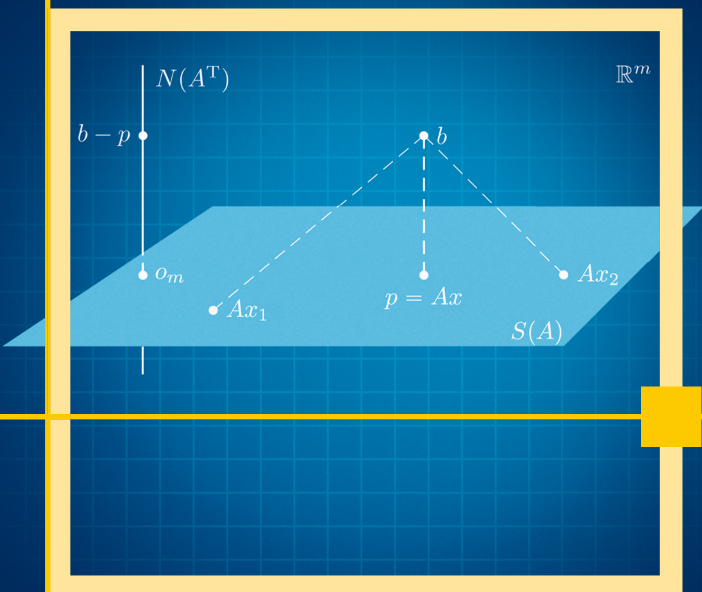
Günter M. Gramlich

Mathematik-Studienhilfen

Anwendungen der Linearen Algebra

mit MATLAB



2., aktualisierte Auflage

HANSER

Gramlich

Anwendungen der Linearen Algebra

Bleiben Sie auf dem Laufenden!

Hanser Newsletter informieren Sie regelmäßig über neue Bücher und Termine aus den verschiedenen Bereichen der Technik. Profitieren Sie auch von Gewinnspielen und exklusiven Leseproben. Gleich anmelden unter

www.hanser-fachbuch.de/newsletter

Mathematik–Studienhilfen

Herausgegeben von

Prof. Dr. Bernd Engelmann
Hochschule für Technik, Wirtschaft und Kultur Leipzig,
Fachbereich Informatik, Mathematik und Naturwissenschaften

Zu dieser Buchreihe:

Die Reihe Mathematik-Studienhilfen richtet sich vor allem an Studenten technischer und wirtschaftswissenschaftlicher Fachrichtungen an Fachhochschulen und Universitäten.

Die mathematische Theorie und die daraus resultierenden Methoden werden korrekt, aber knapp dargestellt. Breiten Raum nehmen ausführlich durchgerechnete Beispiele ein, welche die Anwendung der Methoden demonstrieren und zur Übung zumindest teilweise selbstständig bearbeitet werden sollten.

In der Reihe werden neben mehreren Bänden zu den mathematischen Grundlagen auch verschiedene Einzelgebiete behandelt, die je nach Studienrichtung ausgewählt werden können. Die Bände der Reihe können vorlesungsbegleitend oder zum Selbststudium eingesetzt werden.

Bisher erschienen:

Gramlich, *Lineare Algebra*
Gramlich, *Anwendungen der Linearen Algebra*
Knorrenschild, *Numerische Mathematik*
Knorrenschild, *Vorkurs Mathematik*
Martin, *Finanzmathematik*
Nitschke, *Geometrie*
Preuß, *Funktionaltransformationen*
Sachs, *Wahrscheinlichkeitsrechnung/Statistik*
Tittmann, *Graphentheorie*

Günter M. Gramlich

Anwendungen der Linearen Algebra

mit MATLAB

2., aktualisierte Auflage

HANSER

Autor:

Günter M. Gramlich, Fakultät Mathematik, Technische Hochschule Ulm

MIX
Papier aus verantwortungsvollen Quellen
FSC® C014889
FSC
www.fsc.org

Alle in diesem Buch enthaltenen Informationen wurden nach bestem Wissen zusammengestellt und mit Sorgfalt geprüft und getestet. Dennoch sind Fehler nicht ganz auszuschließen. Aus diesem Grund sind die im vorliegenden Buch enthaltenen Informationen mit keiner Verpflichtung oder Garantie irgendeiner Art verbunden. Autor(en, Herausgeber) und Verlag übernehmen infolgedessen keine Verantwortung und werden keine daraus folgende oder sonstige Haftung übernehmen, die auf irgendeine Weise aus der Benutzung dieser Informationen – oder Teilen davon – entsteht. Ebenso wenig übernehmen Autor(en, Herausgeber) und Verlag die Gewähr dafür, dass die beschriebenen Verfahren usw. frei von Schutzrechten Dritter sind. Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek:
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt.
Alle Rechte, auch die der Übersetzung, des Nachdruckes und der Vervielfältigung des Buches, oder Teilen daraus, sind vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf ohne schriftliche Genehmigung des Verlages in irgendeiner Form (Fotokopie, Mikrofilm oder ein anderes Verfahren) – auch nicht für Zwecke der Unterrichtsgestaltung – reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden.

© 2022 Carl Hanser Verlag München;
Internet: www.hanser-fachbuch.de

Lektorat: Dipl.-Ing. Natalia Silakova-Herzberg
Herstellung: Carolin Benedix
Satz: Günter M. Gramlich
Titelmotiv: Max Kostopoulos, unter Verwendung von Grafiken von © Günter M. Gramlich
Covergestaltung: Max Kostopoulos
Coverkonzept: Marc Müller-Bremer, www.rebranding.de, München
Druck und Binden: Friedrich Pustet GmbH & Co. KG, Regensburg
Printed in Germany

Print-ISBN: 978-3-446-47301-0
E-Book-ISBN: 978-3-446-47326-3

Vorwort

Die Lineare Algebra ist ein Grundlagenfach der höheren Mathematik. Zum Einen lässt sich darin zeigen, was Mathematik ausmacht und zum Anderen sind die Anwendungsmöglichkeiten nahezu unbegrenzt.

Mathematik zeigt zwei Hauptmerkmale. Erstens. Die Klarheit und Logik der Mathematik. Mathematik ordnet durch Strukturen und hilft uns wesentliches zu erkennen. Zweitens. Mathematik kann nützlich sein. Es gibt viele Beispiele, die zeigen, wie wir mithilfe von Mathematik das Leben verbessern können.

Ich habe im Buch [20] eine Einführung in Lineare Algebra gegeben (ergänzt durch ein Aufgabenbuch [19]) und möchte in diesem Buch Anwendungen, Anwendungsbeispiele, Modelle, Methoden, Ergänzungen, Zusammenfassungen, Übersichten (Kapitel 11) und weitere praktische Rechenmethoden zur Linearen Algebra zeigen. Das Ihnen vorliegende Buch kann Standardvorlesungen zur Linearen Algebra ergänzen, auflockern und durch Anwendungen und Modelle bereichern.

Wir betrachten und behandeln Anwendungen und mathematische Modelle, gerne auch einfache. Gerade einfache Modelle haben den Vorteil, dass der Modellierer die Bearbeitung eines Problems mit diesen beginnen kann, um sie dann schrittweise zu verfeinern und zu verbessern. Oft sind schon erste Teillösungen für den weiteren Prozess hilfreich und geben Hinweise auf zu erwartende kritische Situationen. Wird die Lineare Algebra in anderen Bereichen innerhalb der Mathematik eingesetzt, dann spricht man von innermathematischen Anwendungen oder Modellen. Zum Beispiel werden lineare Abbildungen aus der linearen Algebra verwendet, um die (totale) Differenziation von Funktionen von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^m$ aus der Analysis (Differenzial- und Integralrechnung) zu definieren.

Dieses Buch ist nicht im mathematisch typischen Stil Definition, Satz, Beweis geschrieben; Schlüsselwörter wie Definition, Satz, Beweis kommen nicht vor.

Was kann man mit Tupeln, Vektoren und Matrizen machen? Wo treten lineare Gleichungssysteme auf? Warum sind Eigenwerte und Eigenvektoren von Bedeutung? Was bringt der Begriff eines (abstrakten) Vektorraumes? Wozu hat man lineare Abbildungen? Was kann man tun, wenn ein lineares Gleichungssystem keine Lösung hat? Welche Lösungen sind besonders interessant, wenn ein lineares Gleichungssystem unendliche viele Lösungen hat?

Der Anwendungsbereich der Linearen Algebra ist groß: Systemtheorie, Kontrolltheorie, Steuerungs- und Regelungstechnik, Filtertheorie, KALMAN[1]-Filter, Computergrafik,

[1] R. KALMAN (1930-2016) war ein US-amerikanischer Elektroingenieur und Mathematiker ungarischer Herkunft.

Signal- und Bildverarbeitung, Robotik, Wavelets, Statistik, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Differenzen- und Differenzialgleichungen, Finanzmathematik, Ökonometrie, Ökonomie, FOURIER-Analysis, Finite-Elemente- und Finite-Volumen-Methoden, Graphentheorie, Optimierung und Operations Research, wissenschaftliches Rechnen, numerische Mathematik, Funktionalanalysis, Kryptologie, Quantentheorie, Elektrotechnik, Elektrodynamik, Schwingungs- und Wellenlehre, (technische) Mechanik, Akustik, Thermodynamik, Data Mining, Data Science, maschinelles Lernen, künstliche Intelligenz, neuronale Netze, Quantum Computing, usw. Überall werden Sie ein Stück Lineare Algebra entdecken. Lineare Algebra findet sich also zum Beispiel in physikalischen, technischen, ökonomischen, geometrischen und statistischen Kontexten.

Anwendungen gehen Hand in Hand mit Computersimulationen. Mit dem Softwaresystem MATLAB[2] lassen sich realitätsnahe Anwendungen rasch und nicht aufwendig bereits mit wenigen Codezeilen programmieren. Konzepte der Linearen Algebra lassen sich damit besonders gut verstehen und anschaulich darstellen. Eine kleine Einführung in MATLAB finden Sie in Kapitel 10.

Die Auswahl der hier behandelten Themen ist (bei einem so großen Themenbereich wie der Linearen Algebra) subjektiv, und beruht auf meinen Vorlieben in der Lehre und den durchgeführten mathematisch orientierten Projekten.

Das vorliegende Buch habe ich vollständig in LaTeX mit der Hauptklasse `scrbook` des KOMA-Script Pakets erstellt, das Literaturverzeichnis mit `biblatex`, und alle Bilder mit PSTricks. Ohne diese schönen Tools wäre dies alles viel schwieriger oder gar unmöglich gewesen.

Ich danke allen Studenten, Kollegen und Interessierten, die durch Hinweise auf Druck- oder Denkfehler, oder einfach durch ihr fachliches oder didaktisches Interesse an diesem Buch und seinem Inhalt, zur Verbesserung des Textes beigetragen haben. Danke an das Team vom CARL HANSER Verlag Frau SILAKOVA-HERZBERG, Frau KUBIAK und Frau BENEDIX für Hinweise zur Gestaltung des Buches.

Für jede Anregung, nützlichen Hinweis oder Verbesserungsvorschlag bin ich dankbar. Sie können mich über Post oder E-Mail `Guenter.Gramlich@thu.de` erreichen.

In dieser überarbeiteten Auflage habe ich an zahlreichen Stellen Änderungen, Glättungen, Verbesserungen, Erweiterungen und Neubearbeitungen vorgenommen.

Ulm, im Frühling 2022 Günter M. Gramlich

[2] MATLAB® ist eingetragenes Warenzeichen von The MathWorks Inc. (`www.mathworks.com`).

Inhaltsverzeichnis

1 Modellbegriffe in der Mathematik

Wir kennen in der Mathematik, und so auch in der Linearen Algebra, zwei Modellbegriffe, einen Modellbegriff nach Stachowiak[1] und einen axiomatischen Modellbegriff oder Modellbegriff der Logik.

Bei einem mathematischen Modell kann es darum gehen, reale Situationen mit mathematischen Methoden und mathematische Mitteln zu beschreiben, zu erklären und vorauszusagen. Mit dem Entwurf mathematischer Modelle versuchen wir unsere komplexe Realität einzufangen. Pioniere dieser Ideen waren Galilei[2] und Hertz[3]. Ein wesentlicher Kern des Modellierens besteht darin, dass nicht die gesamte Komplexität des Ausgangsproblems und der Ausgangsfragestellung berücksichtigt wird und grundsätzlich auch nicht berücksichtigt werden kann. Es wird mit Verkürzungen gearbeitet, die nur jeweils relevante Merkmale der realen Situation berücksichtigen. Was als relevant angesehen wird, darüber entscheiden die modellierenden Personen. Eine eindeutige Zuordnung von realer Situation und Modell gibt es daher nicht. Dies bezeichnet Stachowiak als Subjektivierungsmerkmal eines Modells. Aus diesem Grund werden Modelle nicht hinsichtlich ihrer Richtigkeit, sondern hinsichtlich ihrer Nützlichkeit beurteilt. Ein richtiges oder falsches Modell gibt es daher nicht. Für die Modellbeurteilung sind nach Stachowiak zwei weitere Merkmale wesentlich: Die Güte eines Modells bemisst sich zum Einen über das Abbildungsmerkmal daran, wie gut es die relevanten Eigenschaften der realen Situation wieder geben kann, und zum Anderen über das Verkürzungsmerkmal daran, wie gut es einer mathematischen Beschreibung zugänglich ist. Das Modellieren zu lehren ist schwer oder gar unmöglich, man kann es jedoch durch die aktive Auseinandersetzung mit einer Vielzahl von Fallbeispielen, Fallstudien oder Anwendungen üben und erlernen, siehe zum Beispiel [9], [10], [24], [26], [28], [45], [50]. Das ist ein kreativer Prozess, der fundierte Kenntnisse des jeweiligen Sachverhaltes als auch solide mathematische Kompetenz erfordert. Hinzu kommt die Umsetzung existierender Lösungsmethoden, als auch das Entwickeln neuer Lösungsmethoden verbunden mit Parameterstudien, Computersimulationen und Programmieren.

Ein anderer Modellbegriff wird axiomatischer Modellbegriff oder Modellbegriff der Logik genannt. Pioniere dieses Modellbegriffs waren Gödel[4], Hibert[5], Tarski[6] und

[1] H. Stachowiak (1921-2004) war ein deutscher Philosoph und Mathematiker.
[2] G. Galilei (1564-1641) war ein italienischer Universalgelehrter.
[3] H. R. Hertz (1857-1894) war ein deutscher Physiker.
[4] K. F. Gödel (1906-1978) war ein österreichisch-US-amerikanischer Mathematiker, Philosoph und Logiker.
[5] D. Hilbert (1862-1943) war ein deutscher Mathematiker.
[6] A. Tarski (1901-1983) war ein polnisch-US-amerikanischer Mathematiker und Logiker.

Carnap[7]. Hierbei geht es um die Aufgabe, Modelle für ein vorgegebenes Axiomensystem zu konstruieren, isomorphe Modelle zu kreieren und auch aufzuzeigen, wie viele isomorphe Modelle ein Axiomensystem hat. Die Konstruktionen von Modellen zu entsprechenden Axiomensystemen dienen der Untersuchung von Widerspruchsfreiheit (Keine zwei Sätze widersprechen einander.), Unabhängigkeit (Kein Axiom ist aus den Restlichen ableitbar.) und Vollständigkeit (Hinzufügen eines weiteren Axioms, das nicht aus den anderen ableitbar ist, würde das System widerspruchsvoll oder inkonsistent werden lassen.).

Bitte beachten Sie. Auch in der Mechanik lernt man Axiome kennen: Die Axiome von Newton[8]. Newtons Werk zählt auch heute noch zu den großartigsten Abhandlungen der exakten Naturwissenschaften. Dennoch genügt das Axiomensystem von Newton nicht den strengen Forderungen der Mathematik.

Es ist der Modellbegriff nach Stachowiak mit dem wir uns hier hauptsächlich auseinandersetzen. Wir geben Modelle im Zusammenhang mit Linearer Algebra.

[7] P. R. Carnap (1891-1970) war ein deutscher Philosoph.
[8] I. Newton (1642-1726) war ein englischer Physiker, Astronom und Mathematiker.

2 Anwendungen und Modelle mit $\mathbb{R}^n$

In diesem Kapitel drehen sich die Anwendungen und Modelle hauptsächlich um reelle geordnete Tupel, aber auch andere mathematische Objekte und Strukturen kommen zum Einsatz, wenn es das Modell will oder die Anwendung verlangt.

Die Elemente von $\mathbb{R}^n$ heißen reelle geordnete Tupel. Sie sind für $a \in \mathbb{R}^n$ von der Form $(a_1, \ldots, a_n)$ mit $a_j \in \mathbb{R}$ für $j = 1 : n$. Man kann Tupel addieren, subtrahieren und mit einer reellen Zahl multiplizieren. Zum Rechnen existieren wertvolle Rechenregeln, siehe zum Beispiel Kapitel 1 in [20].

Elemente aus $\mathbb{R}^n$

Ein Tupel a aus $\mathbb{R}^n$ können wir als $a = (a_1, \ldots, a_n)$ oder als $a = a_1 e_1 + \ldots + a_n e_n$ schreiben, wobei $e_1, \ldots, e_n$ Tupel aus $\mathbb{R}^n$ sind mit $e_j = (\underset{1}{0}, \ldots, 0, \underset{j}{1}, 0, \ldots, \underset{n}{0}) \in \mathbb{R}^n$ für $j = 1 : n$.

Beispiel 2.1 Es ist zum Beispiel

$$\begin{aligned} a &= (-1, 2, 3, 7) = (-1)(1, 0, 0, 0) + 2(0, 1, 0, 0) + 3(0, 0, 1, 0) + 7(0, 0, 0, 1) \\ &= (-1)e_1 + 2e_2 + 3e_3 + 7e_4 \end{aligned}$$

□

Beschreibende Statistik

Zur Beschreibung von Merkmalen (statistischen Größen) kann man Lineare Algebra verwenden. Dadurch lassen sich nicht nur Rechnungen einfacher durchführen und Bedingungen sowie Formeln kompakter formulieren, sondern manchmal auch geometrische Interpretationen angeben. (Das gilt auch für Zufallsgrößen aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung.)

Merkmale, Merkmalsausprägungen

Ist die Abbildung $X : \{1, \ldots, n\} \to \mathbb{R}$ ein Merkmal[1], so ist es oft sinnvoll, die Merkmalsausprägungen (Beobachtungen, Messungen) $X(1) = x_1, \ldots, X(n) = x_n$ als reelles geordnetes Tupel $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ aufzufassen und zu schreiben. Das Tupel $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ wird gern Datentupel oder Datenvektor genannt.

[1] In der Statistik ist es üblich, Merkmale mit großen lateinischen Buchstaben zu bezeichnen.

Beispiel 2.2 Bei fünf männlichen Jugendlichen interessiert man sich für deren Körpergröße. Diese sind 1.60, 1.75, 1.80, 1.50, 1.55 und 1.80 Meter. Dann ist

$$(1.60, 1.75, 1.80, 1.50, 1.55, 1.80) \in \mathbb{R}^5$$

in Meter (m) das Datentupel zum Merkmal Körpergröße. Die Körpergröße 1.60 m gehört zu der Person 1, die Körpergröße 1.75 m gehört zu der Person 2 usw. □

Wirtschaft

Beispiel 2.3 Eine Einzelhandelskette stellt die Stückpreise (etwa in Euro) ihrer drei Seifenmarken mithilfe eines Tripels dar: $p = (1.19, 2.09, 0.39)$. Der Eintrag $p_1 = 1.19$ gibt den Preis für ein Stück der ersten Seifenmarke an, ein Stück der zweiten Seifenmarke kostet $p_2 = 2.09$ ein Stück der dritten Seifenmarke kostet $p_3 = 0.39$. Die Preise der drei Seifenmarken haben sich nun wie folgt geändert: Seifenmarke 1: keine Änderung, Seifenmarke 2: +0.10, Seifenmarke 3: +0.05. Wie sind die neuen Preise?

Die Preissteigerungen können in einem Preissteigerungstupel $s = (0, 0.10, 0.05)$ dargestellt werden. Die neuen Preise ergeben sich dann durch Addition:

$$p + s = (1.19, 2.09, 0.39) + (0, 0.10, 0.05) = (1.19, 2.19, 0.44).$$

Nun gilt: Der Preis für ein Stück der ersten Seifenmarke beträgt 1.19, für ein Stück der zweiten Seifenmarke 2.19 und der Preis für ein Stück der dritten Seifenmarke ist 0.44. □

Farben und Farbmodelle

Farbmodelle ordnen sich nach unterschiedlichen Kriterien. Farbmischsysteme definieren Farben aufgrund des Mischungsverhältnisses der Grundfarben, durch die sie erzeugt wurden. Zwei Farbmischsysteme haben besondere Bedeutung: RGB und CMY. RGB steht für Rot (R), Grün (G) und Blau (B). Diese Farben sind die Grundfarben der additiven Farbmischung. Damit bezeichnet man die Farberzeugung durch Mischung von Licht. Dieses Prinzip findet zum Beispiel bei Computer- und Fernsehbildschirmen Anwendung. Wenn man diese mit einer Lupe betrachtet, kann man kleinste Bildpunkte erkennen, die Rot, Grün oder Blau leuchten. Da das Auge nicht mehr getrennt von einander wahrnehmen kann, ergänzen sie sich aus Sicht des Betrachters zu einer Farbe. Durch unterschiedliche Gewichtung der drei Grundfarben können alle Farben erzeugt werden.

Ein reelles Tripel kann eine Farbe darstellen, wobei in einem RGB-Farbmodell die Koordinaten den Anteil von Rot (R), Grün (G) und Blau (B) geben. Dem reellen Tripel $(1, 0, 0)$ entspricht die Farbe Rot, dem Tripel $(0, 1, 0)$ die Farbe Grün und dem Tripel $(0, 0, 1)$ die Farbe Blau. Andere Farben können aus den Grundfarben Rot, Grün,

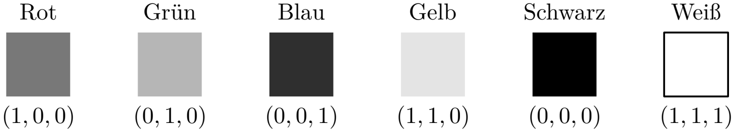


Bild 2.1: Zum RGB-Farbenmodell.

Blau gemischt werden. Dies entspricht dann einer Linearkombination mit den Tripeln $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$. Zum Beispiel ist

$$(1,0,0) + (0,1,0) = (1,1,0)$$

was der Farbe Gelb entspricht. Dem Tripel $(0,0,0)$ entspricht Schwarz und dem Tripel

$$(1,1,1) = (1,0,0) + (0,1,0) + (0,0,1)$$

Weiß.

Beim CMY-Farbmodell dienen Cyan (C), Magenta (M) und Gelb (Y, Yellow) als Grundfarben. Diese werden subtraktiv gemischt, die entsprechenden komplementären Farbanteile werden also ausgeblendet. Zur Umrechnung von additiver zu subtraktiver Mischung und umgekehrt dient dabei die Formel

$$(\mathrm{C},\mathrm{M},\mathrm{Y}) = (1,1,1) - (\mathrm{R},\mathrm{G},\mathrm{B}).$$

Reines Rot wird im RGB-Farbmodell durch $(1,0,0)$ beschrieben, im CMY-Farbmodell stellt das Tripel

$$(1,1,1) - (1,0,0) = (0,1,1)$$

reines Rot dar. Mit dem CMY-Farbmodell arbeiten zum Beispiel Farbdrucker.

Das CMYK-Farbmodell ist eine Erweiterung des CMY-Modells und benutzt Schwarz (K, Key-Color, Kontrast) als vierte Farbe.

Geometrische Modelle

Nun wollen wir ein paar grundlegende Modelle aus der Analytischen Geometrie[2] vorstellen und dabei die Verbindung zur Linearen Algebra aufzeigen.

Die Verbindung von Geometrie und Algebra wird dadurch erreicht, dass man geometrische Objekte als Punktmengen auffasst und jedem Punkt reelle Zahlen zuordnet, durch die er sich von anderen unterscheidet. Eine Gerade oder eine Kurve ist dann eine Menge von Punkten, für deren reelle Zahlen bestimmte Bedingungen gelten, die man Gleichungen dieser Objekte nennt, zum Beispiel Gleichung einer Graden oder eines Kreises. Die Punkte, die einer linearen Gleichung in zwei Variablen genügen, beschreiben eine Gerade, die einer quadratischen Gleichung in zwei Variablen einen Kegelschnitt.

Geometrische Darstellungen der Elemente aus $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$

Ein reelles Zahlenpaar (a_1, a_2) aus $\mathbb{R}^2$ kann als Punkt in einem Koordinatensystem der Ebene dargestellt werden, siehe Bild 2.2 links. Das Koordinatensystem kann muss

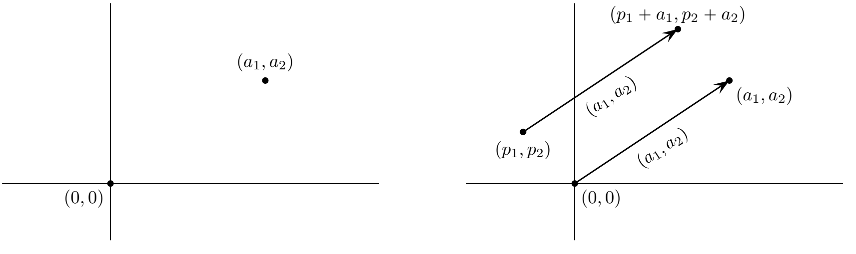


Bild 2.2: Zu den geometrischen Interpretationen der Elemente aus $\mathbb{R}^2$.

aber nicht kartesisch[3] sein. Die Koordinatenachsen müssen nicht notwendigerweise senkrecht zueinander sein, aber auch Koordinatensysteme mit senkrechten Achsen können sich durch Skalierung der Achsen und ihre Lage unterscheiden. Punkte sind oft mathematische Modelle für Positionen oder Orte, zum Beispiel für eine Punktmasse in der Physik.

Ein reelles Zahlenpaar (a_1, a_2) aus $\mathbb{R}^2$ kann auch als Pfeil (gerichtete, orientierte Strecke) geometrisch dargestellt werden. Der Anfangspunkt des Pfeiles ist der Nullpunkt $(0, 0)$

[2]Das Wesen der Analytischen Geometrie besteht in einer Zusammenführung von Geometrie und Algebra zu einer Methode, die es ermöglicht, geometrische Probleme mit algebraischen Mitteln durch Gleichungen zu beschreiben, zu analysieren und zu lösen und andererseits algebraische Probleme geometrisch zu veranschaulichen und dadurch ihre Lösung zu erleichtern, siehe [6].

[3]Unter einem kartesischen Koordinatensystem versteht man ein Koordinatensystem mit zueinander senkrechten Achsen mit gleicher Skalierung, wobei der Abstand zwischen zwei aufeinanderfolgenden ganzzahligen Achsenwerten der Länge der Einheitsstrecke entspricht.

und der Endpunkt (Spitze) ist der Punkt (a_1, a_2). Die Punkte auf dem Pfeil haben keine besondere Bedeutung. Nun dient aber nicht nur dieser Pfeil als Darstellung, sondern jeder Pfeil, der zu diesem parallel, gleich lang und gleich gerichtet ist. Diese Pfeilklasse stellt das Element (a_1, a_2) dar und jeder Pfeil aus dieser Pfeilklasse ist ein Repräsentant für das Element (a_1, a_2). Ein Repräsentant der Pfeilklasse, die das Paar (a_1, a_2) darstellt, ist also ein Pfeil mit beliebigem Anfangspunkt (p_1, p_2) und Endpunkt $(p_1 + a_1, p_2 + a_2)$. Das Bild 2.2 rechts zeigt zwei Pfeile, das heißt, zwei Repräsentanten des reellen Zahlenpaares (a_1, a_2). Bitte beachten Sie: Zahlenpaar (Vektor) gleich Pfeil ist eine Fehlvorstellung[4]. Eine Besonderheit ist das Paar $(0, 0)$, auch Nullpaar genannt. In diesem Fall gibt es keinen Pfeil.

Beispiel 2.4 Das reelle Zahlenpaar $(2, 1) \in \mathbb{R}^2$ kann dargestellt werden als Pfeil von Punkt $(0, 0)$ zu Punkt $(2, 1)$ oder als Pfeil von Punkt $(1, 0)$ zu Punkt $(1, 0) + (2, 1) = (3, 1)$, oder als Pfeil von $(3, 1)$ nach $(5, 2)$ usw. Die Pfeile gehören zu derselben Pfeilklasse. Aber nicht zu dieser Pfeilklasse gehört der Pfeil von Punkt $(1, 1)$ zu Punkt $(0, 3)$, oder der Pfeil von Punkt $(0, 0)$ zu Punkt $(0, -3)$. ▫

Beispiel 2.5 Bestimmen Sie die Pfeilklasse in Form eines reellen Zahlenpaares zu der der Pfeil gehört, der vom Punkt $(4, -9)$ zum Punkt $(-1, 4)$ zeigt. Zu welcher Pfeilklasse (reelles Zahlenpaar) gehört der Pfeil, der von $(-1, 4)$ nach $(4, -9)$ zeigt? Wie hängen die beiden Zahlenpaare zusammen?

Lösung: Der Pfeil, der vom Punkt $(4, -9)$ zum Punkt $(-1, 4)$ zeigt, gehört zur Pfeilklasse, die das reelle Zahlenpaar $(-5, 13)$ darstellt. Der Pfeil, der vom Punkt $(-1, 4)$ zum Punkt $(4, -9)$ zeigt, gehört zur Pfeilklasse, die das reelle Zahlenpaar $(5, -13)$ darstellt. Es ist das Gegenpaar (Gegenvektor). ▫

Punkte und Pfeile in Zeichnungen sind Veranschaulichungen von reellen Zahlenpaaren oder Zahlentripeln. Je nach Situation, je nach Kontext, wählt man die Veranschaulichung, welche besser passt. Alles gilt analog in $\mathbb{R}^3$ mit drei Koordinaten.

Der Leser kann zu Recht einwenden, dass es verwirrend sein kann, nicht zwischen Punkten und Pfeilen zu unterscheiden. Im Rahmen der affinen Geometrie werden diese beiden Begriffe klar unterschieden. Eine Einführung in die affine Geometrie finden Sie zum Beispiel in [12] oder [13].

Verschiebungen in $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$

Pfeile sind mathematische Modelle für Verschiebungen (Translationen). Ausgehend von dem Punkt (p_1, p_2) wird der Punkt $(p_1 + a_1, p_2 + a_2)$ erreicht, indem man a_1 Einheiten entlang der ersten Achse und a_2 Einheiten entlang der zweiten Achse geht. Ist $a_1 > 0$

[4] Die Schwierigkeiten mit dem Konzept der Pfeilklassen weisen auf ein grundsätzliches Problem bei der Behandlung von Vektoren (Tupeln) hin: Einerseits kommt anschaulichen Vorstellungen eine wichtige Bedeutung für die Entwicklung intuitiven Begriffsverständnisses zu, andererseits können aber Veranschaulichungen zu Begriffseinengungen und Begriffsverzerrungen führen, die den Blick auf das Wesentliche eines Strukturbegriffs verstellen.

so geht man in Richtung positiver erster Achse, ist $a_1 < 0$, dann entlang negativer Achse. Entsprechend für a_2.

Beispiel 2.6 Wir betrachten die Punkte $(1, 4)$ und $(4, 8)$. Der Pfeil, der von $(1, 4)$ nach $(4, 8)$ zeigt, also die Verschiebung, die man benötigt, um $(1, 4)$ nach $(4, 8)$ zu verschieben, ist Repräsentant der Pfeilklasse zu dem reellen Zahlenpaar $(3, 4)$. ▫

Addition der Elemente aus $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$

Wir besprechen den Fall $\mathbb{R}^2$, alles gilt analog in $\mathbb{R}^3$ mit drei Koordinaten. Die Addition von reellen Zahlenpaaren ist koordinatenweise definiert. Sind (a_1, a_2) und (b_1, b_2) aus $\mathbb{R}^2$, so ist $(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2) \in \mathbb{R}^2$. Für die Addition erhalten wir folgende Bilder. In der Punktsprache. Das reelle Zahlenpaar $(a_1 + b_1, a_2 + b_2)$ ist der vierte Punkt des von den drei Punkten $(0, 0)$, (a_1, a_2), (b_1, b_2) aufgespannten Parallelogramms. In der Pfeilsprache. Für die Addition in der Pfeilsprache gibt es zwei Bilder.

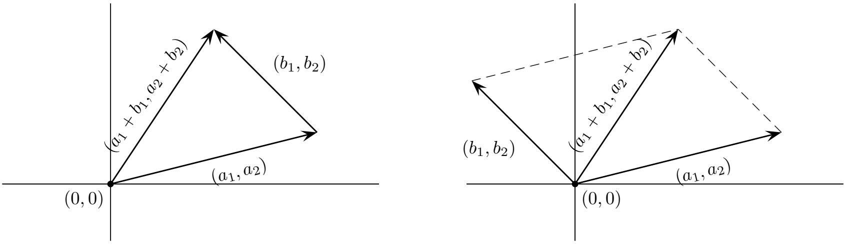
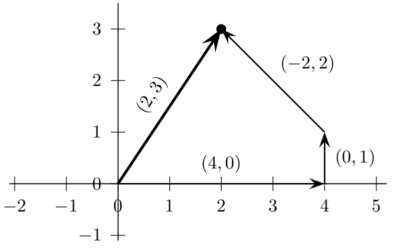


Bild 2.3: Zur Addition von Pfeilen.

- Der Pfeil von $(0, 0)$ nach (b_1, b_2) wird parallel verschoben, sodass sein Anfangspunkt mit dem Endpunkt des Pfeiles von $(0, 0)$ nach (a_1, a_2) übereinstimmt. Dann ist der Pfeil vom Nullpunkt zum Endpunkt des verschobenen Pfeils ein Repräsentant der Pfeilklasse von $(a_1 + b_1, a_2 + b_2)$, siehe Bild 2.3 links.
- Der Pfeil von $(0, 0)$ nach (a_1, a_2) und der Pfeil von $(0, 0)$ nach (b_1, b_2) spannen ein Parallelogramm auf. Dann ist die gerichtete Diagonale des Parallelogramms ein Repräsentant der Pfeilklasse von $(a_1 + b_1, a_2 + b_2)$, siehe Bild 2.3 rechts.

Beispiel 2.7 Gegeben sind die drei reellen Paare $a = (4, 0)$, $b = (0, 1)$ und $c = (-2, 2)$. Konstruieren Sie geometrisch die Summe $a + b + c$ und lesen Sie dann das Ergebnis aus der Geometrie ab. Berechnen Sie $a + b + c$ algebraisch und überprüfen Sie die beiden Ergebnisse auf Gleichheit. (Bitte beachten Sie: Es gilt die Rechenregeln $(a + b) + c = a + (b + c)$. Deshalb können wir die Klammern auch weglassen.)

Lösung: Das Bild 2.4 rechts und links zeigt die geometrische Konstruktion mit den Ergebnis $(2, 3)$. Die algebraische Rechnung ist $a + b + c = (4, 0) + (0, 1) + (-2, 2) = (2, 3)$. Die Ergebnisse stimmen überein. ▫



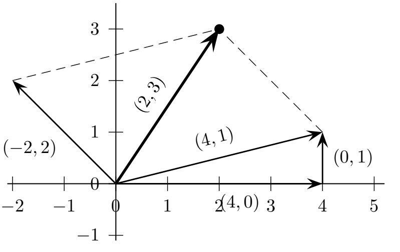


Bild 2.4: Drei Elemente addieren.

Multiplikation der Elemente aus $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$

Wir besprechen den Fall $\mathbb{R}^2$, alles gilt analog in $\mathbb{R}^3$ mit drei Koordinaten. Die Multiplikation eines reellen Paares a aus $\mathbb{R}^2$ mit einer reellen Zahl r ist koordinatenweise definiert. Ist $r = 0$, so ist das Ergebnis das Nulltupel, geometrisch der Punkt $(0, 0)$. Für $r = -1$ ist wegen $(-1)a = -a$ das Ergebnis das Gegentupel.

In der Punktsprache. Das reelle Paar (ra_1, ra_2) bezeichnet den Punkt der durch zentrische Streckung (oder Stauchung) mit dem Zentrum im Ursprung und Streckfaktor (Stauchungsfaktor) r aus (a_1, a_2) hervorgeht.

In der Pfeilsprache. Für (a_1, a_2) ist ein Pfeil der Pfeilklasse von (ra_1, ra_2) das r-fache eines Pfeiles von der Pfeilklasse von (a_1, a_2). Für $r > 0$ haben ra und a gleiche Richtung und Orientierung, für $r < 0$ haben ra und a gleiche Richtung und entgegengesetzte Orientierung.

Geraden in $\mathbb{R}^2$

Wir besprechen nun Geraden in $\mathbb{R}^2$, und beginnen mit einem Beispiel.

Beispiel 2.8 Gegeben sind $(4, 0) \in \mathbb{R}^2$ und $(-2, 1) \in \mathbb{R}^2$. Es werden aus $(4, 0) + t(-2, 1)$ die reellen Paare für $t = -1/4, 1, 2, 3$ berechnet und als Punkte in ein Koordinatensystem eingezeichnet. Es ist $t = -1/4 : (4, 0) + (-1/4)(-2, 1) = (4.5, -0.25)$, $t = 1 : (2, 1)$, $t = 2 : (0, 2)$, $t = 3 : (-2, 3)$. In Bild 2.5 links sehen Sie eine Visualisierung. Es ist erkennbar, dass alle vier Punkte auf einer Geraden liegen. Durch die Visualisierung einer größeren Anzahl von Punkten nach derselben Vorgehensweise wird dies noch deutlicher, siehe Bild 2.5 rechts. ▫

Sind $p \in \mathbb{R}^2$ und $o_2 \neq u \in \mathbb{R}^2$ gegeben, dann entspricht der Menge

$$\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x = p + tu, t \in \mathbb{R}\}$$

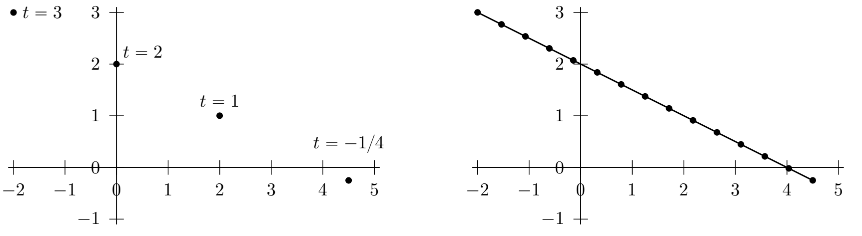


Bild 2.5: Zu Beispiel 2.8.

eine Gerade in der Ebene. Das reelle Zahlenpaar $p = (p_1, p_2)$ wird Stützelement (Stützpunkt, Stützvektor, Aufhängepunkt), das reelle Zahlenpaar $u = (u_1, u_2) \neq (0,0)$ wird Richtungselement (Richtungsvektor), der variable Faktor t wird reeller Parameter und die Gleichung $x = p + tu$ wird Parametergleichung oder Geradengleichung in Parameterform genannt. Man spricht von Parameterdarstellung oder Parameterform.

In Bild 2.6 links ist dargestellt, wie eine Gerade in $\mathbb{R}^2$ in Parameterform erklärt ist.

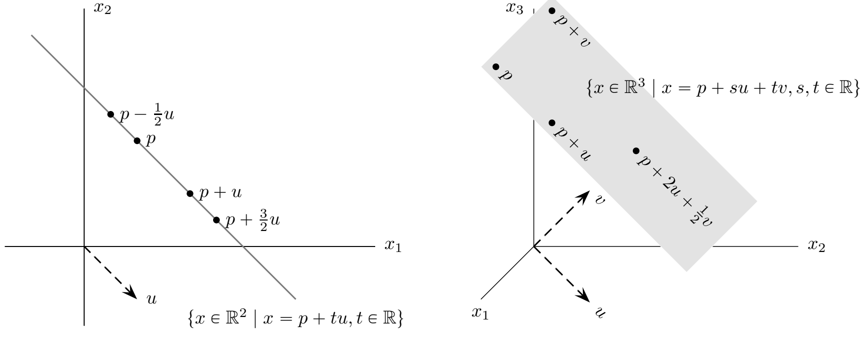


Bild 2.6: Parameterform einer Geraden in $\mathbb{R}^2$ links und einer Ebenen in $\mathbb{R}^3$ rechts.

Sowohl p ($t = 0$) als auch $p + u$ ($t = 1$) sind Elemente der Menge. Geometrisch bedeutet das, dass p und $p + u$ Punkte der Geraden sind. Hinweis zur Voraussetzung $u \neq o_2$. Wäre $u = (0,0)$, dann würde die Menge nur aus dem einen Element p bestehen, geometrisch also ein Punkt, und das ist sicher nicht das, was man sich unter einer Geraden vorstellt.

Beispiel 2.9 Die Menge $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid (x_1, x_2) = (4,0) + t(-2,1), t \in \mathbb{R}\}$ beschreibt eine Gerade in $\mathbb{R}^2$. Stützelement ist das reelle Paar $(4,0)$ und Richtungselement ist das reelle Paar $(-2,1)$. Der reelle Parameter heißt t. In Bild 2.5 rechts ist die Gerade dargestellt. □

Das Stützelement darf man auf der Geraden beliebig wählen, und das Richtungselement darf man mit einem beliebigen Faktor ungleich 0 multiplizieren. Einen Beweis zu diesen Aussagen finden Sie zum Beispiel in [14].

Beispiel 2.10 Die Gerade aus Beispiel 2.9 wird auch durch die Menge $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid (x_1, x_2) = (2,1) + t(-2,1), t \in \mathbb{R}\}$ modelliert. Stützelement ist jetzt das reelle Paar $(2,1)$.

Die Gerade aus Beispiel 2.9 wird auch durch die Menge $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid (x_1, x_2) = (4,0) + t(-4,2), t \in \mathbb{R}\}$ modelliert. Richtungselement ist jetzt das reelle Paar $(-4,2)$.

Die Gerade aus Beispiel 2.9 wird auch durch die Menge $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid (x_1, x_2) = (2,1) + t(-4,2), t \in \mathbb{R}\}$ modelliert. Stützelement ist jetzt das reelle Paar $(2,1)$ und Richtungselement ist jetzt das reelle Paar $(-4,2)$.

Alle angegebenen Mengen sind gleich, deshalb beschreiben sie alle dieselbe Gerade. □

Das letzte Beispiel zeigt, dass es unendliche viele Möglichkeiten gibt, dieselbe Gerade in Parameterform zu modellieren.

Beispiel 2.11 Prüfen Sie, ob das reelle Zahlenpaar $(8,-2) \in \mathbb{R}^2$ zur Menge gehört, die die Gerade aus Beispiel 2.9 beschreibt? Anders ausgedrückt: Liegt der Punkt $(8,-2)$ auf der Geraden von Beispiel 2.9? Wie steht es um das reelle Paar $(2,0) \in \mathbb{R}^2$?

Lösung: Das reelle Zahlenpaar $(8,-2)$ gehört genau dann zur Menge, wenn die Tupelgleichung $(8,-2) = (4,0) + t(-2,1)$ für (mindestens) ein $t \in \mathbb{R}$ erfüllt ist. Die Tupelgleichung $(8,-2) = (4,0) + t(-2,1)$ ist genau dann erfüllt, wenn das überbestimmte lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 8 &= 4 - 2t \\ -2 &= t \end{aligned}$$

lösbar ist. Dieses lineare Gleichungssystem ist eindeutig lösbar mit der Lösung $t = -2$. Also gehört das reelle Paar $(8,-2)$ zu der Menge, oder so gesagt: Der Punkt $(8,-2)$ liegt auf der Geraden.

Das reelle Zahlenpaar $(2,0)$ gehört nicht zur Menge (dies ist in Bild 2.5 auch deutlich erkennbar), denn das überbestimmte lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2 &= 4 - 2t \\ 0 &= t \end{aligned}$$

ist unlösbar. Der Punkt mit den Koordinaten $(2,0)$ liegt nicht auf der Geraden. □

Beispiel 2.12 Gegeben sind zwei Punkte $(2,1)$ und $(0,2)$. Bestimmen Sie eine Parameterform der Geraden durch diese zwei Punkte.

Lösung: Ein Richtungselement der Geraden ergibt sich als Differenz $(0,2) - (2,1) = (-2,1)$. Als Stützelement kann $(2,1)$ oder $(0,2)$ verwendet werden. Also ist $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid (x_1, x_2) = (2,1) + t(-2,1), t \in \mathbb{R}\}$ eine Parameterform der Geraden. □

Es gibt eine weitere Möglichkeit eine Gerade in $\mathbb{R}^2$ zu modellieren, die sogenannte Koordinatenform oder Koordinatendarstellung oder Darstellung ohne Parameter. Sind $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $(a, b) \neq (0, 0)$ gegeben, dann entspricht der Menge

$$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid ax_1 + bx_2 + c = 0\}$$

eine Gerade in der Ebene. Die Gleichung $ax_1 + bx_2 + c = 0$ heißt Geradengleichung in Koordinatenform oder Geradengleichung ohne Parameter. Man spricht von Koordinatendarstellung oder Koordinatenform.

Beispiel 2.13 Der Menge $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + 2x_2 - 4 = 0\}$ entspricht eine Gerade in der Ebene. Es handelt sich dabei um die Darstellung einer Geraden in Koordinatenform. Es ist $a = 1$, $b = 2$ und $c = -4$.

Da die drei linearen Gleichungen $x_1 + 2x_2 - 4 = 0$, $-x_1 - 2x_2 + 4 = 0$ und $1/\sqrt{5}x_1 + 2/\sqrt{5}x_2 - 4/\sqrt{5} = 0$ gleichwertig (äquivalent) sind, ist $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + 2x_2 - 4 = 0\} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid -x_1 - 2x_2 + 4 = 0\} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 1/\sqrt{5}x_1 + 2/\sqrt{5}x_2 - 4/\sqrt{5} = 0\}$, also beschreiben die drei Mengen dieselbe Gerade. □

Hinweis zur Voraussetzung $(a, b) \neq (0, 0)$. Wäre $a = 0$ und $b = 0$, dann wäre die Menge für $c \neq 0$ leer und für $c = 0$ wäre sie die (ganze) Menge $\mathbb{R}^2$. In beiden Fällen sich nicht das, was man sich unter einer Geraden vorstellt.

Beispiel 2.14 Gegeben ist die Gerade $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid (x_1, x_2) = (4, 0) + t(-2, 1), t \in \mathbb{R}\}$ aus Beispiel 2.9 in Parameterdarstellung. Modellieren Sie die Gerade in Koordinatendarstellung.

Lösung: Es ist $x_1 = 4 - 2t$ und $x_2 = t$. Setzt man $t = x_2$ in die erste Gleichung ein, so erhält man $x_1 = 4 - 2x_2$ oder $x_1 + 2x_2 - 4 = 0$. Dies ist eine Gleichung der Geraden in Koordinatenform. Natürlich ist die Gleichung $2x_1 + 4x_2 - 8 = 0$ oder $-x_1 - 2x_2 + 4 = 0$ oder $x_1 + 2x_2 = 4$ auch richtig. Die Gerade lässt sich daher auch als $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + 2x_2 - 4 = 0\}$ modellieren, eine Koordinatendarstellung. Die Koeffizienten sind $a = 1$, $b = 2$ und $c = -4$. □

Ist eine Gerade der Ebene in Parameterform gegeben, dann kann man die Gerade auch in Koordinatenform angeben und umgekehrt. Ist $(x_1, x_2) = (p_1, p_2) + t(u_1, u_2)$ die Geradengleichung in Parameterform, dann ist $u_2x_1 - u_1x_2 + p_2u_1 - p_1u_2 = 0$ die Geradengleichung in Koordinatenform, falls $u_2 \neq 0$ ist, und $-u_2x_1 + u_1x_2 + p_1u_2 - p_2u_1 = 0$, falls $u_1 \neq 0$ ist. Hier eine Begründung. Zunächst ist $x_1 = p_1 + tu_1$ und $x_2 = p_2 + tu_2$. Ist nun $u_2 \neq 0$, dann folgt aus $x_2 = p_2 + tu_2$ die Gleichung $t = (x_2 - p_2)/u_2$. Nun setzen wir für t den Term $(x_2 - p_2)/u_2$ in die Gleichung $x_1 = p_1 + tu_1$ ein und wir erhalten $u_2x_1 - u_1x_2 + p_2u_1 - p_1u_2 = 0$. Analog zeigt man, dass aus $u_1 \neq 0$ die Gleichung $-u_2x_1 + u_1x_2 + p_1u_2 - p_2u_1 = 0$ folgt.

Ist nun umgekehrt die Koordinatenform $ax_1 + bx_2 + c = 0$ einer Geraden in der Ebene gegeben, dann folgt $(x_1, x_2) = (-c/a, 0) + t(-b/a, 1)$, falls $a \neq 0$ ist, oder

$(x_1, x_2) = (0, -c/b) + t(1, -a/b)$, falls $b \neq 0$ ist. Hier eine Begründung. Ist $ax_1 + bx_2 + c = 0$ und $a \neq 0$, dann gilt $x_1 = (-bx_2 - c)/a$. Setzen wir nun $t = x_2$, so ist $x_1 = (-bt - c)/a$, also insgesamt $(x_1, x_2) = ((-bt - c)/a, t)$. Analog zeigt man, dass $(x_1, x_2) = (0, -c/b) + t(1, -a/b)$ aus $ax_1 + bx_2 + c = 0$ und $b \neq 0$ folgt. Damit ist alles begründet.

Mit den den soeben entwickelten Umrechnungsformeln können obige Beispiele verifiziert werden.

Es gibt mit der Parameterform und der Koordinatenform zwei gleichberechtigte, aber sehr verschiedene Methoden, eine Gerade im $\mathbb{R}^2$ zu modellieren: Durch eine Parametergleichung oder durch eine lineare Gleichung. Die Parameterform kann dabei als die Lösung der linearen Gleichung $ax_1 + bx_2 + c = 0$ angesehen werden, weil sie zu jedem Parameter t genau einen Punkt der Geraden liefert.

Beispiel 2.15 Stellen Sie fest, ob der Punkt $(-3, 2)$ auf der Geraden $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + 2x_2 - 4 = 0\}$ liegt.

Lösung: Tut er nicht, denn setzt man $x_1 = -3$ und $x_2 = 2$ in die Gleichung $x_1 + 2x_2 - 4 = 0$ ein, so ist die Gleichung nicht erfüllt, also ist $(-3, 2)$ kein Element der Menge, und somit liegt der Punkt nicht auf der Geraden. □

Beispiel 2.16 Gegeben ist die Gerade $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x_1 + 3x_2 + 4 = 0\}$ in Koordinatendarstellung. Modellieren Sie die Gerade in Parameterdarstellung.

Lösung: Es ist $x_1 = -(3/2)x_2 - 2$ und $x_2 = 0x_1 + 1x_2 + 0$. Setzten wir nun $x_2 = t$, so ist $x_1 = -(3/2)t - 2$. Damit ist $(x_1, x_2) = (-2 - (3/2)t, t) = (-2, 0) + t(-3/2, 1)$. Also ist $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid (x_1, x_2) = (-2, 0) + t(-3/2, 1), t \in \mathbb{R}\}$ die Gerade in Parameterdarstellung mit Stützelement $(-2, 0)$, Richtungselement $(-3/2, 1)$ und Parameter t.

Alternativ: Ist $x_2 = 0$, dann ist $x_1 = -2$, also ist $(-2, 0)$ ein Punkt auf der Geraden. Ist $x_1 = 0$, dann ist $x_2 = -4/3$ ein Punkt auf der Geraden. Dann ist $(-2, 0) - (0, -4/3) = (-2, 4/3)$ ein Richtungselement. Also ist $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid (x_1, x_2) = (-2, 0) + t(-2, 4/3), s \in \mathbb{R}\}$ die Gerade in Parameterform mit Stützelement $(-2, 0)$, Richtungselement $(-2, 4/3)$ und Parameter s. □

Beispiel 2.17 Aus der Schule kennt man die Geradengleichung $y = mx + b$. Hierbei ist $m \in \mathbb{R}$ die Steigung und $b \in \mathbb{R}$ der Achsenabschnitt. Damit wird also eine Gerade in Koordinatenform modelliert. Geben Sie eine Parameterform an.

Lösung: Es ist also $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = mx + b\}$ die Gerade in Koordinatenform. Gesucht ist eine Beschreibung in Parameterform. Es ist $y = mx + b$ und $x = 1x + 0$. Setzen wir nun $x = t$, so ist $y = mt + b$. Damit ist $(x, y) = (t, mt + b) = (t, mt) + (0, b) = t(1, m) + (0, b)$. Also ist $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) = (0, b) + t(1, m)\}$ die Gerade in Parameterdarstellung mit Stützelement $(0, b)$, Richtungselement $(1, m)$ und Parameter t. □

Der Bildmenge einer Abbildung des Typs

$$f = \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & f(t) = p + tu \end{cases}$$

zu gegebenem $p \in \mathbb{R}^2$ und $o_2 \neq u \in \mathbb{R}^2$ entspricht eine Gerade in $\mathbb{R}^2$.

Beispiel 2.18 Der Bildmenge der Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit $f(t) = (4, 0) + t(-2, 1)$ entspricht die Gerade aus Beispiel 2.9. Dieselbe Gerade ist aber auch die Bildmenge der Abbildung $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit $g(s) = (2, 1) + s(2, -1)$. ▫

Geraden in $\mathbb{R}^3$

In $\mathbb{R}^3$ lässt sich jede Gerade durch eine Menge der Form

$$\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid (x_1, x_2, x_3) = (p_1, p_2, p_3) + t(u_1, u_2, u_3), t \in \mathbb{R}\}$$

beschreiben. Hierbei ist $p = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3$ ein Stützelement (Stützvektor, Aufhängepunkt), $u = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3 \backslash \{(0, 0, 0)\}$ ein Richtungselement (Richtungsvektor), und der variable Faktor $t \in \mathbb{R}$ wird Parameter genannt. Eine Gleichung der Form $x = p + tu$ nennt man Geradengleichung in Parameterform. Hinweis zur Voraussetzung $u \neq o_3$. Im Fall $u_1 = u_2 = u_3 = 0$ ist $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid (x_1, x_2, x_3) = (p_1, p_2, p_3) + t(u_1, u_2, u_3), t \in \mathbb{R}\} = \{(p_1, p_2, p_3)\}$, das heißt die Menge würde nur aus dem Stützelement bestehen.

Beispiel 2.19 Die Menge $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid (x_1, x_2, x_3) = (1, 0, 1) + t(1, 3, 3), t \in \mathbb{R}\}$ beschreibt eine Gerade in $\mathbb{R}^3$. Stützelement ist das reelle Tripel $(1, 0, 1)$ und Richtungselement ist das reelle Tripel $(1, 3, 3)$. Der reelle Parameter heißt t.

Dieselbe Gerade wird auch durch die Menge $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid (x_1, x_2, x_3) = (2, 3, 4) + s(-1, -3, -3), s \in \mathbb{R}\}$ modelliert. Stützelement ist das reelle Tripel $(2, 3, 4)$ und Richtungselement ist das reelle Tripel $(-1, -3, -3)$. Der reelle Parameter heißt s. ▫

Der Bildmenge einer Abbildung des Typs

$$f = \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ t & \mapsto & f(t) = p + tu \end{cases}$$

zu gegebenem $p \in \mathbb{R}^3$ und $o_3 \neq u \in \mathbb{R}^3$ entspricht eine Gerade in $\mathbb{R}^3$.

Geraden in $\mathbb{R}^3$ lassen sich nicht durch eine einzelne lineare Gleichung $ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0$ darstellen, da deren Lösungsmenge im Allgemeinen Ebenen beschreiben. Hingegen können Lösungsmengen von linearen Gleichungssystemen mit zwei linearen Gleichungen, die den Rang zwei haben, geometrisch als Geraden interpretiert werden, wie das folgende Beispiel 2.20 zeigt.