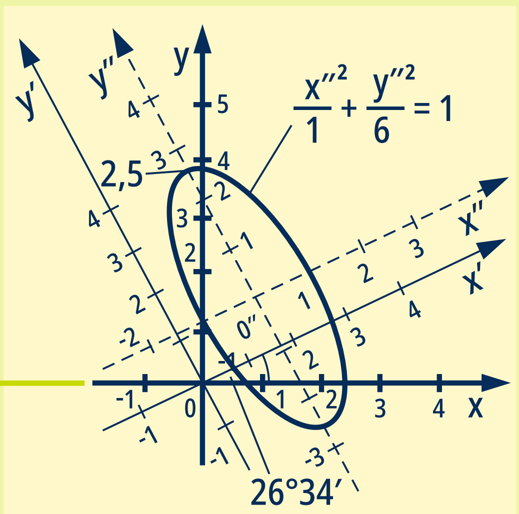
Hans-Jochen Bartsch
Michael Sachs

Taschenbuch mathematischer Formeln für Ingenieur- und Naturwissenschaften



25., aktualisierte Auflage

HANSER

Bartsch

Taschenbuch mathematischer Formeln für Ingenieur- und Naturwissenschaften

Hans-Jochen Bartsch

Taschenbuch mathematischer Formeln

für Ingenieur- und Naturwissenschaften

bearbeitet von Michael Sachs

25., aktualisierte Auflage

HANSER

Autor:
Dr.-Ing. Hans-Jochen Bartsch

Bearbeiter:
Prof. Dr. Michael Sachs, Hochschule München
Fakultät für angewandte Naturwissenschaften und Mechatronik
sci.hm.edu

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek:
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Internet: www.hanser-fachbuch.de

Lektorat: Dipl.-Ing. Natalia Silakova-Herzberg
Herstellung: Frauke Schafft
Satz: Dr. Steffen Naake, Limbach-Oberfrohna
Titelbild: © Prof. Dr. Michael Sachs
Covergestaltung: Max Kostopoulos
Coverkonzept: Marc Müller-Bremer, www.rebranding.de, München
Druck und Binden: Friedrich Pustet GmbH & Co. KG, Regensburg
Printed in Germany

Print-ISBN 978-3-446-47655-4
E-Book-ISBN: 978-3-446-47804-6

Vorwort zur 25. Auflage

Druckfehler der Vorgängerauflagen habe ich wie immer korrigiert, dafür sei allen aufmerksamen Leserinnen und Lesern gedankt, die mir Hinweise geschickt haben.

Bei den Mehrfach-Integralen wurden die am häufigsten vorkommenden Flächen- und Volumenelemente in einer Tabelle zusammengestellt.

Mein Dank geht an Frau Natalia Silakova vom Carl Hanser Verlag für die Betreuung und an Herrn Dr. Steffen Naake für die sorgfältige Arbeit des Umbruches und die Gestaltung der endgültigen Fassung.

München, im Februar 2023

Michael Sachs
Bearbeiter

Aus dem Vorwort zur 23. Auflage

Das *Taschenbuch Mathematischer Formeln* soll vornehmlich Studierenden von Ingenieurstudiengängen an Hochschulen für Angewandte Wissenschaften (ehemals Fachhochschulen) und an Universitäten ein nützliches Hilfsmittel zur Bewältigung des Mathematikstoffes eines technischen oder naturwissenschaftlichen Studiums sein. Darüber hinaus will es auch Praktikern im Beruf helfen, ihre benötigten Kenntnisse aufzufrischen.

Seit über 50 Jahren ist dieses Buch auf dem Markt und Generationen von Studierenden und Anwendern der Mathematik ein Begriff geworden. Im Januar 2008 ist der Verfasser, Dr.-Ing. Hans-Jochen BARTSCH, nachdem er noch die 21. Auflage besorgt hatte, am Beginn der Vorbereitungen zur 22. Auflage verstorben. Gerne habe ich die mir vom Fachbuchverlag Leipzig angebotene Aufgabe, das Werk zu bearbeiten und weiterzuführen, wahrgenommen, und betreue nun seinen Fortgang seit der 22. Auflage.

Das *Sachwortverzeichnis* wurde bewusst redundant und sehr umfangreich gestaltet, um dem Leser die Möglichkeit eines raschen Quereinstiegs zu einem gewählten Thema oder Begriff zu gewähren. Wohl kaum jemand wird so ein Buch linear von vorne nach hinten durchlesen. Das Sachwortverzeichnis soll daher auch zum „Stöbern“ und Diagonallesen einladen und Interesse an der Materie erwecken.

Zahlreiche *Beispiele*, eingeleitet und beendet mit ⧫, zeigen die abstrakten mathematischen Formeln in ihrer Anwendung, wobei Wert gelegt wurde auf Einfachheit der Rechnung, um das Verständnis der Grundsätze nicht zu erschweren.

Kapitel 14 enthält *Integraltabellen* mit fast 600 unbestimmten und bestimmten Integralen. Eine zusätzliche Übersicht am Kapitelanfang ermöglicht einen raschen Zugriff auf das gesuchte Integral. Ein *Daumenregister* erleichtert das Auffinden der einzelnen Kapitel.

Dem Wesen einer Formelsammlung gemäß kann und will das Buch kein Lehrbuch ersetzen, schon gar nicht in der Mathematik, wo die Herleitung neuen Wissens aus bereits vorhandenem nach den strengen Regeln des logischen Schließens oberstes Gebot ist. In diesem Buch sind Herleitungen nur in Ausnahmefällen angedeutet, es soll in erster Linie ein Nachschlagewerk für Studierende technischer Fachrichtungen sein. Gleichwohl ist die Stofffülle so in Kapitel gegliedert und sind diese Kapitel so aufgebaut, dass sie auch einzeln zur Wiederholung eines schon einmal gelernten Stoffes gelesen werden können.

Möge der BARTSCH auch nach dem Tode seines Verfassers weiterhin ein treuer und zuverlässiger Begleiter in Studium und Beruf bleiben.

München, im November 2013

Michael Sachs
Bearbeiter

Inhaltsverzeichnis

1 Logik, Mengen, Zahlensysteme

1.1 Aussagenlogik

1.1.1 Allgemeines

Aussage, Aussageform

Die *Aussagenlogik* betrachtet die Verknüpfungen elementarer Aussagen, wobei die Aussagen nicht inhaltlich analysiert werden.

Eine *Aussage* ist ein sprachliches Gebilde, das entweder wahr oder falsch ist.

In der Aussagenlogik gelten zwei Grundprinzipien:

- Jede Aussage hat genau einen *Wahrheitswert* „wahr" (kurz: w oder 1), „falsch" (kurz: f oder 0). (Satz der *Zweiwertigkeit*, der den *Satz vom ausgeschlossenen Dritten* und den *Satz vom ausgeschlossenen Widerspruch* beinhaltet, s. 1.1.3)
- Der Wahrheitswert einer Aussagenverknüpfung hängt nur von den Wahrheitswerten ihrer Bestandteile ab, nicht aber von deren Inhalt (*Extensionalitätsprinzip*).

Primaussage (*Literal*): Formel ohne logische Verknüpfung (nur p oder $\bar{p}$).

Zusammengesetzte Aussage (aussagenlogische *Formel*, *Ausdruck*, *Aussageform*): enthält Primaussagen und Aussagenverknüpfungen und ist eine endliche Zeichenfolge (*Wort*), bestehend aus aussagenlogischen *Variablen*, *Junktoren* und technischen Zeichen.

Binäre (zweiwertige, BOOLE*sche*) *Variablen* $p, q, r, x_i, \varphi, \ldots$ sind Platzhalter für konkrete Aussagen und sind selbst Formeln.

$A \models \varphi$ heißt: „A erfüllt φ", „A ist Modell für φ".

Durch Belegung der Variablen wird eine Aussageform zur Aussage.

♦ **Beispiele**

Die *einfache, einstellige* Aussage „19 ist eine Primzahl" ist wahr.

Die *dreistellige* Aussage „$8 - 3 = 4$" ist falsch.

„$4x - 3 = 5$" ist nur für $x = 2$ eine wahre Aussage.

„Es regnet." ist eine Aussage φ, die vom betrachteten Ort und der Zeit (Interpretation A) abhängt: $A \models \varphi$.

„Es gibt außerhalb der Erde intelligente Lebewesen." ist eine Aussage, deren Wahrheitswert nicht bekannt ist.

„Wenn eine natürliche Zahl die Endziffer 0 oder 5 hat, ist sie durch 5 teilbar." ist eine wahre, zusammengesetzte Aussage.

„Fischers Fritz", „Der hohe Berg" und „Wann kommst du?" sind keine Aussagen; sie haben keinen Wahrheitswert. ♦

Wahrheits(wert)funktion

Eine *Wahrheits(wert)funktion* F_n^k (BOOLE*sche Funktion*) ordnet jedem k-Tupel von Wahrheitswerten der Argumente einen Wahrheitswert zu. n ist dabei die dezimale Äquivalente der Bitfolge der Werte von F_n^k.

♦ **Beispiel**

NAND $:= \bar{p} \vee \bar{q} = F_7^2$, denn $(0111)_2 = (7)_{10}$, siehe 1.1.2 und 1.1.4. ♦

Bei k Variablen sind 2^k Belegungen möglich, für jede kann der Funktionswert wahr oder falsch sein. Es gibt also genau 2^{2^k} BOOLEsche Funktionen von k Argumenten.

Junktoren

> *Junktoren* sind logische Zeichen, die Variablen oder Ausdrücke zu neuen Ausdrücken verbinden. Sie sind durch eine *Wahrheitstafel* (*Wahrheitstabelle*) charakterisiert.

Nullstellige Junktoren:	$\top$	*Verum*, 1-Element
(*Aussagenkonstanten*)	$\perp$	*Falsum*, 0-Element
Einstelliger Junktor:	$\neg$	Negation (auch $\sim$ oder Überstrich)
Zweistellige Junktoren:	$\wedge$	Und
	$\vee$	Oder
	$\Rightarrow$	Implikation
	$\Leftrightarrow$	Äquivalenz

Bindungen bei zusammengesetzten Ausdrücken gestatten das Weglassen von Klammern:

(1) $\neg$ bindet stärker als zweistellige Junktoren.

(2) $\wedge$ bindet stärker als $\vee$ („Punkt vor Strich").

(3) $\Rightarrow$, $\Leftarrow$ und $\Leftrightarrow$ binden untereinander gleich stark, aber $\wedge$ und $\vee$ binden stärker als $\Rightarrow$, $\Leftarrow$ und $\Leftrightarrow$.

1.1.2 Ein- und zweistellige BOOLEsche Funktionen

Negation, Komplement (einstellig)

Die Wahrheitswerte von p und $\neg p$ ($\sim p$, $\bar{p}$) sind immer verschieden.

Wahrheitstafel der zweistelligen Grundfunktionen

Name		*Konjunktion* UND *logisches Produkt*	*Disjunktion* ODER *Alternative*	*Implikation* *Subjunktion*	*Äquivalenz* *Äquijunktion*
lies		„p und q“	„p oder q“	„wenn p dann q“	„p genau dann, wenn q“
p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

Wahrheitstafel der erweiterten Funktionen der Informatik

Name		NAND negiertes UND SHEFFER-Fkt.	NOR „weder p noch q“ NICOD-Fkt.	*Replikation* „falls“	*Antivalenz* „entweder p oder q“
p	q	$\neg(p \wedge q) = p \uparrow q$	$\neg(p \vee q) = p \downarrow q$	$p \Leftarrow q$	$\neg(p \Leftrightarrow q)$
1	1	0	0	1	0
1	0	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1
0	0	1	1	1	0

Bemerkungen zu beiden Tabellen

Konjunktion, *logisches Produkt* (UND, AND): auch $p\,q$, $p \cdot q$, $p \,\&\, q$.

Disjunktion, *Alternative* (einschließendes ODER, OR): auch $p + q$.
Die Disjunktion schließt $p = q = 1$ nicht aus.

Implikation, *Subjunktion* (logische Folgerung): $(p \Rightarrow q) = \bar{p} \vee q$.
Kontraposition: $(p \Rightarrow q) = (\bar{q} \Rightarrow \bar{p})$.
Sprechweisen für $p \Rightarrow q$: „p impliziert q“, „p ist hinreichend für q“, „q ist notwendig für p“.

Äquivalenz, *Adjunktion*: $(p \Leftrightarrow q) = (p \wedge q) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q})$

Antivalenz (ausschließendes Entweder-Oder, XOR):
$\neg(p \Leftrightarrow q) = p\bar{q} \vee \bar{p}q = \neg(q \Leftrightarrow p)$.

Tautologie, Erfüllbarkeit

Tautologien (*Identitäten*, *universell gültige Formeln*) sind unabhängig von der Belegung der Variablen immer wahr, *Kontradiktionen* immer falsch.

Eine Formel ist *erfüllbar*, wenn es mindestens eine Belegung ihrer Variablen gibt, für die die Formel wahr wird.

♦ **Beispiele für Tautologien**

$p \Rightarrow (q \Rightarrow p), \quad p \Rightarrow (p \vee q), \quad (p \wedge (\bar{q} \Rightarrow \bar{p})) \Rightarrow q.$ ♦

Funktionelle Vollständigkeit

Eine Menge von Junktoren und BOOLEschen Funktionen heißt *funktionell vollständig*, wenn jede andere BOOLEsche Funktion mit ihr ausgedrückt werden kann. Es sind dies

$\{\neg, \wedge, \vee\}$, $\{\neg, \wedge\}$, $\{\neg, \vee\}$, NAND, NOR.

Direkte Beweisführung

V Voraussetzung (*Prämisse*, wahr), B die zu beweisende Behauptung.

> $V \Rightarrow B$, V ist *hinreichende Bedingung* für B, B ist Folgerung (*Konklusion*). Behauptung B ist bewiesen, wenn sie aus $V = \mathsf{w}$ folgt.
>
> $V \Leftrightarrow B$, V ist *hinreichende und notwendige Bedingung* für B.

Im Falle $B \Rightarrow V$ ist V nur notwendige, jedoch nicht hinreichende Bedingung für B und damit kein Beweis für B, selbst wenn $V = \mathsf{w}$ ist.

♦ **Beispiel**

Man beweise direkt den Satz: Für $a, b \geq 0$ gilt B: $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ (Das arithmetische Mittel zweier Zahlen ist stets mindestens so groß wie ihr geometrisches Mittel).

Eine geeignete wahre Aussage ist $V: \ (a-b)^2 \geq 0$.

$$V \Rightarrow a^2 + b^2 - 2ab \geq 0 \Rightarrow a^2 + b^2 + 2ab \geq 4ab \Rightarrow (a+b)^2 \geq 4ab$$
$$\Rightarrow a + b \geq 2\sqrt{ab} \Rightarrow \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Rightarrow B \quad \text{q. e. d.}$$ ♦

Indirekte Beweisführung, Widerspruchsbeweis

> B ist bewiesen, wenn man aus der negierten Annahme $\bar{B}$ einen Widerspruch zu $\bar{B}$ oder zu einer anderen bereits bewiesenen Aussage herleiten kann.

♦ **Beispiel**

Man beweise indirekt die Behauptung B: „Es gibt keine größte natürliche Zahl.“

Annahme $\overline{B}$: „Es gibt eine größte natürliche Zahl.“ Diese sei etwa N. Dann ist auch $N + 1$ eine natürliche Zahl und größer als N im Widerspruch zu der Annahme, N sei die größte. ♦

Beweis durch vollständige Induktion

Zu beweisen ist eine Aussage der Gestalt: „Für alle natürlichen Zahlen n gilt $B(n)$.“

Beweis-Schema:

(1) *Induktionsanfang*: Beweise Behauptung $B(n_0)$, meist $n_0 = 0$ oder 1.
(2) *Induktionsvoraussetzung*: Nimm an, $B(n)$ sei wahr für ein $n \geq n_0$.
(3) *Induktionsschritt*: Beweise: aus $B(n)$ folgt $B(n + 1)$.

♦ **Beispiel**

Man beweise die Summenformel: Für die Summe der ersten n natürlichen Zahlen gilt $1 + 2 + \ldots + n = n(n + 1)/2$.

(1) $n = 1$: $1 = 1 \cdot 2/2 = 1$, die Behauptung ist wahr für $n = 1$.
(2) Annahme:
Die Behauptung ist wahr für n, also $1 + 2 + \ldots + n = n(n + 1)/2$.
(3) Unter der Voraussetzung (2) ist nun zu zeigen, dass die Behauptung auch für $n + 1$ gilt, dass also $1 + 2 + \ldots + n + (n + 1) = (n + 1)(n + 2)/2$ ist:
Beweis: $1 + 2 + \ldots + n + (n + 1) = \dfrac{n(n + 1)}{2} + (n + 1)$
$= \dfrac{n(n + 1) + 2n + 2}{2} = \dfrac{n^2 + 3n + 2}{2} = \dfrac{(n + 1)(n + 2)}{2}$ q. e. d. ♦

1.1.3 BOOLEsche Algebra

Ein *Axiom* ist eine grundlegende Aussage, die als in sich einsichtig angesehen wird und daher keines Beweises bedarf. Axiome stehen am Anfang deduktiver mathematischer Theorien und dienen als Ausgangspunkt zur Ableitung weiterführender Ergebnisse.

Deduktiv: Ableitung des Besonderen aus dem Allgemeinen (Gegensatz: *induktiv*)

Sei M eine Menge von BOOLEschen Variablen, versehen mit den beiden Junktoren $\wedge$ und $\vee$. Das Tripel $\langle M, \wedge, \vee\rangle$ heißt dann BOOLE*sche Algebra* (BOOLE*scher Verband*). Für sie gelten folgende Axiome ($p, q, r, \bar{p} \in M$):

Kommutativgesetze: $p \wedge q = q \wedge p, \quad p \vee q = q \vee p$

Assoziativgesetze: $p \wedge (q \wedge r) = (p \wedge q) \wedge r = p\,q\,r$
$p \vee (q \vee r) = (p \vee q) \vee r = p \vee q \vee r$

Distributivgesetze: $p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r) = pq \vee pr$
$p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

Idempotenz: $p \wedge p = p, \quad p \vee p = p$

Neutrale Elemente: $p \wedge 1 = p, p \wedge 0 = 0, \quad p \vee 1 = 1, p \vee 0 = p$

Komplementäres Element: Zu jedem p existiert ein komplementäres $\bar{p}$.
$p \wedge \bar{p} = 0$ (*Widerspruch, Kontradiktion*)
$p \vee \bar{p} = 1$ (*ausgeschlossenes Drittes*)
$\neg 1 = 0 \quad \neg 0 = 1$

DE MORGAN*sche Regeln*:
$$\overline{p \wedge q} = \bar{p} \vee \bar{q}, \quad \overline{p \vee q} = \bar{p} \wedge \bar{q}$$

♦ **Beispiele**

(1) Man negiere den Ausdruck $A = (x_1 \vee \bar{x}_2) \wedge x_3$:
$\bar{A} = \overline{(x_1 \vee \bar{x}_2) \wedge x_3} = \overline{x_1 \vee \bar{x}_2} \vee \bar{x}_3 = \bar{x}_1 x_2 \vee \bar{x}_3$.

(2) Man negiere den Ausdruck $B =$ „$x < 1$ oder $x \geq 5$“:
$\bar{B} = \neg B =$„$x \geq 1$ und zugleich $x < 5$“ (nach DE MORGAN). ♦

Rechenregeln

$\bar{\bar{p}} = p$ (*Involutionsregel, doppelte Verneinung*)

$p \wedge (p \vee q) = p \qquad p \vee (p \wedge q) = p$

$p \wedge (q \vee \bar{q}) = p \qquad p \vee (q \wedge \bar{q}) = p$

$p \wedge (\bar{p} \vee q) = p \wedge q \qquad p \vee (\bar{p} \wedge q) = p \vee q$

$(p \wedge q) \vee (p \wedge \bar{q}) = p \qquad (p \vee q) \wedge (p \vee \bar{q}) = p$

(*Reduktionsregeln*)

$(p \vee \bar{r}) \wedge (q \vee r) = (p \wedge r)(q \wedge \bar{r})$

$(p \Rightarrow q) = \bar{p} \vee q \qquad \overline{p \Rightarrow q} = p \wedge \bar{q}$

$(p \Rightarrow q) = (\bar{q} \Rightarrow \bar{p})$ (*Kontraposition*)

$(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) = ((p \wedge q) \Rightarrow r)$

$\overline{p \Leftrightarrow q} = (p \Leftrightarrow \bar{q}) = (\bar{p} \Leftrightarrow q)$

$(p \Leftrightarrow q) = (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \qquad (p \Leftrightarrow q) = (p \wedge q) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q})$

♦ **Beispiel**

$(p \vee q)(\bar{p} \vee r)(q \vee r) = (p\bar{p} \vee pr \vee q\bar{p} \vee qr)(q \vee r) = (pr \vee \bar{p}q \vee qr)(q \vee r)$
$= prq \vee prr \vee q\bar{p}q \vee q\bar{p}r \vee qrq \vee qrr = pqr \vee pr \vee \bar{p}q \vee \bar{p}qr \vee qr$
$= (p \vee \bar{p})qr \vee pr \vee \bar{p}q \vee qr = pr \vee \bar{p}q \vee qr.$ ♦

Schaltalgebra

Die *Schaltalgebra* ist eine besondere BOOLEsche Algebra zur Kennzeichnung von Schaltzuständen. Die BOOLEsche Funktion wird zur *Schaltfunktion*. Schaltalgebra und Aussagenalgebra sind *isomorph* durch die Korrespondenz:

Schalter offen (kein Strom) $\widehat{=}$ 0, Schalter geschlossen (Strom) $\widehat{=}$ 1.

1.1.4 Normalformen

Der Term K_n^k heißt *Elementarkonjunktion* oder *Min-Term*, wenn er die konjunktive Bindung (d. h. mit $\wedge$) aller k Variablen (negiert oder nicht) enthält:

$$K_n^k = \bigwedge_{\nu=1}^{k} x_\nu^{\varepsilon_\nu} = x_1^{\varepsilon_1} \wedge x_2^{\varepsilon_2} \wedge \ldots \wedge x_k^{\varepsilon_k}, \quad n = 0, 1, \ldots, 2^k - 1.$$

Dabei sind die $\varepsilon_i \in \{0,1\}$ und x_ν^1 bezeichnet das positive Literal x_ν, x_ν^0 dagegen das negative $\bar{x}_\nu$. Ein Min-Term wird nur für eine einzige Variablenbelegung wahr.

Der Term D_n^k heißt *Elementardisjunktion* oder *Max-Term*, wenn er die disjunktive Bindung (d. h. mit $\vee$) aller k Variablen (negiert oder nicht) enthält:

$$D_n^k = \bigvee_{\nu=1}^{k} x_\nu^{\varepsilon_\nu} = x_1^{\varepsilon_1} \vee x_2^{\varepsilon_2} \vee \ldots \vee x_k^{\varepsilon_k}, \quad n = 0, 1, \ldots, 2^k - 1.$$

Ein Max-Term wird nur für eine einzige Variablenbelegung falsch. Die Anzahl der möglichen Elementarterme beträgt jeweils 2^k.

Die Interpretation der Bitfolge $(\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_k)_2$ als Binärzahl liefert die dezimale Äquivalente n.

♦ **Beispiele**

(1) Alle acht 3-stelligen Min-Terme: $pqr, pq\bar{r}, p\bar{q}r, p\bar{q}\bar{r}, \bar{p}qr, \bar{p}q\bar{r}, \bar{p}\bar{q}r, \bar{p}\bar{q}\bar{r}$.

(2) $x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4x_5\bar{x}_6 \,\widehat{=}\, (100110)_2 = (38)_{10}$, also $K_{38}^6 = x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4x_5\bar{x}_6$.

(3) $x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4 \,\widehat{=}\, (1001)_2 = (9)_{10}$, also $D_9^4 = x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4$. ♦

Disjunktive Normalform (DNF) einer BOOLEschen Funktion

Eine disjunktive Verknüpfung von Elementarkonjunktionen heißt *disjunktive Normalform* (*Summenform*, *Reihen-Parallelschaltung*) der BOOLEschen Funktion F, wenn in ihr genau die Elementarkonjunktionen auftreten, für die $K_n^k = 1$, F also wahr ist.

Konjunktive Normalform (KNF) einer BOOLEschen Funktion

Eine konjunktive Verknüpfung von Elementardisjunktionen heißt *konjunktive Normalform* (*Produktform*, *Parallel-Reihenschaltung*) der BOOLEschen Funktion F, wenn in ihr genau die Elementardisjunktionen auftreten, für die $D_n^k = 0$, F also falsch ist.

♦ **Beispiel**

Eine BOOLEsche Funktion F ordnet den drei Eingangsvariablen x_1, x_2, x_3 die Ausgangsvariable y zu gemäß nachfolgender Tabelle:

n	x_1	x_2	x_3	y
0	0	0	0	1
1	0	0	1	1
2	0	1	0	1
3	0	1	1	1
4	1	0	0	1
5	1	0	1	1
6	1	1	0	0
7	1	1	1	0

Man berechne die DNF von F und vereinfache sie soweit wie möglich:

$$\begin{aligned} y &= K_0^3 \vee K_1^3 \vee K_2^3 \vee K_3^3 \vee K_4^3 \vee K_5^3 \\ &= \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3 \\ &= \bar{x}_1\bar{x}_2(\bar{x}_3 \vee x_3) \vee \bar{x}_1x_2(\bar{x}_3 \vee x_3) \vee x_1\bar{x}_2(\bar{x}_3 \vee x_3) \\ &= \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1x_2 \vee x_1\bar{x}_2 = \bar{x}_1(\bar{x}_2 \vee x_2) \vee x_1\bar{x}_2 = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2. \end{aligned}$$

Da in nur zwei Zeilen $K_n^3 = 0$ auftritt, ist es günstiger, die DNF von $\bar{y}$ zu berechnen und das Ergebnis zu invertieren:

$$\bar{y} = K_6^3 \vee K_7^3 = x_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1x_2x_3 = x_1x_2(\bar{x}_3 \vee x_3) = x_1x_2.$$

Invertiert: $y = \overline{x_1x_2} = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2$ (DE MORGAN) wie oben. ♦

Terme, die sich nicht weiter vereinfachen lassen, heißen *Primimplikanten*.

1.2 Prädikatenlogik

Die *Prädikatenlogik* (auch *Prädikatenkalkül*) berücksichtigt Eigenschaften von und Beziehungen zwischen (meist) mathematischen Objekten (*Individuen*) und ermöglicht es, kompliziertere logische Beziehungen zu erfassen. Eine *Aussage* entsteht, indem man den *Individuenvariablen* bestimmte Bezeichnungen (Werte) zuweist (Interpretation) bzw. sie durch *Quantifizierung* bindet.

> Ein *k-stelliges Prädikat über dem Individuenbereich I* ist eine Abbildung $P(x_1, x_2, \ldots, x_k)$, die jedem k-Tupel von Individuen aus I eindeutig einen Wert aus $\{0, 1\}$ bzw. $\{$„falsch“, „wahr“$\}$ zuordnet.

♦ **Beispiele**

(1) Einstelliges Prädikat $P(x) = 1$ genau dann, wenn x prim ($I = \mathbb{N}$).

(2) Zweistelliges Prädikat $P(x, y) = 1$ genau dann, wenn $x < y$ ($I = \mathbb{N}$). ♦

Quantoren

> *Quantoren* vereinigen eine Variable und eine Formel zu einer neuen Formel. Eine Aussageform lässt sich durch Quantifizierung in eine Aussage überführen.

Allquantor (Generalisator) $\forall$

$\forall x\ P(x)$ oder $\forall x : P(x)$	„Für alle x gilt $P(x)$.“
	„$P(x)$ ist für jeden Wert von x erfüllt.“
relativiert:	
$\forall x \in A\ P(x)$	„Für alle x aus A gilt $P(x)$.“

Existenzquantor (Partikularisator) $\exists$

$\exists x\ P(x)$	„Es gibt (mindestens) ein x mit $P(x)$.“

Wirkungsbereich der Quantoren

$\forall$ und $\exists$ beziehen sich auf die unmittelbar folgende Individuenvariable. Eine an einer Stelle eines Ausdrucks vorkommende Individuenvariable x heißt *frei* an dieser Stelle, wenn sie dort nicht im Wirkungsbereich eines Quantors vorkommt, andernfalls heißt sie *gebunden*.

♦ **Beispiel**

$\forall x \exists y\ (x < y)$, Individuenbereich $I = \mathbb{R}$.
Lies: „Zu jedem reellen x gibt es ein reelles y, welches größer als x ist.“ ♦

Allgemeingültiger Ausdruck, Tautologie

Ein Ausdruck H heißt *allgemeingültig*, wenn für jede Belegung seiner freien Variablen über I gilt: $H = 1$ (wahr). H heißt *erfüllbar*, wenn eine Belegung über I existiert, für die $H = 1$ wird.

Gegensatz: *Kontradiktion*, wenn für jede Belegung gilt $H = 0$.

Austausch von Quantoren durch Negation ($P(x)$ beliebig)

$$\exists x\ P(x) = \neg\forall x\ \neg P(x) \qquad \forall x\ P(x) = \neg\exists x\ \neg P(x)$$

$$\neg\exists x\ P(x) = \forall x\ \neg P(x) \qquad \neg\forall x\ P(x) = \exists x\ \neg P(x)$$

Verteilungssätze ($P_1(x)$, $P_2(x)$ beliebig)

$$\exists x\ (P_1(x) \vee P_2(x)) = \exists x\ P_1(x) \vee \exists x\ P_2(x) \qquad \text{(gilt nicht für } \wedge\text{ !)}$$

$$\forall x\ (P_1(x) \wedge P_2(x)) = \forall x\ P_1(x) \wedge \forall x\ P_2(x) \qquad \text{(gilt nicht für } \vee\text{ !)}$$

Verschiebungssätze (x in $P(x)$ frei, P^* ohne x)

$$\exists x\ (P(x) \wedge P^*) = \exists x\ P(x) \wedge P^* \qquad \text{(gilt auch für } \vee\text{)}$$

$$\forall x\ (P(x) \wedge P^*) = \forall x\ P(x) \wedge P^* \qquad \text{(gilt auch für } \vee\text{)}$$

Austauschsätze für zwei Quantoren ($P(x,y)$ beliebig)

$$\exists x\exists y\ P(x,y) = \exists y\exists x\ P(x,y) \qquad \forall x\forall y\ P(x,y) = \forall y\forall x\ P(x,y)$$

Implikationen ($P(x,y)$ beliebig)

$$\forall x\forall y\ P(x,y) \Rightarrow \exists y\forall x\ P(x,y)$$

$$\exists y\forall x\ P(x,y) \Rightarrow \forall x\exists y\ P(x,y)$$

$$\forall x\exists y\ P(x,y) \Rightarrow \exists y\exists x\ P(x,y)$$

1.3 Mengen

1.3.1 Allgemeines

Eine *Menge* ist eine Zusammenfassung von unterscheidbaren Objekten (Individuen), den *Elementen* der Menge, zu einer Gesamtheit.

Für jedes Objekt x muss eindeutig entscheidbar sein, ob es Element der Menge M ist ($x \in M$) oder nicht ($x \notin M$). Eine Menge ist durch ihre Elemente vollständig beschrieben, d. h. die Reihenfolge der Elemente ist beliebig, Duplikate kommen nicht vor.

Bezeichnung: Mengen: $A, B, M, \ldots$ Elemente: $a, b, m_1, \ldots$

Darstellung und Beschreibung von Mengen

VENN-*Diagramm*: Grafik mit Umrandung der zur Menge gehörenden Elemente (siehe Bilder in 1.3.2).

Verbal: „Menge der natürlichen Zahlen", „Menge der eingeschriebenen Studierenden eines Studienganges" usw.

Beschreibung durch Nennung einer *Grund*- oder *Universalmenge* und einer für die Elemente von M charakteristischen Eigenschaft $A(x)$ (einstelliges Prädikat)

$$M := \{x \in G \mid A(x)\}$$

Aufzählungen:

endliche Mengen: $A := \{a_1, a_2, a_3\}$, $B := \{2, 4, 6, \ldots, 2n\}$

unendliche Mengen: $M := \{x_1, x_2, \ldots\}$

Leere Menge: $\emptyset, \{\}$. Sie enthält kein Element (auch nicht die Null). Die leere Menge ist Teilmenge jeder anderen Menge: $\emptyset \subseteq A$.

Man unterscheidet eine *Zweiermenge* $\{a, b\}$ (ungeordnet, d. h. $\{a, b\} = \{b, a\}$) von einem *geordneten Paar* (a, b) (geordnet, d. h. $(a, b) \neq (b, a)$ für $a \neq b$).

Geordnetes Tripel: (x, y, z).

Geordnetes n-Tupel: $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, wobei x_i das i-te Element (die i-te Koordinate) ist.

Punktmengen sind Mengen, deren Elemente Punkte einer Kurve, einer Fläche oder eines noch höherdimensionalen Raumes sind. Punktmengen sind Teilmengen des $\mathbb{R}^n$.

Konventionen für Bezeichnungen von Elementen

Koeffizienten: Beliebig wählbare, aber innnerhalb der Betrachtung dann konstante Zahlen $a, b, a_1, b_1, \ldots$ (erste Buchstaben des Alphabets).

Diskrete, ganzzahlige Variablen: $i, j, k, l, m, n, p, q, \ldots$ (mittlere Buchstaben).

Freie Variablen: Größen, die beliebige Werte eines Definitionsbereiches annehmen können $t, u, v, w, x, y, z, \ldots$ (letzte Buchstaben).

Schranken einer Menge

Eine nicht-leere Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ heißt *nach oben beschränkt*, falls eine reelle Zahl S_o existiert (*obere Schranke*), für die gilt: $\forall x \in M\ S_o \geq x$.

Analog gilt für die *untere Schranke* S_u: $\forall x \in M\ S_u \leq x$.

M heißt *beschränkt*, wenn $\forall x \in M\ S_u \leq x \leq S_o$.

Die kleinste obere Schranke von M heißt *Supremum* von M ($G = \sup M = \sup\limits_{x \in M} x$).

Analog heißt die größte untere Schranke von M *Infimum* von M ($g = \inf M = \inf\limits_{x \in M} x$).

Das größte (kleinste) Element einer Menge M heißt *Maximum* (*Minimum*) von M ($\max M$ bzw. $\min M$).

Es gilt:

- Nicht jede nicht-leere Menge muss ein Maximum, Minimum, Supremum oder Infimum besitzen, wenn sie aber eine der genannten Schranken besitzt, so ist diese eindeutig bestimmt.
- Ein Maximum ist stets zugleich Supremum, ein Minimum ist stets zugleich Infimum, aber nicht umgekehrt.
- G ist Supremum von M, wenn (i) $\forall x \in M\ x \leq G$ (d. h. G ist eine obere Schranke von M) und (ii) zu jedem noch so kleinen, aber positiven $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ ein $x_1 \in M$ existiert mit $x_1 > G - \varepsilon$ (d. h. $G - \varepsilon$ ist keine obere Schranke mehr von M, G ist also die kleinste).

♦ **Beispiele**

(1) Die Menge $\mathbb{R}_{>0}$ aller positiven reellen Zahlen hat kein Maximum, kein Supremum, kein Minimum, wohl aber ein Infimum, nämlich 0.

(2) Das Intervall $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 1\}$ hat 0 als Infimum und zugleich Minimum, und 1 als Supremum, aber kein Maximum.

(3) Selbst eine nach oben beschränkte Zahlenmenge muss kein Supremum besitzen: So ist $M := \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$ nach oben beschränkt (z. B. durch 1,5), besitzt aber kein Supremum. ♦

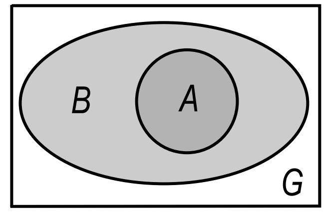
Inklusion

A ist *Teilmenge* (*Untermenge*) einer *Obermenge* B ($A \subseteq B$ oder $B \supseteq A$), wenn $\forall x \in A : x \in B$.

A ist *echte Teilmenge* von B ($A \subsetneq B$ oder $B \supsetneq A$), wenn $A \subseteq B \wedge A \neq B$.

Darstellung im VENN-*Diagramm*: Grafik mit Umrandung der Mengen.

Zwei Mengen sind *gleich* ($A = B$), wenn $A \subseteq B \wedge B \subseteq A$.



Inklusion $A \subsetneq B$ im VENN-Diagramm

1.3.2 Mengenoperationen

G ist stets die Grundmenge.

Vereinigung zweier Mengen $A \cup B$

Alle Elemente, die zu A oder zu B (oder zu allen beiden) gehören:

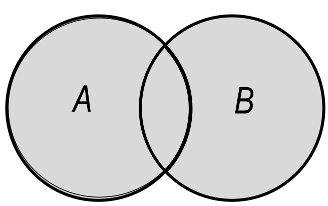
$$A \cup B := \{x \in G \mid x \in A \vee x \in B\}, \quad \text{„}A \text{ vereinigt mit } B\text{“}$$

Durchschnitt zweier Mengen $A \cap B$

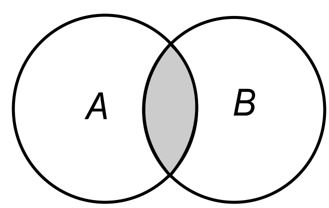
Alle Elemente, die zu A und zugleich zu B gehören:

$$A \cap B := \{x \in G \mid x \in A \wedge x \in B\}, \quad \text{„}A \text{ geschnitten mit } B\text{“}$$

Gilt $A \cap B = \emptyset$, so heißen A und B *disjunkt* (*elementfremd*).



Vereinigung $A \cup B$

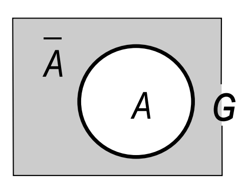


Durchschnitt $A \cap B$

(Absolutes) Komplement von A

Alle Elemente von G, die nicht in A liegen:

$$\bar{A} := \{x \in G \mid x \notin A\}, \quad \text{auch } \complement A.$$



Absolutes Komplement

Differenz zweier Mengen $A \setminus B$

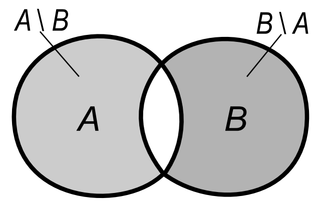
Alle Elemente, die zu A, aber nicht zu B gehören (*Differenz* von A und B, *relatives Komplement* von B bezüglich A):

$$A \setminus B := \{x \in G \mid x \in A \wedge x \notin B\}, \quad \text{„}A \text{ ohne } B\text{“, auch } \complement_A B$$

Es ist nicht erforderlich, dass B Teilmenge von A ist.

Es gilt $A \setminus B = A \cap \bar{B}$, die Operation „Differenz“ ist also entbehrlich.

Die Differenz zweier Mengen ist weder kommutativ noch assoziativ, d. h. es gelten $A \setminus B \neq B \setminus A$ und $A \setminus (B \setminus C) \neq (A \setminus B) \setminus C$.



Differenzmengen

Potenzmenge $\mathbb{P}(A)$

Die *Potenzmenge* von A ist die Menge aller Teilmengen von A. Sie enthält insbesondere stets $\emptyset$ und A selbst als Elemente:

$$\mathbb{P}(A) := \{X \mid X \subseteq A\}$$

Ist A eine endliche Menge mit k Elementen, so besteht $\mathbb{P}(A)$ aus 2^k Elementen.

♦ **Beispiel**

Für die zweielementige Menge $A = \{a, b\}$ ist
$\mathbb{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$. ♦

Mächtigkeit einer endlichen Menge

Die *Mächtigkeit* (*Kardinalität*) einer endlichen Menge A ist die Anzahl ihrer Elemente. Sie wird mit $|A|$ oder mit $\operatorname{card} A$ bezeichnet.

Zwei Mengen von gleicher Mächtigkeit sind eineindeutig aufeinander abbildbar.

Ist $A \subsetneq B$ (A echte Teilmenge von B), so folgt $\operatorname{card} A < \operatorname{card} B$.

Eine unendliche Menge, die eine eineindeutige Zuordnung zur Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen zulässt, heißt *abzählbar*.

Kartesisches Produkt zweier Mengen $A \times B$

Das *kartesische Produkt* zweier Mengen (*Produktmenge*) $A \times B$ ist die Menge aller geordneten Paare (x, y) mit $x \in A$ und $y \in B$:

$A \times B := \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B\}$ lies: „A kreuz B“

Für geordnete Paare gilt: $(x, y) = (u, v) \Leftrightarrow x = u \wedge y = v$.

Ist $A \neq B$, so folgt $A \times B \neq B \times A$.

Sind A und B endliche Mengen, so ist auch $A \times B$ endlich und es ist $\operatorname{card}(A \times B) = (\operatorname{card} A) \cdot (\operatorname{card} B)$.

Es gilt:

$$A \times B = \emptyset \Leftrightarrow (A = \emptyset) \vee (B = \emptyset)$$

$$(A \subseteq C) \wedge (B \subseteq D) \Rightarrow (A \times B) \subseteq (C \times D)$$

1.3.3 Beziehungen, Gesetze, Rechenregeln

G bezeichnet stets die Grundmenge, alle anderen vorkommenden Mengen sind Teilmengen von G.

Reflexivität:	$A \subseteq A$	
Komplementgesetze:	$\bar{\bar{A}} = A,\ \bar{G} = \emptyset,\ \bar{\emptyset} = G,$ $\bar{A} \cap A = \emptyset,\ \bar{A} \cup A = G$	
Transitivität: (Überführungsgesetz)	$A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$	
Teilmengenbeziehungen: (Inklusionen)	$A \cap B \subseteq A \cup B$ $\emptyset \subseteq A$	$A \setminus B \subseteq A$ $A \subseteq G$
Kommutativgesetze: (Vertauschungsgesetze)	$A \cap B = B \cap A$	$A \cup B = B \cup A$
Assoziativgesetze: (Zusammenfassungsgesetze)	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	
Absorptionsgesetze:	$A \cap (A \cup B) = A$	$A \cup (A \cap B) = A$
Distributivgesetze: (Verteilungsgesetze)	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	
DE MORGAN*sche Formeln*:	$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$	

Die DE MORGANschen Formeln gelten analog für mehr als zwei Mengen.

Weiterhin gilt:

$A \cup \emptyset = A$	$A \cup A = A$	$A \cup G = G$
$A \cap \emptyset = \emptyset$	$A \cap A = A$	$A \cap G = A$
$A \setminus A = \emptyset$	$A \setminus \emptyset = A$	
$(A \setminus B) \cap B = \emptyset$	$A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$	

sowie

$$A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)$$

Aus einer der nachstehenden Beziehungen folgen die anderen:

$$A \subseteq B \qquad A \cup B = B \qquad A \cap B = A \qquad \bar{B} \subseteq \bar{A} \qquad A \setminus B = \emptyset$$

Produktbeziehungen

In den folgenden Formeln steht $\circ$ für jeweils einen der Operatoren $\cap$, $\cup$ oder $\setminus$:

Multiplikation von rechts: $(A \circ B) \times C = (A \times C) \circ (B \times C)$
Multiplikation von links: $C \times (A \circ B) = (C \times A) \circ (C \times B)$

1.3.4 Relationen

Eine (*binäre*) *Relation* R ist eine Beziehung zwischen den Elementen zweier Mengen A und B. Sie ist eine Teilmenge des kartesischen Produkts $A \times B$ aller geordneten Paare (x, y) mit $x \in A$, $y \in B$.

Jede Teilmenge $R \subseteq M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_k$ heißt *k-stellige Relation* zwischen den Mengen $M_1, M_2, \ldots, M_k$.

Infix-Notation für binäre Relationen

$$xRy \Leftrightarrow (x, y) \in R \subseteq A \times B$$

gelesen: „Zwischen A und B besteht die Relation R."

Bezeichnungen

A Vorbereich, Quelle von R
B Nachbereich, Ziel von R

Definitionsbereich $\mathrm{D}_R := \{x \in A \mid \exists y : xRy\}$
Wertebereich $\mathrm{W}_R := \{y \in B \mid \exists x : xRy\}$

Für $A = B = M$ heißt R eine Relation *auf* der Menge M.

♦ **Beispiele**

(1) Für $x, y \in A$ sei $xRy :\Leftrightarrow x = y$ (*Gleichheitsrelation*, *identische Relation* id_A).

(2) Für $x, y \in \mathbb{R}$ sei $xRy :\Leftrightarrow x \leq y$ (*Kleiner-gleich-Relation*).

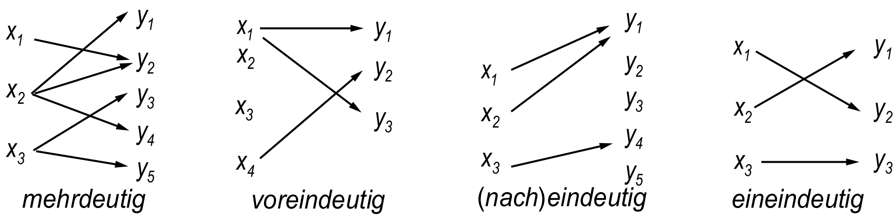
(3) Für $a, b \in \mathbb{Z}$ und festes $n \in \mathbb{N}^*$ sei $aRb :\Leftrightarrow n$ teilt $(a - b)$ (*Kongruenzrelation modulo n*). a und b haben denselben Rest bei Division durch n. Man schreibt hierfür auch $n \mid (a - b)$ (lies: „n teilt $(a - b)$") oder $a \equiv b \mod n$ (lies: „a kongruent b modulo n"). ♦

Eine Relation $R \subseteq A \times B$ heißt

- *voreindeutig*, wenn jedem $y \in B$ höchstens ein $x \in A$ entspricht,
- (*nach*)*eindeutig*, wenn jedem $x \in A$ höchstens ein $y \in B$ entspricht (*Funktion*, siehe 7.1),
- *eineindeutig*, wenn sie sowohl vor- als auch nacheindeutig ist,
- *mehrdeutig*, wenn sie weder vor- noch nacheindeutig ist.

Grafische Darstellung

Relationsgraphen mit Relationspfeilen (*Digraphen*), s. Bild.



Relationen

♦ **Beispiel**

Zwischen den Mengen $A = \{0,1\}$ und $B = \{2,3\}$ seien folgende Relationen definiert:

$R_1 = A \times B = \{(0,2),(0,3),(1,2),(1,3)\}$ (mehrdeutig)

$R_2 = \{(0,2),(0,3)\}$ (vor-, aber nicht nacheindeutig)

$R_3 = \{(0,2),(1,2)\}$ (nach-, aber nicht voreindeutig)

$R_4 = \{(0,2),(1,3)\}$ (eineindeutig) ♦

Eigenschaften binärer Relationen

R sei eine binäre Relation auf M. R heißt

- *reflexiv*, falls $\forall x \in M \; xRx$
- *irreflexiv*, falls $\forall x \in M \; \neg xRx$
- *symmetrisch*, falls $\forall x,y \in M \; (xRy \Rightarrow yRx)$
- *antisymmetrisch*, falls $\forall x,y \in M \; (xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y)$
- *transitiv*, falls $\forall x,y,z \in M \; (xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz)$
- *linear* (auch *total* oder *konnex*), falls $\forall x,y \in M \; (xRy \vee yRx)$

♦ **Beispiele**

(1) Auf der Potenzmenge $\mathbb{P}(G) = \{A \mid A \subseteq G\}$ einer Menge G sei die Relation $ARB :\Leftrightarrow A \subseteq B$ definiert (Inklusion). R ist

reflexiv: $A \subseteq A$

transitiv: $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$

antisymmetrisch: $A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Rightarrow A = B$

R ist dagegen nicht linear, z. B. gilt für $A = \{1\}$ und $B = \{2\}$ weder $A \subseteq B$ noch $B \subseteq A$.

Eine reflexive, transitive und antisymmetrische Relation heißt *Halbordnung*.

(2) Auf $\mathbb{R}$ sei die Relation $xRy :\Leftrightarrow x \leq y$ definiert (Kleiner-gleich). R ist
reflexiv: $x \leq x$
transitiv: $x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$
antisymmetrisch: $x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$
linear: $x \leq y$ oder $y \leq x$
(zwei reelle Zahlen sind stets vergleichbar)
Eine Halbordnung, die zusätzlich linear ist, heißt *Ordnung*.

(3) Sei $n \in \mathbb{N}^*$ eine feste Zahl. Auf $\mathbb{Z}$ sei $aRb :\Leftrightarrow a \equiv b \mod n$ (a und b haben denselben Rest bei Division durch n). R ist
reflexiv: $a \equiv a \mod n$
transitiv: $a \equiv b \mod n \ \wedge \ b \equiv c \mod n \ \Rightarrow \ a \equiv c \mod n$
symmetrisch: $a \equiv b \mod n \Rightarrow b \equiv a \mod n$.
Eine reflexive, transitive und symmetrische Relation heißt *Äquivalenzrelation*. ♦

1.3.5 Intervalle

Ein *endliches Intervall* ist eine zusammenhängende Teilmenge reeller Zahlen, die auf der reellen Zahlengeraden von zwei Randpunkten a und b begrenzt wird ($a < b$). Unendliche Intervalle sind einseitig oder zweiseitig unbegrenzte zusammenhängende Teilmengen reeller Zahlen.

offen: $(a,b) =]a,b[= \{x \mid a < x < b\}$

abgeschlossen: $[a,b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$

halboffen: $[a,b) = [a,b[= \{x \mid a \leq x < b\}$
$(a,b] =]a,b] = \{x \mid a < x \leq b\}$

unendlich: $(-\infty,a) = \{x \mid x < a\}$ $(-\infty,a] = \{x \mid x \leq a\}$
$(a,\infty) = \{x \mid a < x\}$ $[a,\infty) = \{x \mid a \leq x\}$
$(-\infty,\infty) = \mathbb{R} = \{x \mid |x| < \infty\}$
$(-\infty,0) = \mathbb{R}_{<0} = \{x \mid x < 0\}$
$(0,\infty) = \mathbb{R}_{>0} = \{x \mid x > 0\}$

Bei konkreten Zahlen schreibt man statt $[0,1]$ auch $[0;\ 1]$, um Verwechslung mit Kommazahlen (hier 0,1) auszuschließen.

1.3.6 Unscharfe Mengen

Eine *unscharfe Menge* (engl. *Fuzzy-Set*) weist gleitende Übergänge für die Zugehörigkeit eines Elementes zu der Menge mit Wahrheitswerten aus dem Intervall $[0;\ 1]$ auf.

Charakteristische Funktion, Zugehörigkeitsfunktion

$m_A : X \to [0;\ 1]$ (auch *Zugehörigkeitsgrad*)

m_A ordnet jedem Element x einer Grundmenge $X \supseteq A$ den Wahrheitswert der Aussage „$x \in A$“ zu, gibt also an, „wie sehr“ x in A enthalten ist. Die klassische Mengenlehre ist der Spezialfall mit $m_A(x) = 0$, falls $x \notin A$ bzw. $m_A(x) = 1$, falls $x \in A$.

Mithilfe unscharfer Mengen können Probleme der realen Welt modelliert werden, bei denen es aufgrund mangelnder Informationen oder ungenauer Definitionen nicht möglich ist, eindeutig festzulegen, ob ein Element zu einer Menge gehört oder nicht.

♦ **Beispiele unscharfer Mengen**

ausreichende Zimmertemperatur, gefahrvoller Zustand eines chemischen Prozesses, hohe Lärmbelästigung, kleine Kinder, ältere Damen, vertrauenswürdige Personen, reiche Ernte, abgenutzte Werkzeuge u. v. m. ♦

Die in den Beispielen vorkommenden Adjektive heißen *linguistische Variablen*. Oft ist das Vorliegen einer solchen Eigenschaft nicht eindeutig wahr oder falsch.

Darstellung bei Einzelbeobachtungen

- als Tabelle, z. B.

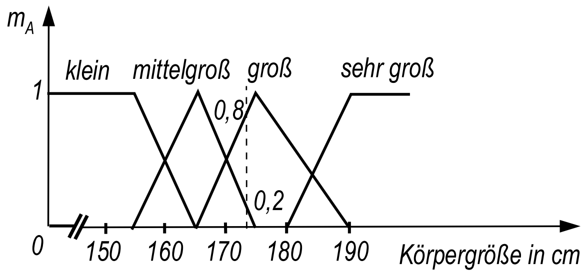
Elemente von X	x_1	x_2	x_3	x_4	...
$m_A(x_i)$	0,3	0,7	0,0	0,9	...

- als Vektor (bei geordneten Indizes): $\boldsymbol{m}_A = (m_A(x_1), m_A(x_2), \ldots)$.

♦ **Beispiele**

(1) Leere Menge: $A = \emptyset \Rightarrow \forall x \in X :\ m_A(x) = 0$.
Universalmenge: $A = G \Rightarrow \forall x \in X :\ m_A(x) = 1$.

(2) Das Bild zeigt eine Möglichkeit, den Grundbereich „Körpergröße“ mit den Untermengen der linguistischen Variablen „klein“, „mittelgroß“, „groß“ und „sehr groß“ gemäß den üblichen Gepflogenheiten einzuteilen. Man bestimme die Zugehörigkeitsgrade bei 1,73 m Größe!



Man liest ab:

$m_{\text{kl.}}(173) = 0$; $m_{\text{mit.}}(173) = 0{,}2$; $m_{\text{gr.}}(173) = 0{,}8$; $m_{\text{s.gr.}}(173) = 0$.

(3) Man gebe eine Zugehörigkeitsfunktion für die unscharfe Menge A aller reellen Zahlen an, die nahezu gleich 10 sind:

$$m_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 8 \vee x \geq 12, \\ \dfrac{x-8}{2} & \text{für } 8 \leq x \leq 10, \\ \dfrac{12-x}{2} & \text{für } 10 \leq x \leq 12. \end{cases}$$

♦

Kenngrößen und Beziehungen unscharfer Mengen

Träger: $\operatorname{supp}(A) := \{x \in X \mid m_A(x) > 0\}$

Höhe: $\operatorname{hgt}(A) := \sup\limits_{x \in X} m_A(x)$

Kardinalität: $\operatorname{card}(A) := \sum\limits_{x \in X} m_A(x)$

Teilmengen: $A \subseteq B :\Leftrightarrow \forall x \in X\ m_A(x) \leq m_B(x)$

Es gilt $A \subseteq B \Rightarrow \operatorname{supp}(A) \subseteq \operatorname{supp}(B)$ und $A \subseteq B \Rightarrow \operatorname{hgt}(A) \leq \operatorname{hgt}(B)$.

1.4 Zahlensysteme

1.4.1 Polyadische Zahlensysteme

Polyadische Zahlensysteme sind *Positions-* oder *Stellenwertsysteme*. Der Wert einer Ziffer hängt ab von ihrer Stellung innerhalb der Ziffernfolge.

Polyadische Darstellung einer natürlichen Zahl

Sei B eine natürliche Zahl größer 1 (*Basis*). Jede natürliche Zahl $a \in \mathbb{N}^*$ hat eine eindeutige polyadische Darstellung

$$a = a_n B^n + a_{n-1} B^{n-1} + \ldots + a_1 B + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot B^k$$

a_k sind die *Ziffern* von a, $a_k \in \{0, 1, \ldots, (p-1)\}$ für $k = 0, \ldots, n$.

BCD (engl. „binary coded decimal“) stellt jede Ziffer des Dezimalsystems als vierstellige Binärziffer dar.

Gebräuchliche Zahlensysteme für natürliche Zahlen

dezimal	dual	*BCD*	oktal	hexadezimal
0	0000	0000 0000	0	0
1	0001	0000 0001	1	1
2	0010	0000 0010	2	2
3	0011	0000 0011	3	3
4	0100	0000 0100	4	4
5	0101	0000 0101	5	5
6	0110	0000 0110	6	6
7	0111	0000 0111	7	7
8	1000	0000 1000	10	8
9	1001	0000 1001	11	9
10	1010	0001 0000	12	A
11	1011	0001 0001	13	B
12	1100	0001 0010	14	C
13	1101	0001 0011	15	D
14	1110	0001 0100	16	E
15	1111	0001 0101	17	F
16	10000	0001 0110	20	10
17	10001	0001 0111	21	11
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Zur Kennzeichnung des Zahlensystems kann bei Verwechslungsgefahr die Zahl mit der gültigen Basis als Index versehen werden, z. B. $(125)_8$ für eine Oktalzahl.

Festkommadarstellung einer reellen Zahl

$$a = \pm \sum_{k=-\infty}^{n} a_k \cdot B^k$$

Stellenzahl: $n + 1$.

Kommen keine negativen Exponenten k vor, handelt es sich um eine *ganze Zahl* (engl. „integer“).

Dualsystem (Zweiersystem, dyadisches, binäres System)

$$a = \pm \sum_{k=-\infty}^{n} a_k \cdot 2^k$$

Basis $B = 2$, Ziffern $a_k \in \{0, 1\}$, in der Technik auch $\{\mathrm{O}, \mathrm{L}\}$. Eine Ziffer im Dualsystem heißt *Bit* (engl. „binary digit“) oder *Binärstelle*. Sie ist die Einheit des Informationsgehaltes.

Abgeleitete Einheiten:

1 Byte = 8 Bit
1 KB = 1 Kilo-Byte = 2^{10} Byte = 1 024 Byte
1 MB = 1 Mega-Byte = 2^{20} Byte = 1 024 KB = 1 048 576 Byte
1 GB = 1 Giga-Byte = 2^{30} Byte = 1 024 MB = 1 073 741 824 Byte
1 TB = 1 Tera-Byte = 2^{40} Byte = 1 024 GB = 1 099 511 627 776 Byte

Dezimalsystem (dekadisches System)

$$a = \pm \sum_{k=-\infty}^{n} a_k \cdot 10^k$$

Basis $B = 10$, Ziffern $a_k \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$.

Schreibweisen:

Ganze Zahl: $a = \pm a_n\, a_{n-1}\, \ldots\, a_1\, a_0$
Dezimalbruch: $a = \pm a_n\, a_{n-1}\, \ldots\, a_1\, a_0, a_{-1}\, a_{-2}\, \ldots$

Die $(n + 1)$ Ziffern links vom Komma heißen *Stellen*, die Ziffern rechts vom Komma *Dezimalstellen* oder *Dezimalen*.

Endlicher oder *abbrechender Dezimalbruch*: Ab einer Stelle sind alle Dezimalen gleich 0. Ansonsten *unendlicher* oder *nicht-abbrechender Dezimalbruch*.

Echter Dezimalbruch: $0{,}a_{-1}\, a_{-2}\, \ldots$

Tragende Ziffern einer Dezimaldarstellung sind alle Ziffern, links beginnend mit der ersten von 0 verschiedenen Ziffer ($a_n \neq 0$).

Basiskonvertierung von Basis *B* in Basis 10

Man verwendet das HORNER-Schema (siehe 3.3.1.7):

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\ldots$	a_0
B	0	$a_n \cdot B$	$(a_n \cdot B + a_{n-1}) \cdot B$	$\ldots$	$(\ldots) \cdot B$
	a_n	$a_n \cdot B + a_{n-1}$	$(a_n \cdot B + a_{n-1}) \cdot B + a_{n-2}$	$\ldots$	Ergebnis

♦ **Beispiel**

Man konvertiere die Oktalzahl $(7\,301)_8$ in ihr dezimales Äquivalent:

	7	3	0	1
$B = 8$	0	$7 \cdot 8$	$59 \cdot 8$	$472 \cdot 8$
	7	59	472	3 777

Ergebnis: $(7\,301)_8 = (3\,777)_{10}$. ♦

Basiskonvertierung von Basis 10 in Basis *B*

Ganzzahliger Anteil: Fortgesetzte Division durch B ergibt die Ziffern $a_0, a_1, \ldots$ als jeweiligen Divisionsrest (1. Rest ist a_0). Die letzte Zeile ist erreicht, wenn erstmals der Divisor $< B$ ist.

Gebrochener Anteil: Fortgesetzte Multiplikation mit B ergibt die Ziffern $a_{-1}, a_{-2}, \ldots$ als jeweiligen ganzzahligen Anteil des Multiplikationsergebnisses. Ergibt die Multiplikation eine ganze Zahl oder ist die gewünschte Genauigkeit erreicht, wird abgebrochen.

♦ **Beispiel**

Man konvertiere die Dezimalzahl $(43{,}375)_{10}$ in ihr duales Äquivalent:

Ganzzahliger Anteil:	43/2 = 21 Rest **1**	$(a_0 = 1)$
	21/2 = 10 Rest **1**	$(a_1 = 1)$
	10/2 = 5 Rest **0**	$(a_2 = 0)$
	5/2 = 2 Rest **1**	$(a_3 = 1)$
	2/2 = 1 Rest **0**	$(a_4 = 0)$
	1/2 = 0 Rest **1**	$(a_5 = 1)$
Gebrochener Anteil:	0,375 · 2 = **0**,75	$(a_{-1} = 0)$
	0,75 · 2 = **1**,5	$(a_{-2} = 1)$
	0,5 · 2 = **1**,0	$(a_{-3} = 1)$

Ergebnis: $(43{,}375)_{10} = (101011{,}011)_2$ ♦

Gleitpunktzahlen, Maschinenzahlen, Computerzahlen

(engl. „floating point numbers")

$$M = \pm m \cdot B^E = (-1)^v \cdot m \cdot B^E$$

Schreibweise: $M = m(E)$

Bezeichnungen

v *Vorzeichenbit*, $v \in \{0, 1\}$
m *Mantisse*, normiert zu

$$m = 0.m_1m_2m_3 \ldots m_n \text{ mit } m_1 \neq 0, \text{ daher } \frac{1}{B} \leq m < 1$$

(Statt des Kommas steht bei Maschinenzahlen ein Punkt.)

m_i Mantissenziffern, $m_i \in \{0, 1, \ldots, (B-1)\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ $(m_1 \neq 0)$
n Mantissenlänge
B Basis der Zahldarstellung, vorzugsweise $B = 2$, aber auch $B = 8, 10, 16$
E *Exponent*, $E \in \mathbb{Z}$ als Dezimalzahl

E bestimmt bei Computerzahlen den *zulässigen Zahlenbereich*, m und B dagegen die *innere Genauigkeit* (den *Rundungsfehler*).

Da die in einem Computer darstellbare Zahlenmenge endlich, aber bereits die Menge der reellen Zahlen im Intervall $[0, 1]$ unendlich ist, müssen viele reellen Zahlen auf die vorhandene Mantissenlänge n gerundet werden:

$\mathrm{rd}(x)$ ist die zu $x \in \mathbb{R}$ nächstgelegene Maschinenzahl, d. h. man erhöht die letzte Mantissenziffer m_n um 1, falls die $(n+1)$-te Ziffer $m_{n+1} \geq B/2$ ist, ansonsten schneidet man nach der n-ten Ziffer ab.

Die *Maschinengenauigkeit* eps ist die kleinste positive Maschinenzahl, die auf 1 addiert eine Maschinenzahl größer 1 liefert:

$$\mathrm{eps} = \min\{x > 0 \mid \mathrm{rd}(1+x) > 1\}$$

eps ist zugleich der maximale relative Fehler bei Rundungen:

$$\left|\frac{\mathrm{rd}(x) - x}{x}\right| \leq \frac{B}{2} B^{-n} = \mathrm{eps}$$

oder gleichbedeutend:

$$\mathrm{rd}(x) = x \cdot (1 + \varepsilon) \text{ mit } |\varepsilon| \leq \mathrm{eps}.$$

♦ **Beispiel**

Bei Gleitpunktzahlen in einem Rechner mit 4-stelliger Mantisse zur Basis 10 beträgt der maximale relative Rundungsfehler $\mathrm{eps} = 5 \cdot 10^{-4} = 0.0005$. Die Nicht-Maschinenzahl $a := 0.12347(1)$ wird abgebildet auf die Maschinenzahl $\mathrm{rd}(a) = 0.1235(1)$, der relative Fehler ist

$$\left|\frac{0.1235(1) - 0.12347(1)}{0.12347(1)}\right| = 0.00024\ldots < \mathrm{eps}.$$

Gleichzeitig ist eps die kleinste positive Maschinenzahl x mit $\mathrm{rd}(1+x) > 1$: Es ist $\mathrm{rd}(1 + \mathrm{eps}) = \mathrm{rd}(1.0005) = \mathrm{rd}(0.10005)(1) = 0.1001(1) = 1.001 > 1$, dagegen $\mathrm{rd}(1 + 0.0004) = \mathrm{rd}(1.0004) = \mathrm{rd}(0.10004)(1) = 0.1000(1) = 1$. ♦

Für Gleitpunktzahlen M gelten folgende absoluten Grenzen:

$$B^{E_{\min}-1} \leq |M| \leq (1 - B^{-n}) \cdot B^{E_{\max}}.$$

Warnung

Viele der für reelle Zahlen geltenden Rechengesetze sind falsch für Gleitpunktoperationen, so kann z. B. $x + y = x$ sein, obwohl y eine Maschinenzahl ungleich 0 ist! Außerdem gelten die Assoziativ- und Distributivgesetze *nicht*.

♦ **Beispiel**

(Mantissenlänge $n = 4$, Basis $B = 10$).

Für die Maschinenzahlen $x := 10 = 0.1000(2)$ und $y := 0.004 = 0.4000(-2)$ gilt $x + y = 10.004 = 0.10004(2)$, die Summe ist also keine Maschinenzahl mehr und wird zu $\mathrm{rd}(0.10004(2)) = 0.1000(2) = 10 = x$, also $x + y = x$. ♦

1.4.2 Römisches Zahlensystem

Das römische Zahlensystem ist ein *Additionssystem*. Grundsymbole mit ihrer dezimalen Bedeutung sind

$$\mathrm{I} \mathrel{\widehat{=}} 1,\ \mathrm{V} \mathrel{\widehat{=}} 5,\ \mathrm{X} \mathrel{\widehat{=}} 10,\ \mathrm{L} \mathrel{\widehat{=}} 50,\ \mathrm{C} \mathrel{\widehat{=}} 100,\ \mathrm{D} \mathrel{\widehat{=}} 500,\ \mathrm{M} \mathrel{\widehat{=}} 1\,000$$

Schreibweise

Man beginnt links mit dem Symbol der größten Zahl. Die Symbole I, X und C werden normalerweise nur bis zu dreimal geschrieben (bisweilen auch viermal, insbesondere bei Uhren aus Symmetriegründen).

Steht ein Symbol einer kleineren Zahl vor dem einer größeren, wird sein Wert von dem der größeren subtrahiert. Es gilt also

$$\mathrm{IV} \mathrel{\widehat{=}} 4,\ \mathrm{IX} \mathrel{\widehat{=}} 9,\ \mathrm{XL} \mathrel{\widehat{=}} 40,\ \mathrm{XC} \mathrel{\widehat{=}} 90,\ \mathrm{CD} \mathrel{\widehat{=}} 400,\ \mathrm{CM} \mathrel{\widehat{=}} 900$$

Alle anderen Kombinationen einer kleineren Zahl vor einer größeren sind unzulässig.

♦ **Beispiel**

1999 entspricht MCMXCIX ($1\,000 + 900 + 90 + 9$). Falsch wäre MIM.
2011 entspricht MMXI. ♦

2 Arithmetik

2.1 Menge der reellen Zahlen

2.1.1 Standard-Zahlenmengen

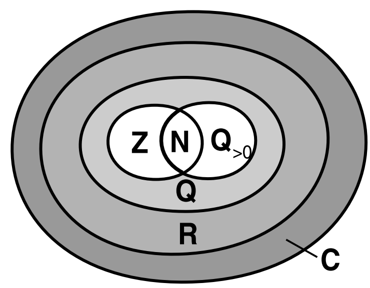
In (*Standard-*)*Zahlenmengen* ist eine Ordnung erklärt und gewisse mathematische Operationen sind *uneingeschränkt* ausführbar. Bei Erweiterungen von Zahlenmengen ist die Ausgangsmenge echte Teilmenge der neuen: $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R} \subsetneq \mathbb{C}$

Darstellung

Doppelstrich- oder fette Normalbuchstaben.

Herausnahme der 0 durch *.

Einschränkungen auf Teilbereiche durch Indizes, z. B. $\mathbb{R}_{>0}$ für positive reelle Zahlen, oft auch mit angehängtem $+$: $\mathbb{R}^+$



Standard-Zahlenmengen

Natürliche Zahlen

Menge der *nicht-negativen ganzen Zahlen*[1]: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$
Menge der *positiven ganzen Zahlen*: $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots\}$

Uneingeschränkt ausführbar sind: Addition, Multiplikation, Kleiner-als-Relation.

Die Gleichung $m + x = n$ mit $m, n \in \mathbb{N}$ ist in $\mathbb{N}$ nicht immer nach x auflösbar.

Jede natürliche Zahl n hat einen unmittelbaren Nachfolger $(n + 1)$ als isolierten Punkt auf dem *Zahlenstrahl* (PEANO*sches Axiomensystem*).

Kardinalzahl: Anzahl der Elemente einer Menge (*Mächtigkeit*)
Ordinalzahl: Stelle eines Elements in einer geordneten Menge

[1] nach DIN 1302 und 5473, daneben auch (aber nicht DIN-gerecht) $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$, dann mit $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$

Primzahlen

Eine *Primzahl* p, $p \geq 2$, ist eine natürliche Zahl, die nur durch sich selbst und durch 1 ohne Rest teilbar ist: $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17\ \ldots$

Jede natürliche Zahl $n \geq 2$ ist entweder selbst Primzahl oder lässt sich als Produkt von Primfaktoren ausdrücken. Die Primfaktoren sind bis auf die Reihenfolge eindeutig durch n bestimmt.

Ganze Zahlen

Menge der *ganzen Zahlen*: $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$

Menge der *ganzen Zahlen ohne Null*: $\mathbb{Z}^* = \{\ldots, -2, -1, 1, 2, \ldots\}$

Zusätzlich ausführbar in $\mathbb{Z}$: Subtraktion

Jede ganze Zahl hat genau einen Vorgänger und genau einen Nachfolger.

Rationale Zahlen

Menge (*Körper*) der *rationalen Zahlen*:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^* \right\}$$

Die Darstellung ist nicht eindeutig, z. B. $1/3 = 2/6 = \ldots$ Durch die Forderung $\mathrm{ggT}(p, q) = 1$ (p und q *teilerfremd*) wird Eindeutigkeit erreicht (*Normaldarstellung*).

Zusätzlich ausführbar: Division (außer durch 0).

Die rationalen Zahlen liegen überall *dicht* auf der Zahlengeraden, d. h., zwischen zwei rationalen Zahlen liegen beliebig viele weitere. Eine rationale Zahl hat daher keinen direkten Nachfolger oder Vorgänger.

$\mathbb{Q}$ ist ein (algebraischer) *Körper* (siehe 2.1.2.1). $\mathbb{Q}$ ist *abzählbar*, d. h., es gibt eine eineindeutige Zuordnung von $\mathbb{Q}$ zu $\mathbb{N}$.

Einteilung der rationalen Zahlen

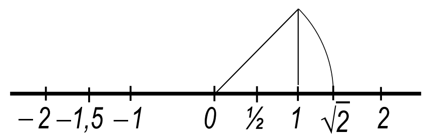
- *Gemeine Brüche, Bruchzahlen* , z. B. $4/7$, siehe 2.1.2.1
- *Endliche Dezimalbrüche*, z. B. 0,25
- *Unendliche periodische Dezimalbrüche*, bei der Division gemeiner Brüche tritt periodische Wiederholung einer Ziffernfolge ein:
  Reinperiodisch: $7/13 = 0{,}538\,461\,538\,461\ldots = 0{,}\overline{538\,461}$
  Gemischtperiodisch (mit Vorperiode): $1/6 = 0{,}166\,666\ldots = 0{,}1\overline{6}$ (sprich „0,1 Periode 6“)

Reelle Zahlen

Menge (*Körper*) der reellen Zahlen: $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$

Zusätzlich ausführbar: Grenzwertbildung

Reelle Zahlen kann man eineindeutig auf Punkte der *reellen Zahlengeraden* abbilden: $\mathbb{R}$ und Zahlengerade sind *gleichmächtig*. $\mathbb{R}$ ist nicht abzählbar.



Zahlengerade

Einteilung der reellen Zahlen

- *Rationale Zahlen* $\mathbb{Q}$
- *Irrationale Zahlen* $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$: nicht periodische, unendliche Dezimalbrüche, z. B. $\sin 10^\circ, \pi, \mathrm{e}, \sqrt{2}, \log 3$
- *Algebraische Zahlen*: Nullstellen von Polynomen mit ganzzahligen Koeffizienten, z. B. $\sqrt{2}$
- *Transzendente Zahlen*: reelle Zahlen, die nicht Nullstellen von Polynomen mit ganzzahligen Koeffizienten sind, z. B. π, e

Als Näherungswerte benutzt man endliche Dezimalbrüche, z. B. $\sqrt{2} \approx 1{,}414\,21$.

Menge der positiven reellen Zahlen: $\mathbb{R}_{>0} = (0, \infty)$, auch $\mathbb{R}^+$.

2.1.2 Grundoperationen an reellen Zahlen

2.1.2.1 Die vier Grundrechenarten

Rechenoperationen höherer Stufe binden stärker als die niederer Stufe.

Stufe	Operation	a	b	c
1. Stufe	*Addition* $a + b = c$	*Summand*	*Summand*	*Summe*
	Subtraktion $a - b = c$	*Minuend*	*Subtrahend*	*Differenz*
2. Stufe	*Multiplikation* $ab = a \cdot b = c$	*Faktor, Multiplikand*	*Faktor, Multiplikator*	*Produkt*
	Division $\frac{a}{b} = c, (b \neq 0)$	*Dividend, Zähler*	*Divisor, Nenner*	*Quotient, Bruch*

Axiomensystem der reellen Zahlen

(Zum Begriff *Axiom* siehe 1.1.3)

Eine Menge $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ mit zwei Rechenoperationen heißt *algebraischer Körper*, *Zahlenkörper* oder kurz *Körper*, wenn sie die folgenden Axiome erfüllt:

Körperaxiome ($a, b, c \in \mathbb{K}$)

Abgeschlossenheit:	$a + b \in \mathbb{R}$	$a \cdot b \in \mathbb{R}$
Kommutativgesetze:	$a + b = b + a$	$a \cdot b = b \cdot a$
Assoziativgesetze:	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
Neutrale Elemente:	$a + 0 = a$ (*Null*)	$a \cdot 1 = a$ (*Eins*)
Inverse Elemente:	$a + (-a) = 0$	$a \cdot \frac{1}{a} = 1 \ (a \neq 0)$
Distributivgesetz:	$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$	

Für $a+(-b)$ schreibt man kurz $a-b$, für $a \cdot \frac{1}{b}$ kurz $\frac{a}{b}$ und für $a \cdot b$ kurz ab.

Von den Standardmengen sind $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ Körper, $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ dagegen nicht (keine multiplikativen Inversen).

Folgerungen

Differenz:	$a + x = b \Leftrightarrow x = b - a$	$-(-a) = a$
Null:	$a - 0 = a$	$-0 = 0$
	$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$	
	$a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$ (Körper sind *nullteilerfrei*.)	
Quotient:	$a \cdot x = b \Leftrightarrow x = \frac{b}{a}$	
	$\frac{0}{a} = 0 \quad (a \neq 0)$	Achtung: $\frac{a}{0}$ nicht definiert

Anordnungsaxiome ($a, b, c \in \mathbb{R}$)

Trichotomie: Für jedes $a \in \mathbb{R}$ gilt genau eine der drei Beziehungen $a > 0$, $a = 0$, $-a > 0$.

Summe: Aus $a > 0$ und $b > 0$ folgt $a + b > 0$.

Produkt: Aus $a > 0$ und $b > 0$ folgt $a \cdot b > 0$.

Man vereinbart $a > b$, falls $a - b > 0$ ist, und $a \geq b$, falls $a > b$ oder $a = b$ ist. Statt $a > b$ kann man auch $b < a$ schreiben.

Folgerungen

Transitivität: $a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c$
Monotonie der Addition: $a < b \Rightarrow a + c < b + c$
Monotonie der Multiplikation: $a < b \wedge c > 0 \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$

Zahlenmengen, in denen die Körperaxiome und die Anordnungsaxiome erfüllt sind, heißen *angeordnete Körper*. $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ sind angeordnete Körper.

Vorzeichenregeln ($a, b > 0$)

$$a - (-b) = a + b \qquad a + (-b) = a - b$$

$$-a - b = -(a + b) \qquad a - b = -(b - a)$$

$$(-a) \cdot (-b) = a \cdot b \qquad a \cdot (-b) = (-a) \cdot b = -ab$$

$$\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b} \qquad \frac{a}{-b} = \frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}$$

Klammern auflösen, Ausklammern

Empfehlung: Vorzugsweise *runde Klammern* auch bei geschachtelten Ausdrücken verwenden, da andere Klammerformen z. T. gesonderte Bedeutungen haben und in Programmiersprachen ohnehin nur runde Klammern vorkommen. Geschachtelte Klammern sind von innen nach außen aufzulösen.

$$a + (b - c) = a + b - c \qquad a - (b - c) = a - b + c$$

$$a \cdot b + c = (ab) + c \quad \text{„Punkt vor Strich“}$$

$$a(b \pm c) = ab \pm ac \qquad -a(b \pm c) = -ab \mp ac$$

$$(a + b) \cdot (c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Größter gemeinsamer Teiler (ggT) und kleinstes gemeinsames Vielfaches (kgV)

Seien $m, n \in \mathbb{Z}^*$.

Der *größte gemeinsame Teiler* ggT(m,n) ist die größte natürliche Zahl, die m und n teilt.

Das *kleinste gemeinsame Vielfache* kgV(m,n) ist die kleinste natürliche Zahl, die m und n als Teiler enthält.

Zur Berechnung *faktorisiere* man die Zahlen, d. h. man zerlege sie in ihre *Primfaktoren*.

♦ **Beispiel**

$$\begin{array}{rl} 12 = 2^2 \cdot 3^1 & \\ 40 = 2^3 \quad\quad \cdot 5^1 & \\ \hline \mathrm{ggT}(12,40) = 2^2 \quad\quad\quad\quad & = \quad 4 \\ \mathrm{kgV}(12,40) = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^1 & = 120 \end{array}$$

♦

Bruchrechnung ($a, b, c \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*$)

Echter Bruch: $\frac{a}{b}$ mit $|a| < |b|$, sonst *unecht*

Gemeiner Bruch: echter Bruch mit $b \neq 10^n$

Gemischte Zahl: $n\frac{a}{b} = n + \frac{a}{b}$, z. B. $7\frac{1}{9} = 7 + \frac{1}{9}$

Gemischte Zahlen möglichst vermeiden!

Stammbruch: $\frac{1}{a}$ mit $a \in \mathbb{N}^*$

Gleichnamige Brüche: Brüche mit gleichen Nennern

Kehrwert von $\frac{a}{b}$: $\frac{b}{a}$

Erweitern mit c: $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}$

Kürzen mit c: $\frac{a}{b} = \frac{a : c}{b : c} = \frac{a/c}{b/c}$

Kürzen mit dem $\mathrm{ggT}(a,b)$ liefert *Normaldarstellung*.

Grundrechenarten mit Brüchen

- *Addition, Subtraktion*: $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}$ (gleichnamige Brüche)
  Ungleichnamige Brüche werden vor der Addition/Subtraktion auf den *Hauptnenner*, z. B. das kgV der Nenner, gebracht (siehe Beispiel).
  $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$, falls b und d teilerfremd sind.
- *Multiplikation*: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$
- *Division*: $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$ (zweiten Bruch *stürzen*)

♦ **Beispiel**

$$\frac{3}{4} + \frac{5}{14} - \frac{11}{12} = \frac{3 \cdot 21 + 5 \cdot 6 - 11 \cdot 7}{2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 3} = \frac{16}{84} = \frac{4}{21}$$

♦

Polynomdivision (*Partialdivision*)

1. Ordnen von Dividend und Divisor nach fallenden Potenzen von x
2. Nächstes Glied Dividend durch nächstes Glied Divisor ergibt nächstes Glied Quotient
3. Rückmultiplikation mit Divisor
4. Subtraktion
5. Wiederhole Schritte 2–4, bis die Differenz 0 wird oder ein Rest bleibt

♦ **Beispiel**

$$
\begin{array}{l}
(3x^3 - 2x^2 + \;\; 5x + 1) : (x^2 + 4) = 3x - 2 \\
\underline{\;3x^3 \qquad\quad + 12x\;} \\
\qquad - 2x^2 - \;\; 7x + 1 \\
\qquad \underline{- 2x^2 \qquad\quad - 8\;} \\
\qquad\qquad - \;\; 7x + 9 \;\; \text{(Rest)}
\end{array}
$$

Also folgt $\dfrac{3x^3 - 2x^2 + 5x + 1}{x^2 + 4} = 3x - 2$ Rest $(-7x + 9)$ oder

$3x^3 - 2x^2 + 5x + 1 = (3x - 2) \cdot (x^2 + 4) + (-7x + 9)$. ♦

2.1.2.2 Proportionen, Verhältnisgleichungen

$$a : b = c : d \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

a, d Außenglieder, b, c Innenglieder, a, c Vorderglieder, b, d Hinterglieder. Brüche „über Kreuz multiplizieren“.

Fortlaufende Proportionen lassen sich in Teilproportionen zerlegen:

Aus $a : b : c = x : y : z$ folgen $a : b = x : y$, $a : c = x : z$ und $b : c = y : z$.

Proportionalitätsfaktor *k*

$$a : b = c : d \Leftrightarrow \begin{cases} a = k \cdot c \\ b = k \cdot d \end{cases} \quad \text{mit } k = \frac{a}{c} = \frac{b}{d},\, k \in \mathbb{R}$$

Direkte Proportionalität (Graph: Gerade)

$$y \sim x \Leftrightarrow y = k \cdot x$$

Indirekte Proportionalität (Graph: Hyperbel)

$$y \sim \frac{1}{x} \Leftrightarrow y = \frac{k}{x}$$

Erweitern, Kürzen, Vertauschungssätze $(a, b, c, d \neq 0)$

$$\begin{aligned} a : b = c : d &\Leftrightarrow ak : bk = c : d \\ &\Leftrightarrow ak : b = ck : d \\ &\Leftrightarrow d : b = c : a \\ &\Leftrightarrow a : c = b : d \text{ usw.} \end{aligned}$$

Korrespondierende Addition/Subtraktion

$$\begin{aligned} a : b = c : d &\Leftrightarrow (a \pm b) : a = (c \pm d) : c \\ &\Leftrightarrow (a \pm b) : b = (c \pm d) : d \\ &\Leftrightarrow (a + b) : (a - b) = (c + d) : (c - d) \text{ usw.} \end{aligned}$$

Stetige Proportion: $a : b = b : c$

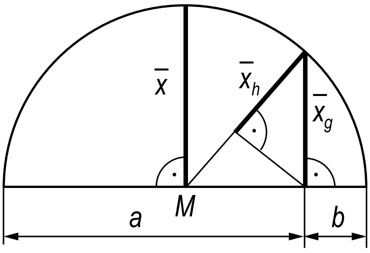
Arithmetisches Mittel: $\bar{x} = \dfrac{a+b}{2}$

Geometrisches Mittel, mittlere Proportionale

$$a : x = x : b \Leftrightarrow \bar{x}_\text{g} = \sqrt{ab} \quad (a, b > 0)$$

Harmonisches Mittel, harmonische Proportion

$$(a - x) : (x - b) = a : b \Leftrightarrow \bar{x}_\text{h} = \frac{2ab}{a+b}$$



Mittelwerte

Allgemein gilt: $\bar{x} \geq \bar{x}_\text{g} \geq \bar{x}_\text{h}$ (Satz von CAUCHY, siehe 13.1.2)

2.1.2.3 Prozentrechnung

$$P = G_0 \cdot \frac{p}{100} = G_0 \cdot i, \qquad 1\,\% \text{ von } G_0 \text{ sind } \frac{G_0}{100}$$

G_0 *Grundwert*, Basiswert, Bezugswert
P *Prozentwert*
p *Prozentfuß* in %, p von Hundert
$i = \dfrac{p}{100}$ *Prozentsatz*

Beim Vergleich von Prozentsätzen zum gleichen Grundwert wird die Differenz in *Prozentpunkten* ausgedrückt.

Die Sprechweise „p % von G_0“ meint $P = i \cdot G_0$.

Prozent „auf" und „in" Hundert

Auf Hundert sind Aufschläge auf den Grundwert (*Vomhundertsatz*):

$$p' = \frac{100\,p}{100+p}\,\% \quad \text{(auch Geldentwertung mit } \textit{Inflationsrate } p\text{)}$$

In Hundert sind Abschläge (Verlust) vom Grundwert (*Rabatt*):

$$p' = \frac{100\,p}{100-p}\,\%$$

♦ **Beispiele**

(1) $p = 19\,\%$ Mehrwertsteuer auf den Nettopreis sind
$p' = \frac{100 \cdot 19}{100+19}\,\% = 15{,}97\,\%$ Steueranteil am Verkaufspreis.

(2) Einem Materialverlust von 23 % von der Einsatzmasse der Rohstoffe bei einer Fertigung entspricht ein höherer Materialeinsatz, vom Fertigprodukt aus betrachtet, von $p' = \frac{100 \cdot 23}{100-23}\,\% = 29{,}87\,\%$. ♦

2.1.2.4 Näherung

Abbruch der Grundziffernfolge

Zum Beispiel ergibt $\pi \approx 3{,}14159$ einen absoluten Fehler $\varepsilon < 10^{-5}$.

Runden (Das Zeichen $\doteq$ heißt „gerundet gleich")

Abrunden: Die letzte Ziffer a_i bleibt unverändert, wenn die erste weggelassene Ziffer $a_{i+1} \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ist.

Aufrunden: Ziffer a_i wird um 1 erhöht, wenn $a_{i+1} \in \{5, 6, 7, 8, 9\}$ ist.

Absoluter Fehler beim Runden einer Dezimalzahl a auf t Stellen der gerundeten Zahl $\tilde{a}$:

$$|\tilde{a} - a| \leq 0{,}5 \cdot 10^{-t} \qquad t \textit{ sichere (gültige) Dezimalen} \text{ von } a$$

Die Formel gilt analog für das Runden ganzer Zahlen, siehe Beispiel (2).

♦ **Beispiele**

(1) $\tilde{a} = 4{,}700$ steht für $4{,}6995 \leq a < 4{,}7005$ $(t = 3)$, dagegen
$\tilde{a} = 4{,}7$ steht für $4{,}65 \leq a < 4{,}75$ $(t = 1)$

(2) Runden auf Hunderter: $7\,345 \doteq 7\,300$, absoluter Fehler $\leq 0{,}5 \cdot 10^2$

(3) Runden auf 10^{-3}: $6{,}748\,8 \doteq 6{,}749$, absoluter Fehler $\leq 0{,}5 \cdot 10^{-3}$

(4) Runden von 45 500 750 auf Millionen: 46 000 000; auf Hunderttausend: 45 500 000; auf Tausend: 45 501 000, auf Hundert: 45 500 800 ♦

2.1.2.5 Fehlerrechnung

Definition der Fehlergrößen

Bezeichnungen

x Wahrer, aber unbekannter Wert; Sollwert
a Näherungswert, Istwert, Messwert

Wahrer Fehler: $\Delta x = x - a$ (Messtechnik: *Abweichung*)

Absoluter Fehler: $|\Delta x| = |x - a| \Rightarrow x = a \pm \Delta x$

Fehlerschranke für den absoluten Fehler, *absoluter Höchstfehler*

$$|\Delta x| \leq \varepsilon_x \qquad \text{mit } \varepsilon_x > 0\text{, möglichst klein}$$

d. h. $a - \varepsilon_x \leq x \leq a + \varepsilon_x$ bzw. $x \in [a - \varepsilon_x;\ a + \varepsilon_x]$

Relativer Fehler

$$\delta_x = \frac{|\Delta x|}{|x|} = \frac{|x-a|}{|x|} \approx \delta_a = \frac{|\Delta x|}{a} = \frac{|x-a|}{|a|} \qquad x, a \neq 0$$

Fehlerschranke für den relativen Fehler, *relativer Höchstfehler*

$$\delta_x \leq \rho_x \qquad \text{mit } \rho_x > 0\text{, möglichst klein}$$

d. h. $\rho_x = \dfrac{\varepsilon_x}{|x|}$

Prozentualer Fehler: $\delta_x \cdot 100\,\%$

Fehlerschranke für den prozentualen Fehler, *prozentualer Höchstfehler*

$$\delta_x \cdot 100\,\% \leq \rho_x \cdot 100\,\% = \sigma_x \qquad \text{mit } \sigma_x > 0\text{, möglichst klein}$$

♦ **Beispiel**

Man berechne die relative Fehlerschranke (den relativen Höchstfehler) für den Näherungswert 2,718 der EULERschen Zahl e.

Ein genauerer Näherungswert ist e ≈ 2,718 281, woraus eine obere Schranke für den absoluten Fehler von z. B. $\varepsilon_e = 0{,}000\,3$ resultiert.

Die relative Fehlerschranke von 2,718 ist dann $\rho_e = \dfrac{0{,}000\,3}{2{,}718} = 0{,}000\,11$. ♦

Fehlerarten numerischer Berechnungen

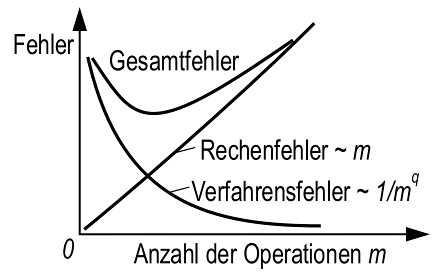
Eingabefehler, Eingangsfehler

$$\Delta x = x - a$$

Verfahrensfehler

Differenz der Lösung eines Näherungsverfahrens $\Phi(x)$ zum exakten Verfahren $f(x)$:

$$\Delta y = \Phi(x) - f(x)$$



Fehlerarten

Rechenfehler

Durch Rundung oder Abbruch entstandene Fehler.

Fortpflanzungsfehler

Fehler in den Ausgabedaten, die durch Fehler in den Eingabedaten erzeugt wurden.

Bemerkungen

In der numerischen Mathematik werden Eingabe- und Rechenfehler zusammengefasst.

Wird durch kleine Rundungsfehler während eines Algorithmus das Ergebnis stark verändert, ist der Algorithmus *instabil* und für eine Berechnung eher ungeeignet.

Rufen kleine Änderungen der Parameter eines Modells große Änderungen in den Lösungen hervor, so liegt ein *schlecht konditioniertes Modell* vor.

2.1.2.6 Betrag und Signum

(Absolut-)Betrag einer reellen Zahl

$$|x| := \begin{cases} x \text{ für } x \geq 0 \\ -x \text{ für } x < 0 \end{cases} \qquad |-x| = |x| \qquad |x| \geq 0$$

Für $a > 0$ gilt:

$$|x| = a \Leftrightarrow x = \pm a \Leftrightarrow x^2 = a^2$$

$$|x| < a \Leftrightarrow x \in (-a;\, a) \Leftrightarrow -a < x < a$$

$$|x| \leq a \Leftrightarrow x \in [-a;\, a] \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$$

$$|x| > a \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus [-a;\, a] \Leftrightarrow x < -a \vee x > a$$

Regeln für Rechnen mit Beträgen

$$||a| - |b|| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b| \qquad \textit{Dreiecksungleichung}$$

$$|a_1 + a_2 + \ldots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|$$

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b| \qquad \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} \qquad (b \neq 0)$$

Vorzeichen (Signum) einer reellen Zahl

$$\operatorname{sgn} x := \begin{cases} 1 \text{ für } x > 0 \\ 0 \text{ für } x = 0 \\ -1 \text{ für } x < 0 \end{cases} \qquad x = \operatorname{sgn} x \cdot |x|$$

$$\operatorname{sgn}(a \cdot b) = \operatorname{sgn} a \cdot \operatorname{sgn} b = \operatorname{sgn}\left(\frac{a}{b}\right) \qquad (b \neq 0)$$

2.1.2.7 Summen- und Produktzeichen

Summations- bzw. Multiplikationsindex (Laufvariable) $i \in \mathbb{Z}$

Summenzeichen (*rekursive Definition*)

$$\sum_{i=m}^{n} x_i := \begin{cases} 0 & \text{für } m > n \text{ (\textit{leere Summe})} \\ \left(\sum_{i=m}^{n-1} x_i\right) + x_n & \text{für } m \leq n \end{cases}$$

Gelesen „Summe über die x_i für i von m bis n“

Für $m \leq n$ gilt $\sum\limits_{i=m}^{n} x_i = x_m + x_{m+1} + \ldots + x_n$, speziell $\sum\limits_{i=m}^{m} x_i = x_m$.

Andere Schreibweisen: $\sum\limits_{i \in I} x_i$, $\sum\limits_{i} x_i$, $\sum x_i$, $\sum_{i=m}^{n} x_i$

Regeln für Summenzeichen

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i \pm b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \pm \sum_{i=1}^{n} b_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} c a_i = c \sum_{i=1}^{n} a_i \qquad c \text{ Konstante}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i + \sum_{i=m+1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i \qquad m < n$$

$$\sum_{i=m}^{n} c = (n-m+1)\cdot c \qquad m \leq n,\ c \text{ Konstante}$$

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{j=m-k}^{n-k} a_{j+k} \qquad \text{Indexverschiebung}$$

$$\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\right) \qquad \begin{array}{l}\text{Summe zeilenweise}\\ = \text{Summe spaltenweise}\end{array}$$

Warnung: Im Allgemeinen ist $\sum\limits_{i=m}^{n} a_i \cdot b_i \neq \sum\limits_{i=m}^{n} a_i \cdot \sum\limits_{i=m}^{n} b_i$.

♦ **Beispiel**

Man transformiere den Index der Summation $\sum\limits_{i=6}^{10} \frac{1}{4+2i}$ so, dass von $k=1$ an summiert wird. Dazu muss offenbar $k = i-5$ oder $i = k+5$ sein:

$$\sum_{i=6}^{10} \frac{1}{4+2i} = \sum_{k=1}^{5} \frac{1}{4+2(k+5)} = \sum_{k=1}^{5} \frac{1}{14+2k}$$ ♦

Produktzeichen (*rekursive Definition*)

$$\prod_{i=m}^{n} x_i := \begin{cases} 1 & \text{für } m > n \ (\textit{leeres Produkt}) \\ \left(\prod\limits_{i=m}^{n-1} x_i\right)\cdot x_n & \text{für } m \leq n \end{cases}$$

Gelesen „Produkt über die x_i für i von m bis n“

Für $m \leq n$ gilt $\prod\limits_{i=m}^{n} x_i = x_m \cdot x_{m+1} \cdot \ldots \cdot x_n$, speziell $\prod\limits_{i=m}^{m} x_i = x_m$ und $\prod\limits_{i=1}^{n} i = n!$ (*n-Fakultät*, siehe 2.1.5)

Andere Schreibweisen analog zu denen des Summenzeichens

Regeln für Produktzeichen

$$\prod_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i = \prod_{i=1}^{n} a_i \cdot \prod_{i=1}^{n} b_i$$

$$\prod_{i=1}^{n} c a_i = c^n \prod_{i=1}^{n} a_i \qquad c \text{ Konstante}$$

$$\prod_{i=1}^{m} a_i \cdot \prod_{i=m+1}^{n} a_i = \prod_{i=1}^{n} a_i \qquad m < n$$

$$\prod_{i=m}^{n} c = c^{n-m+1} \qquad m \leq n,\ c \text{ Konstante}$$

$$\prod_{i=m}^{n} a_i = \prod_{j=m-k}^{n-k} a_{j+k} \qquad \text{Indexverschiebung}$$

2.1.3 Potenzen und Wurzeln

Potenzieren und *Radizieren* (Wurzelziehen) sind Rechenoperationen der 3. Stufe.

Potenzen mit ganzzahligen Exponenten ($n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$)

$$a^n := \begin{cases} 1 & \text{für } n = 0 \\ a \cdot a^{n-1} & \text{für } n \geq 1 \end{cases}$$

$$a^{-n} := \frac{1}{a^n} \qquad (a \neq 0)$$

n Exponent
a Basis

Für $n \in \mathbb{N}^*$ ist also $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}$.

Spezielle Basen: $0^n = 0$ ($n \neq 0$), $\qquad 1^n = 1$

0^0 ist nicht definiert! Aber zur Darstellung von Polynomen, binomischem Lehrsatz und Potenzreihen mithilfe des Summenzeichens ist es sinnvoll, $0^0 := 1$ zu setzen. Dann kann auch $x = 0$ im Zusammenhang $x^0 = 1$ zugelassen werden.

$n = 2$: *Quadratzahlen*, $n = 3$: *Kubikzahlen*

Reziproke Zahl, Kehrwert

$$a^{-1} = \frac{1}{a} \Leftrightarrow a \cdot a^{-1} = 1 \qquad a \neq 0$$

Vorzeichenregeln ($n \in \mathbb{Z}$)

$a^n > 0$	für $a > 0$	
$a^{2n} > 0$	für $a < 0$	speziell $(-1)^{2n} = 1$
$a^{2n+1} < 0$	für $a < 0$	speziell $(-1)^{2n+1} = -1$

n-te Wurzel (Radizieren)

Die nicht-negative, eindeutige Lösung der Gleichung $x^n = a$, $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, $a \geq 0$ heißt *n-te Wurzel* aus a:

$x = \sqrt[n]{a}$

n Wurzelexponent ($n = 2$ nicht extra geschrieben)
a Radikand
x Wurzelwert

Speziell $\sqrt[n]{0} = 0$ $\quad\sqrt[n]{1} = 1$

$n = 2$: *Quadratwurzeln*: $\sqrt{x^2} = |x|$ für $x \in \mathbb{R}$
$n = 3$: *Kubikwurzeln*: $\sqrt[3]{x^3} = x$ für $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

♦ **Beispiele**

(1) $\sqrt[5]{32} = 2$, weil $2^5 = 32$
(2) $\sqrt{4} = 2$. Falsch: $\sqrt{4} = -2$ oder $\sqrt{4} = \pm 2$. Dagegen richtig: Die quadratische Gleichung $x^2 = 4$ hat die zwei Lösungen $x_{1,2} = \pm\sqrt{4} = \pm 2$. ♦

Wurzelgesetze ($m, n \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{R}_{>0}$)

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b} \qquad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \qquad \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

Dagegen gilt i. Allg.: $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

Potenzen mit gebrochenen Exponenten ($m, n \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{R}_{>0}$)

$$a^{\frac{1}{n}} := \sqrt[n]{a} \qquad a^{\frac{m}{n}} := \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m} \qquad a^{-\frac{m}{n}} := \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$$

Damit ist a^x für $a \geq 0$ und $x \in \mathbb{Q}$ definiert. Für $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ ist $a^x := \lim\limits_{k\to\infty} a^{x_k}$, wobei (x_k) eine rationale Folge mit Grenzwert x ist (siehe 2.4.2).

Potenzgesetze ($a, b \in \mathbb{R}_{>0}$, $x, y \in \mathbb{R}$)

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y} \qquad a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \qquad \frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$$

$$\left(a^x\right)^y = \left(a^y\right)^x = a^{x \cdot y}$$

Für $x, y \in \mathbb{Z}$ sind die Gesetze auch gültig für negative Basen a, b.

♦ **Beispiele**

(1) $7^{\frac{1}{3}} \cdot 7^{\frac{2}{3}} = 7^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}} = 7^1 = 7$, entspricht $\sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[3]{7^2} = 7$

(2) $32^{-\frac{3}{5}} = \dfrac{1}{32^{\frac{3}{5}}} = \dfrac{1}{\left(\sqrt[5]{32}\right)^3} = \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{8}$

(3) $\left(3^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{8}} = 3^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}} = 3^{\sqrt{16}} = 3^4 = 81$ ♦

Warnung: *Potenzen mit gebrochenen Exponenten sind nur für nicht-negative Basen definiert!* Der Ausdruck $(-8)^{1/3}$ ist also nicht definiert. Würde man ihm den (nahe liegenden) Wert -2 zuordnen, würde die Anwendung der üblichen Potenzgesetze zu Widersprüchen führen, z. B.

$$-2 = (-8)^{\frac{1}{3}} = (-8)^{\frac{2}{6}} = \left((-8)^2\right)^{\frac{1}{6}} = 64^{\frac{1}{6}} = 2 \quad !$$

Rationalmachen des Nenners

Brüche mit Wurzeln im Nenner kann man so erweitern, dass der Nenner rational wird. In der Numerischen Mathematik evtl. ungünstig wie im folgenden Beispiel (1), falls $a^2 \approx b$ (*Ziffernauslöschung* im Nenner!)

♦ **Beispiele**

(1) $\dfrac{m}{a+\sqrt{b}} = \dfrac{m(a-\sqrt{b})}{(a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b})} = \dfrac{m(a-\sqrt{b})}{a^2-b}$

(2) $\dfrac{x}{\sqrt[4]{x^3}} = \dfrac{x}{x^{3/4}} = \dfrac{x \cdot x^{1/4}}{x^{3/4} \cdot x^{1/4}} = \dfrac{x \cdot x^{1/4}}{x} = x^{1/4} = \sqrt[4]{x}$ ♦

2.1.4 Logarithmen

> Die eindeutige Lösung der Gleichung $b^x = a$ mit $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$ und $b \neq 1$ heißt *Logarithmus* von a zur Basis b:
>
> $x = \log_b a$

Der Logarithmus von a zur Basis b ist also diejenige reelle Zahl, mit der man b potenzieren muss, um a zu erhalten.

a *Numerus, Logarithmand*, $a \in \mathbb{R}_{>0}$
b *Basis*, $b \in \mathbb{R}_{>0} \setminus \{1\}$

Regeln

$b^{\log_b x} = x \quad (x \in \mathbb{R}_{>0}) \qquad \log_b b^x = x \quad (x \in \mathbb{R})$

$\log_b 1 = 0 \qquad \log_b b = 1$

♦ **Beispiele**

(1) $\log_{10} 1000 = 3$, weil $10^3 = 1000$

(2) $\log_2 \sqrt[3]{2} = \frac{1}{3}$, weil $2^{1/3} = \sqrt[3]{2}$

(3) $\log_3 \frac{1}{9} = -2$, weil $3^{-2} = \frac{1}{9}$ ♦

Logarithmengesetze

$\log_b(x \cdot y) = \log_b x + \log_b y$	$\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$
$\log_b \frac{x}{y} = -\log_b \frac{y}{x}$	$\log_b \frac{1}{y} = -\log_b y$
$\log_b x^c = c \cdot \log_b x \quad (c \in \mathbb{R})$	$\log_b \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log_b x \quad (n \geq 2)$

Bemerkung: $\log_b(x \pm y)$ lässt sich nicht symbolisch vereinfachen.

Dekadischer (gemeiner, Briggsscher) Logarithmus (Basis $b = 10$)

Bilder der Logarithmusfunktionen in 7.7.3

$\lg a := \log_{10} a$			
$\lg a = x \Leftrightarrow 10^x = a$	$\lg 10^x = x$	$10^{\lg a} = a$	$x \in \mathbb{R}, a > 0$

Halblogarithmische Darstellung einer positiven reellen Zahl

$$a = m \cdot 10^k \qquad a > 0$$
$$\lg a = \lg m + k \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Mantisse $m \in [1;\ 10) \Leftrightarrow \lg m \in [0;\ 1)$

Kennzahl k des Logarithmus gleich Stellenzahl der Mantisse vor dem Komma minus 1 bzw. bei echten Dezimalbrüchen negativ gleich Anzahl der Nullen bis zur ersten gültigen Ziffer.

♦ **Beispiele**

(1) $27\,900 = 2{,}79 \cdot 10^4$, $\quad \lg 27\,900 = \lg 2{,}79 + 4 = 4{,}445\,60$

(2) $0{,}005\,49 = 5{,}49 \cdot 10^{-3}$,
$\lg 0{,}005\,49 = \lg 5{,}49 - 3 = 0{,}739\,57 - 3 = -2{,}260\,43$ ♦

Natürlicher Logarithmus (logarithmus naturalis, ln)

Basis $\mathrm{e} := \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = 2{,}718\,281\,828\,459\ldots$ EULER*sche Zahl*

$\ln a := \log_{\mathrm{e}} a$

$x = \ln a \Leftrightarrow \mathrm{e}^x = a \qquad \ln \mathrm{e}^x = x \qquad \mathrm{e}^{\ln a} = a \qquad x \in \mathbb{R}, a > 0$

Zweierlogarithmus (binärer Logarithmus, lb)

Basis $b = 2$

$\mathrm{lb}\, a := \log_2 a$

$x = \mathrm{lb}\, a \Leftrightarrow 2^x = a \qquad \mathrm{lb}\, 2^x = x \qquad 2^{\mathrm{lb}\, a} = a \qquad x \in \mathbb{R}, a > 0$

Statt lb ist auch die Bezeichnung ld (*logarithmus dualis*) gebräuchlich.

Basiswechsel der Logarithmensysteme

$\log_b x = \dfrac{\log_a x}{\log_a b} \qquad a, b \in \mathbb{R}_{>0} \setminus \{1\}, x \in \mathbb{R}_{>0}$

Speziell $x = a \Rightarrow \log_b a = \dfrac{1}{\log_a b}$

♦ **Beispiele**

(1) $\log_7 12 = \dfrac{\ln 12}{\ln 7} \approx 1{,}2770$

(2) Wechsel binäre in natürliche Logarithmen (Taschenrechner!):
$\mathrm{lb}\, x = \dfrac{\ln x}{\ln 2} \approx 1{,}442\,695 \cdot \ln x$

(3) Wechsel natürliche in dekadische Logarithmen:
$\ln x = \dfrac{\lg x}{\lg \mathrm{e}} \approx 2{,}302\,585 \cdot \lg x$ ♦

2.1.5 Fakultät und Binomialkoeffizient

Fakultät ($n \in \mathbb{N}$) (*rekursive Definition*)

$$n! := \begin{cases} 1 & \text{für } n = 0 \\ n \cdot (n-1)! & \text{für } n \geq 1 \end{cases}$$

Gelesen: „n-Fakultät“

Für $n \geq 1$ ist also $n!$ das Produkt aller natürlicher Zahlen von 1 bis n:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = \prod_{i=1}^{n} i$$

Interpretation: Gegeben seien n unterscheidbare Objekte. Dann gibt es $n!$ Möglichkeiten, diese Objekte anzuordnen ($n!$ *Permutationen*, siehe 2.3.1).

Binomialkoeffizient ($\alpha \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$)

$$\binom{\alpha}{k} := \begin{cases} 1 & \text{für } k = 0 \\ \dfrac{\alpha \cdot (\alpha-1) \cdot (\alpha-2) \cdot \ldots \cdot (\alpha-k+1)}{k!} & \text{für } k \geq 1 \end{cases}$$

Speziell für $\alpha = n \in \mathbb{N}$ und $0 \leq k \leq n$:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Gelesen: „α über k“, für $\alpha = n \in \mathbb{N}$ auch „k aus n“

Interpretation von $\binom{n}{k}$: Gegeben seien n unterscheidbare Objekte. Dann gibt es $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten, daraus k Objekte auszuwählen (siehe 2.3.3).

Rekursionsformel zur Berechnung: $\displaystyle\binom{\alpha}{k} = \binom{\alpha}{k-1} \cdot \frac{\alpha-k+1}{k}$

Symmetriesatz: $\displaystyle\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, speziell $\displaystyle\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

Additionssatz: $\displaystyle\binom{\alpha}{k} + \binom{\alpha}{k+1} = \binom{\alpha+1}{k+1}$

♦ **Beispiele**

(1) $\displaystyle\binom{10}{6} = \binom{10}{4} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210$

(2) $\displaystyle\binom{-\frac{1}{2}}{3} = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \left(-\frac{5}{2}\right)}{3 \cdot 2 \cdot 1} = -\frac{5}{16}$ ♦

Pascalsches Dreieck zur Bestimmung der Binomialkoeffizienten

Zeile n												Zeilensumme
$n=0$						1						2^0
$n=1$					1		1					2^1
$n=2$				1		2		1				2^2
$n=3$			1		3		3		1			2^3
$n=4$		1		4		6		4		1		2^4
$n=5$	1		5		10		10		5		1	2^5
	$\uparrow$		$\uparrow$		$\uparrow$		$\uparrow$		$\uparrow$		$\uparrow$	
$\binom{n}{k} =$	$\binom{5}{0}$		$\binom{5}{1}$		$\binom{5}{2}$		$\binom{5}{3}$		$\binom{5}{4}$		$\binom{5}{5}$	

Jede Zahl ist die Summe der beiden schräg darüber stehenden Zahlen. In Zeile n stehen von links nach rechts die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{1}$ bis $\binom{n}{n}$.

Additionstheoreme $(\alpha, \beta \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N})$

$$\binom{\alpha}{0} + \binom{\alpha+1}{1} + \ldots + \binom{\alpha+k}{k} = \binom{\alpha+k+1}{k}$$

$$\binom{\alpha}{0}\binom{\beta}{k} + \binom{\alpha}{1}\binom{\beta}{k-1} + \ldots + \binom{\alpha}{k}\binom{\beta}{0} = \binom{\alpha+\beta}{k}$$

Speziell für $\alpha = \beta = k = n \in \mathbb{N}$: $\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \ldots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \ldots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \ldots = 2^{n-1}$$

Daraus durch Addition: $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n} = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

Binomischer Lehrsatz für natürliche Exponenten $(a, b \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N})$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \ldots + b^n$$

$$(a-b)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = a^n - \binom{n}{1} a^{n-1} b + \ldots + (-1)^n b^n$$

Spezialfälle für kleine Werte von n (*binomische Formeln*):

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

$$(a \pm b)^4 = a^4 \pm 4a^3b + 6a^2b^2 \pm 4ab^3 + b^4$$

♦ **Beispiel**

Man berechne $(2x-3)^4$, d. h. $a = 2x$, $b = 3$, $n = 4$:

$$\begin{aligned}(2x-3)^4 &= (2x)^4 - 4(2x)^3 \cdot 3 + 6(2x)^2 \cdot 3^2 - 4(2x) \cdot 3^3 + 3^4 \\ &= 16x^4 - 96x^3 + 216x^2 - 216x + 81\end{aligned}$$ ♦

Division von Binomen

$$\frac{a^n - b^n}{a-b} = a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\frac{a^n - b^n}{a+b} = a^{n-1} - a^{n-2}b \pm \ldots + ab^{n-2} - b^{n-1} \qquad n = 2, 4, 6, \ldots$$

$$\frac{a^n + b^n}{a+b} = a^{n-1} - a^{n-2}b \pm \ldots - ab^{n-2} + b^{n-1} \qquad n = 1, 3, 5, \ldots$$

$\dfrac{a^n + b^n}{a-b}$ ist dagegen nicht ohne Rest teilbar.

Allgemeiner binomischer Lehrsatz für reelle Exponenten $(a, b, x \in \mathbb{R})$

$$(a+b)^x = a^x + \binom{x}{1} a^{x-1}b + \binom{x}{2} a^{x-2}b^2 + \ldots$$

Für $x \notin \mathbb{N}$ entsteht eine unendliche Reihe, siehe 12.1.5 Binomische Reihe. Konvergenzbedingung: $|b| < |a|$

2.2 Menge der komplexen Zahlen

2.2.1 Grundbegriffe

Eine komplexe Zahl z ist ein Ausdruck der Form $x + \mathrm{j}y$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ und $\mathrm{j}^2 = -1$. Die Menge aller komplexen Zahlen ist

$$\mathbb{C} = \left\{ z = x + \mathrm{j}y \mid x, y \in \mathbb{R},\ \mathrm{j}^2 = -1 \right\}$$

Imaginäre Einheit: $\mathrm{j} = \sqrt{-1}$, auch $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$

Realteil von z: $\quad \operatorname{Re} z := x$
Imaginärteil von z: $\operatorname{Im} z := y$

Uneingeschränkt ausführbar sind alle Operationen für reelle Zahlen sowie zusätzlich die Erfüllbarkeit der algebraischen Gleichung $x^2 + 1 = 0$ durch $x_{1,2} = \pm\mathrm{j}$. $\mathbb{C}$ ist ein Körper (siehe 2.1.2.1). In $\mathbb{C}$ gibt es im Gegensatz zu $\mathbb{R}$ aber keine Ordnungsrelation ($>$, $<$).

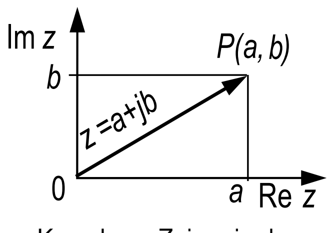
Reelle Zahl: $\quad z = x + \mathrm{j} \cdot 0 = x \qquad x^2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$
Imaginäre Zahl: $z = 0 + \mathrm{j} \cdot y = \mathrm{j}y \qquad (\mathrm{j}y)^2 = -y^2 \in \mathbb{R}_{\leq 0}$

Daraus folgt $\mathbb{R} \subsetneq \mathbb{C}$.

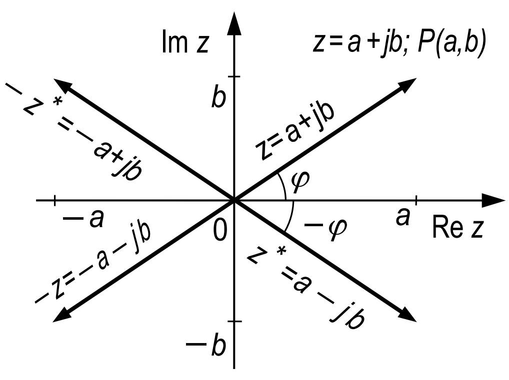
Komplexe Zahlen in der GAUSSschen Zahlenebene

Eineindeutige Abbildung der komplexen Zahlen auf die Punkte P der Ebene $\mathbb{R}^2$ (GAUSS*sche Zahlenebene*) durch $z = x + \mathrm{j}y \leftrightarrow P(x, y)$. Darstellung durch *komplexen Zeiger* (Vektor von 0 zu $P(x, y)$).

Obwohl hier eine Analogie zur Vektorrechnung im $\mathbb{R}^2$ vorliegt, lassen sich nicht alle Konzepte der Vektoralgebra auf $\mathbb{C}$ übertragen, z. B. nicht Skalarprodukt oder Vektorprodukt.



Komplexer Zeiger in der GAUSSschen Zahlenebene



Konjugiert komplexe Zeiger

Konjugiert komplexe Zahlen

> Zu $z = a + \mathrm{j}b$ gehört die *konjugiert komplexe Zahl* $z^* = a - \mathrm{j}b$.
>
> Die Zeiger von z und z^* liegen spiegelbildlich zur reellen Achse.

Statt z^* ist (vor allem in der reinen Mathematik) auch die Bezeichnung $\bar{z}$ üblich.

Es gilt

$$x = \operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + z^*) \qquad y = \operatorname{Im} z = \frac{1}{2\mathrm{j}}(z - z^*)$$

$$(z_1 \pm z_2)^* = z_1^* \pm z_2^* \qquad (z_1 \cdot z_2)^* = z_1^* \cdot z_2^*$$

$$(z^*)^* = z \qquad \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^* = \frac{z_1^*}{z_2^*}$$

$$z \cdot z^* = \operatorname{Re}^2 z + \operatorname{Im}^2 z$$

Betrag einer komplexen Zahl ($z = a + \mathrm{j}b$)

$$r = |z| = \sqrt{z \cdot z^*} = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\operatorname{Re}^2 z + \operatorname{Im}^2 z} \qquad |z| \in \mathbb{R}_{\geq 0}$$

Der Betrag ist die Länge des Zeigers von z in der GAUSSschen Zahlenebene. Es gilt:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \qquad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \quad \textit{Dreiecksungleichung}$$

Signum einer komplexen Zahl

$$\operatorname{sgn} z := \begin{cases} \dfrac{z}{|z|} & \text{für } z \neq 0 \\ 0 & \text{für } z = 0 \end{cases} \qquad z = |z| \cdot \operatorname{sgn} z$$

Argument einer komplexen Zahl (Polarwinkel, Phase)

Das *Argument* von $z = x + \mathrm{j}y$ ist der Winkel zwischen der positiven reellen Achse und dem Zeiger von z:

$$\varphi = \arg z \qquad \tan \varphi = \frac{y}{x}$$

Das Argument ist nur bis auf Vielfache von 360° eindeutig bestimmt, so bedeutet z. B. $\varphi = -40°$ dasselbe wie $\varphi = 320°$. Um Eindeutigkeit zu erzwingen, wird der *Hauptwert* des Arguments auf $-180° < \varphi \leq 180°$ ($-\pi < \varphi \leq \pi$) festgelegt[1]. φ wird dann für $x \neq 0$ nach folgender *Quadrantenregel* berechnet:

$$\varphi = \arg z = \arctan \frac{y}{x} + \begin{cases} \pi & \text{falls } x + \mathrm{j}y \text{ im II. Quadranten} \\ -\pi & \text{falls } x + \mathrm{j}y \text{ im III. Quadranten} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Man skizziere die Lage des Zeigers.

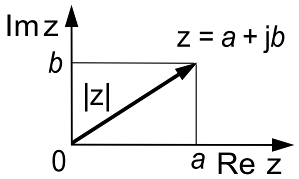
[1] Der Hauptwert wird manchmal auch (aber nicht DIN-gerecht) als $0° \leq \varphi < 360°$ definiert.

2

2.2.2 Darstellungsformen komplexer Zahlen

Kartesische Form

$$z = x + \mathrm{j}y = \mathrm{Re}\,z + \mathrm{j}\,\mathrm{Im}\,z, \qquad x, y \in \mathbb{R}$$



Kartesische Form

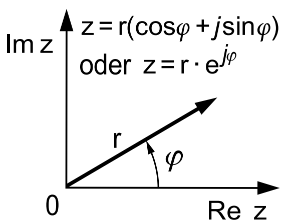
Trigonometrische Form

$$z = r\cos\varphi + \mathrm{j}r\sin\varphi = r(\cos\varphi + \mathrm{j}\sin\varphi)$$

Polarform

$$z = r\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$$

Den Zusammenhang zwischen den drei Formen liefert die



Trigonometrische und Polarform

EULERsche Formel

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{j}\sin\varphi \qquad\qquad \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi} = \cos\varphi - \mathrm{j}\sin\varphi$$

Die komplexe Exponentialfunktion hat die Periode $2\pi\mathrm{j}$ (siehe 7.12):

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi + 2\pi\mathrm{j}} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$$

Spezielle Werte von $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$ ($k \in \mathbb{Z}$)

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}2k\pi} = 1 \qquad\qquad \mathrm{e}^{\mathrm{j}(2k+1)\pi} = -1$$

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{2}} = \mathrm{j} \qquad\qquad \mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{j}$$

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{3\pi}{2}} = -\mathrm{j} \qquad\qquad \mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{j}$$

♦ **Beispiele für Umwandlungen**

(1) Man wandle $z = -3 + 4\mathrm{j}$ um in die Polarform:
$r = |z| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$
$\varphi = \arg z = \arctan\frac{4}{-3} + \pi = -0{,}9273 + \pi = 2{,}214\,\mathrm{rad} \mathrel{\widehat{=}} 126{,}87^\circ$
(II. Quadrant)
$z = -3 + 4\mathrm{j} = 5\mathrm{e}^{2{,}214\,\mathrm{j}}$

(2) Man wandle $z = 17\mathrm{e}^{\mathrm{j}37^\circ 22'}$ um in die trigonometrische und kartesische Form:
$z = r(\cos\varphi + \mathrm{j}\sin\varphi) = 17(\cos 37^\circ 22' + \mathrm{j}\sin 37^\circ 22') = 13{,}5 + 10{,}3\,\mathrm{j}$ ♦

2.2.3 Grundrechenarten mit komplexen Zahlen

Alle Rechenregeln für $\mathbb{R}$ bleiben erhalten (*Permanenzprinzip*).

Im Folgenden sei stets $z_1 = x_1 + \mathrm{j}y_1$ und $z_2 = x_2 + \mathrm{j}y_2$.

Gleichheit zweier komplexer Zahlen

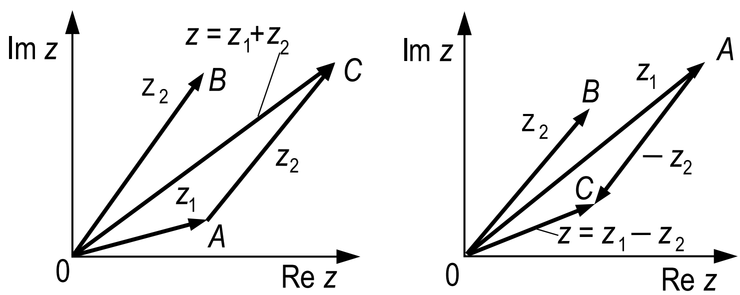
$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2$$

Addition und Subtraktion komplexer Zahlen

Addition und Subtraktion sind nur in der kartesischen Form möglich.

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + \mathrm{j}(y_1 \pm y_2)$$

Grafisches Verfahren: Vektoraddition, Zeigeraddition (*Parallelogrammregel*)



Grafische Addition und Subtraktion komplexer Zeiger

Multiplikation komplexer Zahlen

Arithmetische Form: $z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + \mathrm{j}(x_1y_2 + x_2y_1)$

Trigonometrische Form: $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2\big(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \mathrm{j}\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\big)$

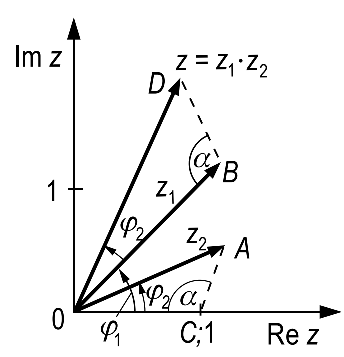
Polarform: $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\varphi_1+\varphi_2)}$

Geometrische Deutung, grafisches Verfahren

Die Multiplikation zweier komplexer Zahlen $z_1 \cdot z_2$ ist eine Drehstreckung: Der Zeiger von z_1 wird um den Winkel φ_2 gedreht und mit dem Faktor r_2 gestreckt.

Konstruktion: φ_2 an z_1 antragen; $C = (1;\,0)$ mit A verbinden; α an z_1 in B antragen.

Begründung: $\Delta OBD \sim \Delta OCA$, daher $r/r_1 = r_2/1$ oder $r = r_1 \cdot r_2$



Grafische Multiplikation

Division komplexer Zahlen

Arithmetische Form: $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1 \cdot z_2^*}{z_2 \cdot z_2^*} = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \mathrm{j}\dfrac{-x_1y_2 + x_2y_1}{x_2^2 + y_2^2}$

Trigonometrische Form: $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}\big(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \mathrm{j}\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\big)$

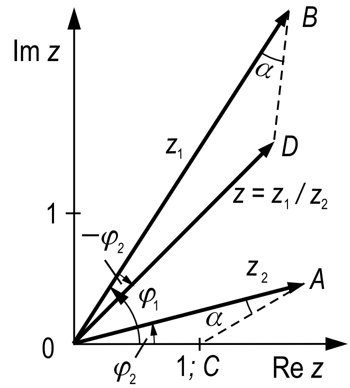
Polarform: $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\varphi_1 - \varphi_2)}$

Geometrische Deutung, grafisches Verfahren

Die Division zweier komplexer Zahlen $z_1 \cdot z_2$ ist eine Drehstreckung: Der Zeiger von z_1 wird um den Winkel $-\varphi_2$ gedreht und mit dem Faktor $1/r_2$ gestreckt.

Konstruktion: $-\varphi_2$ an z_1 antragen; $C = (1;\ 0)$ mit A verbinden; α an z_1 in B antragen.

Begründung: $\Delta ODB \sim \Delta OCA$, daher $r_1/r = r_2/1$ oder $r = r_1/r_2$



Grafische Division

> Multiplikation/Division von z mit -1 entspricht einer Drehung des Zeigers von z um 180°. Multiplikation mit j entspricht einer Drehung um 90° im Gegenuhrzeigersinn. Division durch j entspricht einer Drehung um 90° im Uhrzeigersinn.

♦ **Beispiele**

(1) $(5 - 3\mathrm{j}) - (3 + 5\mathrm{j}) = 2 - 8\mathrm{j}$

(2) $5\mathrm{j} \cdot 7\mathrm{j} = 35\mathrm{j}^2 = -35$

(3) $(1 + 2\mathrm{j}) \cdot (3 - \mathrm{j}) = 3 - \mathrm{j} + 6\mathrm{j} - 2\mathrm{j}^2 = 5 + 5\mathrm{j}$

(4) $2\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{3}} \cdot 3\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{6}} = 2 \cdot 3\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6})} = 6\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{2}} = 6\mathrm{j}$

(5) $\dfrac{1 + 2\mathrm{j}}{3 - 2\mathrm{j}} = \dfrac{(1 + 2\mathrm{j})(3 + 2\mathrm{j})}{(3 - 2\mathrm{j})(3 + 2\mathrm{j})} = \dfrac{-1 + 8\mathrm{j}}{3^2 + (-2)^2} = -\dfrac{1}{13} + \dfrac{8}{13}\mathrm{j}$ ♦

2.2.4 Potenzen und Wurzeln komplexer Zahlen

Potenzen mit ganzzahligen Exponenten

Wie im Reellen definiert man $z^0 := 1$ und $z^{-n} := \dfrac{1}{z^n}$ für $z \neq 0$.

Für Potenzbildung ist die Polarform besser geeignet als die kartesische:

$$z = r\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} \Rightarrow z^n = r^n\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\varphi}$$

Speziell für $r = 1$ in der trigonometrischen Form folgt daraus der

Satz von MOIVRE

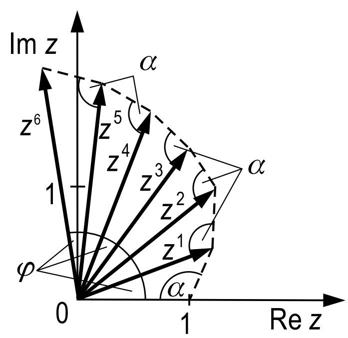
$$(\cos\varphi + \mathrm{j}\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + \mathrm{j}\sin n\varphi$$

Potenzen der imaginären Einheit j ($k \in \mathbb{Z}$)

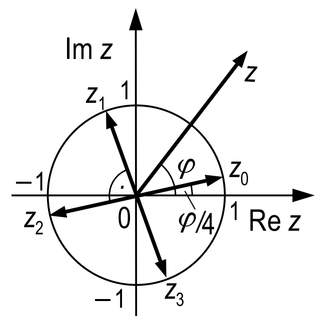
$\mathrm{j}^0 = \mathrm{j}^{4k} = 1$ $\qquad$ $\mathrm{j}^1 = \mathrm{j}^{4k+1} = \mathrm{j}$

$\mathrm{j}^2 = \mathrm{j}^{4k+2} = -1$ $\qquad$ $\mathrm{j}^3 = \mathrm{j}^{4k+3} = -\mathrm{j}$

Die n-te Potenz einer komplexen Zahl ist eine n-fache Drehstreckung. Konstruktion durch wiederholte grafische Multiplikation.



Komplexe Potenzen



Komplexe Wurzeln

Komplexe *n*-te Wurzeln

Die Gleichung $z^n = c = r\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$ mit $n \in \mathbb{N}^*$ hat für $c \neq 0$ genau n verschiedene Lösungen in $\mathbb{C}$. Sie heißen *komplexe n-te Wurzeln* von c:

$$z_k = \sqrt[n]{r}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\varphi + k\cdot 2\pi}{n}} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + k\cdot 2\pi}{n} + \mathrm{j}\sin\frac{\varphi + k\cdot 2\pi}{n}\right)$$

mit $k = 0, 1\ \ldots, n-1$ und $-\pi < \varphi \leq \pi$.

z_0 heißt *Hauptwurzel*, z_k ($k = 1, \ldots, n-1$) k-te *Nebenwurzel*.

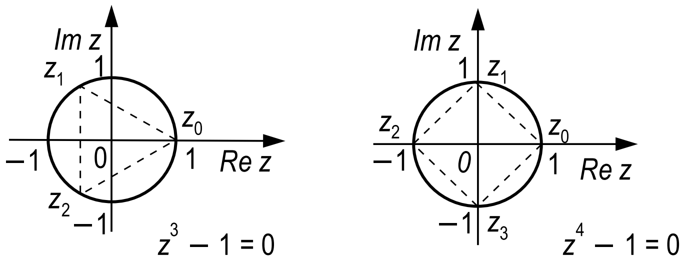
Geometrische Deutung

Die Pfeilspitzen der n-ten komplexen Wurzeln bilden in der GAUSSschen Zahlenebene ein reguläres n-Eck um den Nullpunkt mit Radius $\sqrt[n]{r}$.

Komplexe *n*-te Einheitswurzeln

Die n verschiedenen Lösungen der Gleichung $z^n = 1$ mit $n \in \mathbb{N}^*$ heißen *n-te Einheitswurzeln*:

$$z_k = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\varphi + k\cdot 2\pi}{n}} = \cos\frac{\varphi + k\cdot 2\pi}{n} + \mathrm{j}\sin\frac{\varphi + k\cdot 2\pi}{n}, \quad k = 0, 1\ \ldots, n-1$$



Komplexe 3. und 4. Einheitswurzeln

♦ **Beispiele**

(1) $z^3 = 1 \Rightarrow z_0 = 1$ (Hauptwert), $z_{1,2} = -\dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{j}$

(2) $z^4 = 1 \Rightarrow z_0 = 1$ (Hauptwert), $z_{1,3} = \pm\mathrm{j}$, $z_2 = -1$

(3) $\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-8} = \mathrm{j}\sqrt{2}\cdot\mathrm{j}\sqrt{8} = -4$, falsch ist $\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-8} = \sqrt{(-2)\cdot(-8)} = 4$

♦

2.2.5 Natürliche Logarithmen komplexer Zahlen

Wählt man für $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$ die Polardarstellung, so ergibt sich als Verallgemeinerung des natürlichen Logarithmus im Reellen der Logarithmus im Komplexen:

$$\ln z = \ln\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}\right) = \ln r + \mathrm{j}\varphi$$

Das Argument φ ist dabei aber nur bis auf Vielfache von 2π bestimmt, d. h. der komplexe Logarithmus ist nicht eindeutig. Um Eindeutigkeit zu erzwingen, verlangt man üblicherweise, dass $-\pi < \varphi \leq \pi$ ist (*Hauptwert des Arguments*). Der dann eindeutig definierte komplexe Logarithmus wird ebenfalls mit ln bezeichnet:

Sei $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$.

$\ln z = \ln r + \mathrm{j}\varphi$ mit $-\pi < \varphi \leq \pi$ heißt *Hauptwert des Logarithmus*. Auch die Zahlen $\ln r + \mathrm{j}(\varphi + k\cdot 2\pi)$ mit $k \in \mathbb{Z}^*$ sind Logarithmen von z. Sie heißen k-te *Nebenwerte*, kurz $\ln_k z$.

♦ **Beispiele**

(1) $\ln(-2) = \ln 2 + \mathrm{j}\pi$ (Argument von -2 ist π)

(2) $\ln(2\mathrm{j}) = \ln 2 + \mathrm{j}\dfrac{\pi}{2}$

(3) $\ln(2 + 2\mathrm{j}) = \ln\sqrt{8} + \mathrm{j}\dfrac{\pi}{4}$ ♦

Warnung: Die im Reellen gültige Funktionalgleichung des Logarithmus $\ln(xy) = \ln x + \ln y$ gilt im Komplexen nicht!

Beispielsweise ist $\ln(-2) + \ln(-2) = 2\ln 2 + 2\mathrm{j}\pi = \ln 4 + 2\mathrm{j}\pi$, dagegen $\ln((-2)\cdot(-2)) = \ln 4 = \ln 4$.

2.3 Kombinatorik

Die *Kombinatorik* befasst sich mit dem systematischen Anordnen und Abzählen einer endlichen Menge von Objekten unter Beachtung vorgegebener Regeln.

Fundamentalprinzip der Kombinatorik (*Zählprinzip*)

Aus k nicht-leeren Mengen M_i, $i = 1, 2, \ldots, k$ mit jeweils n_i Elementen kann man $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ verschiedene geordnete k-Tupel $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$, $x_i \in M_i$, bilden.

2.3.1 Permutationen

Eine eineindeutige (*bijektive*) Abbildung der endlichen Menge

$G = \{1, 2, \ldots, n\}$

in sich selbst heißt *Permutation* (Umordnung).

Darstellung einer Permutation π:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ j_1 & j_2 & \ldots & j_n \end{pmatrix} \text{ oder } \pi = j_1\, j_2\, \ldots\, j_n \quad \text{mit } j_i = \pi(i)$$

Bei Permutationen wird grundsätzlich die Reihenfolge beachtet, d. h. $123 \neq 132$.

Permutationen ohne Wiederholung

Mengentheoretisches Modell: n-Tupel verschiedener Elemente

Urnenmodell: Ziehen aller n durchnummerierten Kugeln *ohne Zurücklegen* mit Notierung der Reihenfolge.

Anzahl der Permutationen von n verschiedenen Elementen *ohne Wiederholung*:

$$P_n = n!$$

♦ **Beispiele**

(1) Sämtliche Permutationen der Elemente $1, 2, 3$ *lexikografisch geordnet*:
$123, 132, 213, 231, 312, 321$
Anzahl der Tripel: $P_3 = 3! = 6$

(2) Wie viele Möglichkeiten gibt es, vier Bilder waagerecht anzuordnen?
Anzahl der 4-Tupel: $P_4 = 4! = 24$ ♦

Permutationen mit Wiederholung

Mengentheoretisches Modell: n-Tupel, in denen das Element $i \in G$ insgesamt n_i-mal vorkommt ($1 \leq i \leq n$).

Urnenmodell: Ziehen von n durchnummerierten Kugeln *mit Zurücklegen* und mit Notieren der Reihenfolge, wobei die i-te Kugel n_i-mal gezogen wurde.

Anzahl der Permutationen von n verschiedenen Elementen *mit Wiederholungen* $n_1, n_2, \ldots, n_r$:

$$P_n^{n_1, \ldots, n_r} = \binom{n}{n_1, \ldots, n_r} = \frac{n!}{n_1! \cdot \ldots \cdot n_r!} \quad (\textit{Polynomialkoeffizient})$$

wobei $n = n_1 + \ldots + n_r$, $n_i \in \mathbb{N}^*$.

♦ **Beispiel**

Wie viele verschiedene elf-buchstabige Wörter kann man aus den Buchstaben des Wortes MISSISSIPPI bilden?

$n = 11$ (Buchstaben insgesamt), $n_1 = 1$ (Wiederholungen von M), $n_2 = 4$ (von I), $n_3 = 4$ (von S), $n_4 = 2$ (von P).
Kontrolle: $n = 1 + 4 + 4 + 2 = 11$.

Anzahl der Permutationen mit Wiederholung:

$$P_{11}^{1,4,4,2} = \binom{11}{1,4,4,2} = \frac{11!}{1! \cdot 4! \cdot 4! \cdot 2!} = 34\,650$$ ♦

Inversionen

Stehen zwei Elemente in einer Permutation entgegen ihrer natürlichen Reihenfolge, so bilden sie eine *Inversion*. Vertauschung zweier benachbarter Elemente verändert also die Anzahl der Inversionen um ± 1.

Eine Permutation heißt *gerade* bzw. *ungerade*, wenn sie eine gerade bzw. ungerade Anzahl von Inversionen enthält. Es gibt jeweils $n!/2$ gerade und ungerade Inversionen.

♦ **Beispiel**

$\pi = 4132$ enthält die vier Inversionen 41, 43, 42 und 32, ist also eine gerade Permutation. ♦

2.3.2 Variationen

Anordnungen, die aus einer Menge G von n Elementen eine bestimmte Anzahl k *mit Berücksichtigung der Reihenfolge* enthalten, heißen *Variationen* von n Elementen zur *k-ten Klasse* $(1 \leq k \leq n)$.

Variationen ohne Wiederholung

Mengentheoretisches Modell: k-Tupel verschiedener Elemente

Urnenmodell: Ziehen von k Kugeln aus n durchnummerierten *ohne Zurücklegen* und mit Notieren der Reihenfolge (geordnete Stichprobe ohne Zurücklegen)

Anzahl der Variationen von n Elementen zur k-ten Klasse *ohne Wiederholung*

$$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = \binom{n}{k} \cdot k! = [n]_k = \prod_{i=1}^{k}(n-i+1), \quad 1 \leq k \leq n$$

Faktorielle $(k \in \mathbb{N}^*)$

Steigende Faktorielle: $(n)_k := \prod_{i=1}^{k}(n+i-1) = n(n+1) \cdot \ldots \cdot (n+k-1)$

Fallende Faktorielle: $[n]_k := \prod_{i=1}^{k}(n-i+1) = n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$

Daneben findet man auch die Bezeichnungen *obere Faktorielle* $n^{\overline{k}}$ bzw. *untere Faktorielle* $n^{\underline{k}}$.

♦ **Beispiele**

(1) Wie viele Würfe mit verschiedenen Augen sind mit drei Würfeln möglich?
$V_6^3 = [6]_3 = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$

(2) Wie viele und welche zweistelligen Zahlen lassen sich aus den Ziffern 1, 2 und 3 ohne Wiederholung bilden?
$V_3^2 = [3]_2 = 3 \cdot 2 = 6$. Die Zahlen lauten 12, 13, 21, 23, 31, 32. ♦

Variationen mit Wiederholung

Mengentheoretisches Modell: k-Tupel

Urnenmodell: Ziehen von k Kugeln aus n durchnummerierten *mit Zurücklegen* und mit Notieren der Reihenfolge (geordnete Stichprobe mit Zurücklegen)

Anzahl der Variationen von n Elementen zur k-ten Klasse *mit Wiederholung*

$$V_{n,w}^{k} = n^{k}$$

Bemerkung: Hier ist auch $k > n$ zulässig.

♦ **Beispiele**

(1) Wie Beispiel (2) oben, aber mit Wiederholung:
$V_{3,w}^{2} = 3^{2} = 9$. Die Zahlen lauten 11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33.

(2) Wie viele Varianten gibt es beim Ausfüllen eines Fußballtoto-Scheines?
$n = 3$ (gewonnen, unentschieden, verloren)
$k = 11$ (Anzahl der Spiele)
$V_{3,w}^{11} = 3^{11} = 177\,147$ ♦

2.3.3 Kombinationen

Anordnungen, die aus einer Menge G von n Elementen eine bestimmte Anzahl k *ohne Berücksichtigung der Reihenfolge* enthalten, heißen *Kombinationen* von n Elementen zur *k-ten Klasse* $(1 \leq k \leq n)$.

„Ohne Berücksichtigung der Reihenfolge“ heißt, dass z. B. die Kombinationen 123, 132, 213 als eine einzige und nicht als drei verschiedene gezählt werden. Man erreicht dies am einfachsten dadurch, dass man jede Kombination der Größe nach ordnet. Die Duplikate werden dann nicht mitgezählt.

Kombinationen ohne Wiederholung

Mengentheoretisches Modell: Teilmengen von G mit k Elementen

Urnenmodell: Ziehen von k Kugeln aus n durchnummerierten *ohne Zurücklegen* und ohne Notieren der Reihenfolge (ungeordnete Stichprobe ohne Zurücklegen)

Anzahl der Kombinationen von n Elementen zur k-ten Klasse *ohne Wiederholung*

$$C_{n}^{k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{V_{n}^{k}}{k!} \qquad 1 \leq k \leq n$$

◆ **Beispiel**

Wie viele Möglichkeiten gibt es beim Ankreuzen von sechs Zahlen aus dem Bereich von 1 bis 49 (Zahlenlotto „6 aus 49“)?

$$C_{49}^{6} = \binom{49}{6} = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 13\,983\,816$$ ◆

Kombinationen mit Wiederholung

Mengentheoretisches Modell: geordnete k-Tupel

Urnenmodell: Ziehen von k Kugeln aus n durchnummerierten *mit Zurücklegen* und ohne Notieren der Reihenfolge (ungeordnete Stichprobe mit Zurücklegen)

Anzahl der Kombinationen von n Elementen zur k-ten Klasse *mit Wiederholung*

$$C_{n,w}^{k} = \binom{n+k-1}{k}$$

◆ **Beispiel**

Wie viele Ziffernkombinationen ohne Berücksichtigung der Reihenfolge gibt es bei einem Wurf mit zwei Würfeln?

$$C_{6,w}^{2} = \binom{6+2-1}{2} = \binom{7}{2} = \frac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1} = 21$$

Es sind dies: 11, 12, 13, 14, 15, 16, 22, 23, 24, 25, 26, 33, 34, 35, 36, 44, 45, 46, 55, 56, 66. ◆

Übersicht

	Permutationen	*Variationen*	*Kombinationen*
beteiligte Elemente	alle n	Auswahl k aus n	Auswahl k aus n
Reihenfolge	beachten	beachten	nicht beachten
Anzahl *ohne* Wiederholung	$n!$	$[n]_k = \frac{n!}{(n-k)!}$ mit $1 \leq k \leq n$	$\binom{n}{k}$ mit $1 \leq k \leq n$
Anzahl *mit* Wiederholung	$\frac{n!}{n_1! \cdot \ldots \cdot n_r!}$ mit $n_1 + \ldots + n_r = n$	n^k	$\binom{n+k-1}{k}$

2.4 Folgen

2.4.1 Allgemeines

Eine *Folge* ist eine Abbildung einer Menge natürlicher Zahlen $D \subseteq \mathbb{N}^*$ (gelegentlich auch $D \subseteq \mathbb{Z}$) in eine Menge M (Wertebereich).

M ist Punktmenge: *Punktfolge*; M ist Zahlenmenge: *Zahlenfolge*, d. h. eine geordnete Menge (*Tupel*) reeller Zahlen.

Eine *reelle Zahlenfolge* ist eine *diskrete Funktion* mit der *Bildungsvorschrift* $a_k := f(k)$, $\mathrm{D}(f) = \mathbb{N}^*$, d. h. Gliednummern $k \in \mathbb{N}^*$.

Folgen sind i. Allg. *unendlich*, soweit nichts anderes (*endlich*) erwähnt ist.

Die Elemente $f(k)$ des Wertebereiches (*Funktionswerte*) heißen *Glieder der Folge* und sind ebenfalls Zahlen $a_k \in \mathbb{R}$ bzw. $a_k \in \mathbb{C}$.

Schreibweisen einer Zahlenfolge

(a_k), auch $\{a_k\}$, $[a_k]$, $\langle a_k \rangle$ oder nur *Folge* a_k

k: *Index* des Folgengliedes a_k, *Urbild*, $k \in \mathbb{N}^*$
a_k: allgemeines Folgenglied, *Bild, Funktionswert*
a_n: *Endglied* einer endlichen Zahlenfolge mit $a_{n+1} = a_{n+2} = \ldots = 0$

Definitionen von Folgen

In Worten: „Jeder natürlichen Zahl wird ihr Quadrat zugeordnet.“

Explizite Darstellung: $(a_k) : a_k := f(k)$

- Endliche Folge: $(a_k) := a_1, a_2, \ldots, a_n$ oder $a_k := f(k)$ für $k = 1, \ldots, n$
- Unendliche Folge: $(a_k) := a_1, a_2, \ldots$ oder $a_k := f(k)$ für $k \in \mathbb{N}^*$

Rekursive Definition: $a_k := \varphi(a_{k-1})$ mit Angabe des ersten Gliedes

Tabellarische Darstellung[1)]: Beispiel: $(a_k) := 1, 4, 9, \ldots$

Grafische Darstellungen:

- a_k auf der Zahlengeraden (Zahlenfolge)
- (k, a_k) im rechtwinkligen Koordinatensystem (Punktfolge)

---

1) Diese Darstellung kann auch dann noch verwendet werden, wenn die analytischen Darstellungen versagen, z. B. Folge der Primzahlen : $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 \ldots$

Eine Zahlenfolge (a_k) heißt

$$\left.\begin{array}{l} \textit{negativ (positiv) definit} \\ \textit{(streng) monoton wachsend} \\ \textit{(streng) monoton fallend} \\ \textit{alternierend} \end{array}\right\} \text{ wenn } \forall k \text{ gilt } \left\{\begin{array}{l} a_k < 0 \ (a_k > 0) \\ (a_k < a_{k+1}) \ a_k \leq a_{k+1} \\ (a_k > a_{k+1}) \ a_k \geq a_{k+1} \\ a_k \cdot a_{k+1} < 0 \end{array}\right.$$

♦ **Beispiele**

(1) $a_k := k^2 \Rightarrow (a_k) = 1, 4, 9, 16, \ldots$ 12. Glied: $a_{12} = 12^2 = 144$

(2) $a_1 := 2$, $a_k := a_{k-1} + 2k$, $k = 1, 2, \ldots$ (rekursive Definition) $\Rightarrow$
$a_k = k(k+1)$ (explizite Darstellung) ♦

2.4.2 Schranken, Grenzen, Grenzwert einer Folge

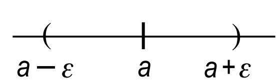
Eine Zahlenfolge (a_k) hat eine *untere Schranke* S_u, wenn $\forall k$: $a_k \geq S_\mathrm{u}$,
obere Schranke S_o, wenn $\forall k$: $a_k \leq S_\mathrm{o}$.

Zum Beispiel ist jede monoton wachsende Folge nach unten beschränkt durch das erste Glied ($S_\mathrm{u} = a_1$).

> Das offene Intervall $U_\varepsilon(a) := (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ heißt *ε-Umgebung* von a, wobei $a \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$.
>
> Eine beliebige Zahlenfolge (a_k) hat den *Grenzwert* g genau dann, wenn für jede noch so kleine positive Zahl $\varepsilon > 0$ fast alle (d. h. alle bis auf endlich viele) a_k innerhalb der ε-Umgebung $U_\varepsilon(g)$ von g liegen.
>
> Damit gleichbedeutend ist: Zu jedem $\varepsilon > 0$ lässt sich ein Index $k_0 = k_0(\varepsilon)$ angeben, sodass gilt:
>
> $|a_k - g| < \varepsilon$ für alle $k \geq k_0$.

Schreibweise

$$\lim_{k\to\infty} a_k = g \quad \text{oder} \quad (a_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} g$$



ε-Umgebung

Eine Zahlenfolge heißt *konvergent*, wenn der Grenzwert g existiert (d. h. (a_k) konvergiert gegen g), sonst *divergent*.

Jede nach oben (unten) beschränkte, monoton wachsende (fallende) Zahlenfolge konvergiert gegen ihr *Supremum* (*Infimum*), siehe 1.3.1.