder Garantie irgendeiner Art verbunden. Autor:innen, Herausgeber:innen und Verlag übernehmen infolgedessen keine Verantwortung und werden keine daraus folgende oder sonstige Haftung übernehmen, die auf irgendeine Weise aus der Benutzung dieser Informationen – oder Teilen davon – entsteht. Ebenso wenig übernehmen Autor:innen, Herausgeber:innen und Verlag die Gewähr dafür, dass die beschriebenen Verfahren usw. frei von Schutzrechten Dritter sind. Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt also auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Die endgültige Entscheidung über die Eignung der Informationen für die vorgesehene Verwendung in einer bestimmten Anwendung liegt in der alleinigen Verantwortung des Nutzers.

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek:

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet unter <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt.

Alle Rechte, auch die der Übersetzung, des Nachdruckes und der Vervielfältigung des Werkes, oder Teilen daraus, vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf ohne schriftliche Einwilligung des Verlages in irgendeiner Form (Fotokopie, Mikrofilm oder einem anderen Verfahren), auch nicht für Zwecke der Unterrichtsgestaltung – mit Ausnahme der in den §§ 53, 54 UrhG genannten Sonderfälle –, reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden.

Wir behalten uns auch eine Nutzung des Werks für Zwecke des Text- und Data Mining nach § 44b UrhG ausdrücklich vor.

© 2024 Carl Hanser Verlag GmbH & Co. KG, München

[www.hanser-fachbuch.de](http://www.hanser-fachbuch.de)

Lektorat: Frank Katzenmayer

Coverkonzept: Marc Müller-Bremer, [www.rebranding.de](http://www.rebranding.de), München

Covergestaltung: Tom West

Titelmotiv: © Thomas West / Firefly-GenAI

Satz: Yavuz Can

Druck: CPI Books GmbH, Leck

Printed in Germany

Meiner Tochter ELIF gewidmet





# Vorwort

Die Boolesche Algebra beinhaltet die Schaltalgebra, jedoch beinhaltet die Schaltalgebra nicht die Boolesche Algebra. Daher sah ich hier die Notwendigkeit, ein Buch zu verfassen, in dem zum ersten Mal die Schaltalgebra arithmetisch behandelt wird. Dabei werden die Grundoperationsarten wie Verunden, Verodern, Negieren und Differenzbildung in Abhängigkeit der Basisformen mathematisch mithilfe von Beispielen und unterstützenden Abbildungen ausführlich erklärt. Damit soll für unterschiedliche Disziplinen, wie z.B. Informatik, Elektrotechnik und auch der Mathematik, eine gemeinsame Literatur zur Verfügung gestellt werden. Darüber hinaus wird damit bezweckt, Begriffe aus der Schaltalgebra, die von unterschiedlichen Disziplinen unterschiedlich bezeichnet werden, auf eine gemeinsame einheitliche Begriffsnutzung hinzuführen.

Hinzu kommt die Vorstellung von sechs Basisformen der Schaltalgebra. Dabei werden auch Methoden zum Resolvieren von Funktionen in Abhängigkeit von ihrer Form vermittelt. Daneben wird der Schwerpunkt des Buches auch auf die neue Verknüpfungstechnik der orthogonalisierenden Differenzbildung gelegt. Mit ihrem Einsatz wird die klassische Problematik der Orthogonalisierung aus der Booleschen Algebra gelöst. Zuletzt liegt eine weitere Besonderheit darin, dass einzelne Gleichungen entweder innerhalb der Kapitel oder im Anhang mithilfe von mathematischen Beweisen auf ihre Allgemeingültigkeit bewiesen werden. Die aufgeführten mathematischen Gleichungen werden größtenteils auch mit Beispielen erläutert. Dabei kommen auch Abbildungen wie das Karnaugh-Veitch-Diagramm zum besseren Verständnis als unterstützende Visualisierungswerkzeuge zum Einsatz.

Das Lehrbuch richtet sich auch an diejenigen, deren Anwendungen z.B. in der Digitaltechnik, der Zuverlässigkeitsanalyse, der Kryptologie, der Spieltheorie u.a. liegen. Es ermöglicht, aus den aufgeführten Gleichungen gleichwertige Algorithmen in jeder Programmiersprache zu implementieren und dadurch gewisse Boolesche Handlungen rechnerisch zu behandeln.

Darüber hinaus bin ich davon überzeugt, dass im Bereich der Schaltalgebra noch weitere neue Gleichungen entwickelt werden können. Denn ich bin der Meinung, dass in diesem Themenfeld die Untersuchung der Grundlagen noch nicht vollendet ist und hier noch Potential besteht, mathematisch vorzudringen.

Meine Absicht besteht zusätzlich auch darin, dem Leser einen unkomplizierten Eintritt in die Welt der schaltalgebraischen Arithmetik zu verschaffen und dabei eine einfache zu verstehende Beschreibung der Thematik zu liefern.

## ■ Danksagung

Lob gebührt dem Allwissenden, der uns die Möglichkeit gibt, neues Wissen und Erkenntnis generieren zu dürfen, dem ich für die mir gegebene Kraft und das Durchhaltevermögen, derer ich bedurfte, um dieses Schriftwerk verfassen zu dürfen, danke.

An dieser Stelle möchte ich mich auch bei Herrn Prof. Dieter Bochmann ([https://de.wikipedia.org/wiki/Dieter\\_Bochmann](https://de.wikipedia.org/wiki/Dieter_Bochmann)) bedanken, der mich in seinen E-Mails motiviert und mir einige seltene Schriften zur Booleschen Thematik aus seiner privaten Sammlung zugesandt hat.

Dr. Yavuz Can

im Juni 2024

# Inhalt

|   |           |
|---|-----------|
| <b>Vorwort</b> .....                          | <b>IX</b> |
| <b>Teil I Theoretische Grundlagen</b> .....   | <b>1</b>  |
| <b>1 Algebraische Strukturen</b> .....        | <b>3</b>  |
| 1.1 Was ist eine Menge? .....                 | 3         |
| 1.2 Verknüpfungsgebilde .....                 | 4         |
| 1.2.1 Kommutativität .....                    | 5         |
| 1.2.2 Assoziativität .....                    | 5         |
| 1.2.3 Distributivität .....                   | 5         |
| 1.2.4 Neutrales Element .....                 | 5         |
| 1.2.5 Inverses Element .....                  | 6         |
| 1.3 Algebraische Struktur .....               | 6         |
| 1.3.1 Gruppe .....                            | 6         |
| 1.3.2 Abel'sche Gruppe .....                  | 7         |
| 1.3.3 Halbgruppe .....                        | 7         |
| 1.3.4 Ring .....                              | 7         |
| 1.3.5 Körper .....                            | 7         |
| 1.4 Boolesche algebraische Struktur .....     | 8         |
| 1.4.1 Verband .....                           | 8         |
| 1.4.2 Halbgeordnete Menge .....               | 8         |
| 1.4.3 Verband mit Null- und Einselement ..... | 9         |
| 1.4.4 Komplementärer Verband .....            | 9         |
| 1.4.5 Distributiver Verband .....             | 9         |
| 1.4.6 Boolescher Verband .....                | 9         |
| 1.4.7 Boolescher Ring .....                   | 10        |

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>2</b> | <b>Boolesche Algebren</b> .....                                      | <b>11</b> |
| 2.1      | Aufteilung der Booleschen Algebra .....                              | 11        |
| 2.2      | Aussagenlogische Algebra .....                                       | 12        |
| 2.3      | Mengenalgebra .....  | 13        |
| 2.3.1    | Definitionen .....   | 13        |
| 2.3.1.1  | Menge .....  | 13        |
| 2.3.1.2  | Elemente .....   | 14        |
| 2.3.1.3  | Tupel .....  | 15        |
| 2.3.2    | Mengendefinitionen .....   | 15        |
| 2.3.2.1  | Kardinalität .....   | 15        |
| 2.3.2.2  | Leere Menge .....  | 15        |
| 2.3.2.3  | (Echte) Teilmenge .....  | 15        |
| 2.3.2.4  | Gleichheit von Mengen .....  | 16        |
| 2.3.2.5  | Potenzmenge .....  | 17        |
| 2.3.3    | Mengenoperationen .....  | 17        |
| 2.3.3.1  | Vereinigungsmenge .....  | 17        |
| 2.3.3.2  | Schnittmenge .....   | 18        |
| 2.3.3.3  | Komplement .....   | 19        |
| 2.3.4    | Gesetzmäßigkeiten der Mengenalgebra .....                            | 20        |
| 2.3.5    | Weitere Mengenoperationen .....                                      | 21        |
| 2.3.5.1  | Differenzmenge .....   | 21        |
| 2.3.5.2  | Antivalenz (symmetrische Differenz) .....                            | 22        |
| 2.3.5.3  | Äquivalenz (Komplement der symmetrischen Differenz) .....            | 22        |
|          | <b>Teil II Schaltalgebra und schaltalgebraische Funktionen</b> ..... | <b>25</b> |
| <b>3</b> | <b>Schaltalgebra</b> .....   | <b>27</b> |
| 3.1      | Grundregeln der Schaltalgebra .....                                  | 27        |
| 3.1.1    | Grundregeln der Antivalenzform .....                                 | 29        |
| 3.1.2    | Grundregeln der Äquivalenzform .....                                 | 30        |
| 3.1.3    | Produkt- und Summenterm .....  | 31        |
| 3.1.4    | Orthogonalität .....   | 32        |
| 3.2      | Logikgatter .....  | 34        |
| <b>4</b> | <b>Schaltalgebraische Funktion</b> .....                             | <b>37</b> |
| 4.1      | Schaltfunktion .....   | 37        |
| 4.2      | Standardformen .....   | 38        |

|                                  |   |           |
|----------------------------------|---|-----------|
| 4.2.1                            | Disjunktive Form – DF .....                     | 39        |
| 4.2.2                            | Konjunktive Form – KF .....                     | 39        |
| 4.2.3                            | Antivalenzform von Konjunktionen – $AF_K$ ..... | 40        |
| 4.2.4                            | Äquivalenzform von Konjunktionen – $EF_D$ ..... | 40        |
| 4.2.5                            | Antivalenzform von Disjunktionen – $AF_D$ ..... | 41        |
| 4.2.6                            | Äquivalenzform von Konjunktionen – $EF_K$ ..... | 41        |
| 4.3                              | Karnaugh-Veitch-Diagramm .....                  | 42        |
| 4.3.1                            | Abbildung der DF .....                          | 43        |
| 4.3.2                            | Abbildung der KF .....                          | 43        |
| 4.3.3                            | Abbildung der $AF_K$ und $AF_D$ .....           | 44        |
| 4.3.4                            | Abbildung der $EF_D$ und $EF_K$ .....           | 44        |
| 4.3.5                            | Beispielfunktionen zu den Standardformen .....  | 45        |
| <b>Teil III Arithmetik .....</b> |   | <b>47</b> |
| <b>5</b>                         | <b>Arithmetik der Schaltalgebra .....</b>       | <b>49</b> |
| 5.1                              | Umwandlung von DF zu KF .....                   | 49        |
| 5.2                              | Das Verunden .....                              | 50        |
| 5.2.1                            | Verunden zweier Produktterme .....              | 50        |
| 5.2.2                            | Verunden zweier Summenterme .....               | 51        |
| 5.2.3                            | Verunden zweier DFen .....                      | 52        |
| 5.2.4                            | Verunden zweier KFen .....                      | 53        |
| 5.3                              | Das Verodern .....                              | 54        |
| 5.3.1                            | Verodern zweier Produktterme .....              | 54        |
| 5.3.2                            | Verodern zweier Summenterme .....               | 55        |
| 5.3.3                            | Verodern zweier DFen .....                      | 56        |
| 5.3.4                            | Verodern zweier KFen .....                      | 57        |
| 5.4                              | Das Negieren .....                              | 58        |
| 5.4.1                            | Negieren eines Produkttermes .....              | 58        |
| 5.4.2                            | Negieren eines Summenterms .....                | 58        |
| 5.4.3                            | Negieren einer DF .....                         | 59        |
| 5.4.4                            | Negieren einer KF .....                         | 60        |
| 5.5                              | Die Differenzbildung .....                      | 61        |
| 5.5.1                            | Differenz zweier Produktterme .....             | 61        |
| 5.5.2                            | Differenz zweier Summenterme .....              | 62        |
| 5.5.3                            | Differenz zweier DF .....                       | 63        |
| 5.5.4                            | Differenz zweier KF .....                       | 64        |

|                |   |           |
|----------------|---|-----------|
| <b>6</b>       | <b>Das Resolvieren</b> .....  | <b>67</b> |
| 6.1            | Resolvieren in DF und KF .....  | 68        |
| 6.1.1          | Resolvieren in DF .....   | 68        |
| 6.1.2          | Resolvieren in KF .....   | 68        |
| 6.2            | Resolvieren in $AF_K$ und $EF_D$ .....  | 69        |
| 6.2.1          | Resolvieren in $AF_K$ .....   | 69        |
| 6.2.2          | Resolvieren in $EF_D$ .....   | 71        |
| 6.3            | Resolvieren in $AF_D$ und $EF_K$ .....  | 72        |
| 6.3.1          | Resolvieren in $AF_D$ .....   | 74        |
| 6.3.2          | Resolvieren in $EF_K$ .....   | 75        |
| <b>Teil IV</b> | <b>Orthogonalisierende Differenzbildung</b> .....                                     | <b>79</b> |
| <b>7</b>       | <b>Die Theorie zur orthogonalisierenden Differenzbildung</b> .....                    | <b>81</b> |
| 7.1            | Methode der orthogonalisierenden Differenzbildung .....                               | 81        |
| 7.1.1          | Axiome und Postulate .....  | 84        |
| 7.1.1.1        | Axiome für Variablen .....  | 84        |
| 7.1.1.2        | Axiome für Produktterme .....   | 84        |
| 7.1.1.3        | Postulate .....   | 85        |
| 7.1.2          | Analyse der neuen Methode .....   | 86        |
| 7.1.2.1        | Äquivalenz zur Differenzbildung .....   | 86        |
| 7.1.2.2        | Kommutativität .....  | 86        |
| 7.1.2.3        | Assoziativität .....  | 87        |
| 7.1.2.4        | Distributivität .....   | 88        |
| 7.2            | Anwendungen der orthogonalisierenden Differenzbildung .....                           | 89        |
| 7.2.1          | Orthogonalisierende Differenzbildung zwischen einer DF und<br>einem Produktterm ..... | 89        |
| 7.2.2          | Orthogonalisierende Differenzbildung zweier Funktionen .....                          | 90        |
| 7.2.3          | Orthogonale Negierte einer Funktion .....   | 92        |
| 7.2.4          | Orthogonalisierung .....  | 94        |
| 7.2.5          | Berechnung einer Redundanz- und Irredundanzfunktion .....                             | 97        |
| 7.2.5.1        | Bi-Dekomposition von Schaltfunktionen .....   | 97        |
| 7.2.5.2        | Berechnung der Irredundanzfunktion .....  | 99        |

|   |            |
|---|------------|
| <b>Teil V Mathematische Beweise</b> .....                 | <b>103</b> |
| <b>8 Mathematische Beweise</b> .....                      | <b>105</b> |
| 8.1 Konjunktion von Produkttermen .....                   | 105        |
| 8.2 Konjunktion von Summentermen .....                    | 106        |
| 8.3 Konjunktion zweier DFen .....                         | 107        |
| 8.4 Konjunktion zweier KFen .....                         | 108        |
| 8.5 Disjunktion von Produkttermen .....                   | 109        |
| 8.6 Disjunktion von Summentermen .....                    | 110        |
| 8.7 Disjunktion zweier DFen .....                         | 111        |
| 8.8 Disjunktion zweier KFen .....                         | 112        |
| 8.9 Differenzbildung zweier Produktterme .....            | 113        |
| 8.10 Differenzbildung zweier Summenterme .....            | 114        |
| 8.11 Differenzbildung zweier DFen .....                   | 115        |
| 8.12 Differenzbildung zweier KFen .....                   | 116        |
| 8.13 Orthogonalisierende Differenzbildung $\ominus$ ..... | 117        |
| 8.14 Orthogonalisierung ORTH[ $\ominus$ ] .....           | 118        |
| 8.15 Irredundanzfunktion IR[ $\ominus$ ] .....            | 119        |
| <b>9 Beweis der Strukturzugehörigkeit</b> .....           | <b>121</b> |
| 9.1 $AF_K$ ein Boolescher Ring .....                      | 121        |
| 9.2 $EF_D$ ein Boolescher Ring .....                      | 124        |
| 9.3 $AF_D$ kein Boolescher Ring .....                     | 127        |
| 9.4 $EF_K$ kein Boolescher Ring .....                     | 129        |
| <b>Literatur</b> .....                                    | <b>133</b> |
| <b>Stichwortverzeichnis</b> .....                         | <b>137</b> |

