

Wolfgang H. Müller  
Ferdinand Ferber

Inklusive CD  
mit Schnelltests u. v. a.

# Übungsaufgaben zur Technischen Mechanik

Mit ausführlichen  
Lösungen



3., neu bearbeitete Auflage



HANSER

---

*Müller/Ferber*  
Übungsaufgaben zur  
Technischen Mechanik



---

*Wolfgang H. Müller*  
*Ferdinand Ferber*

# Übungsaufgaben zur Technischen Mechanik

3., neu bearbeitete Auflage

Mit zahlreichen Bildern sowie einer CD-ROM



**Fachbuchverlag Leipzig**  
im Carl Hanser Verlag

---

## **Prof. Dr. rer. nat. habil. Wolfgang H. Müller**

Technische Universität Berlin, Institut für Mechanik  
Lehrstuhl für Kontinuumsmechanik und Materialtheorie

## **PD Dr.-Ing. habil. Ferdinand Ferber**

Universität Paderborn, Fakultät für Maschinenbau  
Lehrstuhl für Technische Mechanik



### **Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek**

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

ISBN 978-3-446-44542-0

E-Book-ISBN 978-3-446-44555-0

Alle in diesem Buch enthaltenen Programme, Verfahren und Bilder wurden nach bestem Wissen erstellt und mit Sorgfalt getestet. Dennoch sind Fehler nicht ganz auszuschließen. Aus diesem Grund ist das im vorliegenden Buch enthaltene Programm-Material mit keiner Verpflichtung oder Garantie irgendeiner Art verbunden. Autoren und Verlag übernehmen infolgedessen keine Verantwortung und werden keine daraus folgende oder sonstige Haftung übernehmen, die auf irgendeine Art aus der Benutzung dieses Programm-Materials oder Teilen davon entsteht.

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt.

Alle Rechte, auch die der Übersetzung, des Nachdrucks und der Vervielfältigung des Buches oder Teilen daraus, vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf ohne schriftliche Genehmigung des Verlages in irgendeiner Form (Fotokopie, Mikrofilm oder ein anderes Verfahren), auch nicht für Zwecke der Unterrichtsgestaltung, reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden.

Fachbuchverlag Leipzig im Carl Hanser Verlag

© 2015 Carl Hanser Verlag München

[www.hanser-fachbuch.de](http://www.hanser-fachbuch.de)

Druck und Bindung: Hubert & Co, Göttingen

Printed in Germany

# Vorwort

*L'exemple est un dangereux leurre;  
Où la guêpe a passé, le moucheron de-  
meure.*

**Jean DE LA FONTAINE (1621-1695) in 'Fables (II, XVI)'**

Diese Aufgabensammlung soll das Lehrbuch *Technische Mechanik für Ingenieure* ergänzen und den Studenten Übungsmaterial bereitstellen, um den zu den jeweiligen Kapiteln gehörigen Stoff unmittelbar zu vertiefen. Die Übungen sind parallel zu unseren Vorlesungen an der Universität Paderborn, der Heriot-Watt University in Edinburgh und an der Technischen Universität Berlin entstanden. Insbesondere gehen die Aufgaben zu den Kapiteln 3 bis 10 auf Notizen und Vorlesungen von Herrn Professor Helmut Wild, Paderborn, zurück, dem wir für seine Anregungen herzlich danken. Weiterhin gebührt Herrn Kollegen Prof. Dr.-Ing. Albert Duda Dank für eine erste Durchsicht des Manuskripts und viele Verbesserungsvorschläge.

Vom Stoffumfang her sind unsere Übungen auf zwei Semesterwochenstunden ausgelegt. Sicherlich werden sich bei Verwendung der Aufgaben in der täglichen Lehre viele weitere Wünsche einstellen. Zum Beispiel haben wir es in dieser Auflage des Übungsbuches versäumt, Aufgaben zum Thema D'ALEMBERTSche und LAGRANGESche Mechanik bereitzustellen. In diesem Zusammenhang können wir vorläufig nur empfehlen, die mit dem NEWTONSchen Konzept ausführlich bearbeiteten Aufgaben der Kapitel 14 und 15 mit diesen Methoden entsprechend durchzurechnen und die präsentierte Lösung unter anderen Gesichtspunkten wiederzuentdecken. Ferner sind manche Abschnitte im Moment etwas unterbesetzt, wie zum Beispiel die Kapitel 11 bis 13, also die Themen Knickstab und Punktkinematik und – kinetik. Unser Ziel ist es, während der kommenden Semester hierzu im Stil des Buches weitere ausgearbeitete Aufgaben auf unserer webpage anzubieten: <http://mechanik.tu-berlin.de/mueller/lehre.htm>. Hier werden wir auch über die zu erwartenden Druckfehler berichten und Informationen in Form einer permanent zu aktualisierenden Errataliste anbieten.

Wir wurden auch mehrfach darauf angesprochen, warum wir unsere Leser denn duzen. Darauf ist zu erwidern, dass selbst wenn wir dies täten, es keineswegs diminutiv, deklassierend oder gar kommunistisch-klassenkämpferisch gemeint wäre. Vielmehr jedoch gebrauchen wir Ausdrücke wie „Stelle auf“, „Erarbeite“, etc. im Sinne eines kategorischen Imperativs und meinen eigentlich „Man stelle auf“, „Man erarbeite“. Um vorzubeugen: Letztere Erklärung ist durchaus im nicht-antifeministischen Sinne zu verstehen!

Abschließend bedanken wir uns herzlich für die angenehme Zusammenarbeit mit Herrn Dipl.-Phys. Jochen Horn vom Carl Hanser Verlag, der das Werden dieses Buches aufmerksam begleitet hat und mit Rat und Tat stets aktiv und äußerst hilfreich zur Seite stand.

Wolfgang H. Müller und Ferdinand Ferber im Sommer 2004

## Vorwort zur 2. Auflage

*... deinde quia longum iter est per praecepta, breve et efficax per exempla.*

**Lucius Annaeus SENECA (1-65) in ‘Epistulae morales ad Lucilium (I, VI [5])’**

Nachdem wir unser Lehrbuch der modularen Struktur angepasst haben, war eine entsprechende Korrektur des Aufgabenbuches überfällig. Diese Lücke haben wir hiermit geschlossen. Parallel zum Lehrbuch findet man in fünf Kapiteln gegliedert Aufgaben zu den an der Technischen Universität Berlin für die Studierenden der Ingenieurwissenschaften angebotenen Modulen Statik, Festigkeitslehre, Dynamik, Kontinuumsmechanik und Energiemethoden.

Weiterhin wurden die Aufgaben thematisch nach den im Kapitel jeweils folgenden Unterpunkten sortiert. Wir stellen nicht ohne Stolz fest, dass zu jedem Unterkapitel Übungsaufgaben bereitstehen. Außerdem ist zu vermelden, dass im Rahmen der beiliegenden CD dem starken Wunsch der Studierenden Rechnung getragen wurde, sog. „Quickies“ üben zu können. Diese Kurz- oder auch Theoriefragen stellen erfahrungsgemäß in der Klausur eine sehr große Hürde dar und werden, obwohl sie es nach überlegtem Studium des Lehrbuches nicht sein sollten, als extrem schwierig empfunden. Entsprechend groß ist die Furcht, sich nicht darauf vorbereiten zu können. Dieses wird nun möglich.

Abschließend gilt unser Dank noch allen unseren studentischen Helfern, nämlich den Damen und Herren cand.-ing. Matti Blume, Claudia Gertheinrich, Stefan Jannikoy, Anna Japs, Saskia Krech, Felix-Joachim Müller, den wissenschaftlichen Mitarbeitern Dipl.-Ing.’s Emek Abali, Andreas Brandmair und Holger Worrack, Herrn Dipl.-Ing. Guido Harneit für die Rechneradministration und Softwareunterstützung sowie – wie immer last but not least – Herrn Dipl.-Phys. Jochen Horn vom Carl Hanser Verlag.

Wolfgang H. Müller und Ferdinand Ferber im Juli 2009

## Vorwort zur 3. Auflage

*Книги читай, однако помни — книга книгой, а своим мозгом двигай!*

**Максим Горький (1868-1936)**

In der vorliegenden 3. Auflage unseres Aufgabenbuches haben wir zunächst einmal versucht, alle durch Assistenten und Studenten bisher gefundenen Druck- und Rechenfehler auszumerzen. Es ist zu vermuten, dass trotz dieser Anstrengung nicht alle beseitigt wurden. Darüber hinaus haben wir uns sehr bemüht, neue Fehler einzubauen, denn insbesondere zu den Kapiteln über Kontinuumsmechanik und Energiemethoden sind weitere Aufgaben hinzugekommen. Folglich gilt es das obige Zitat zu beherzigen und selber zu denken, denn nur selber rechnen macht schlau, und man soll ja nicht alles glauben, was in den Büchern steht.

Für die Mitarbeit an der neuen Auflage möchten wir Assistenten und studentischen Hilfskräften danken, insbesondere den Herren Dr.-Ing. B. Emek Abali, Matti Blume, Anton Köllner, M.Eng. (Hons) und Felix Reich, M.Sc. und Herrn Dipl.-Ing. Guido Harneit für die Rechneradministration und Softwareunterstützung. Für viel Verständnis und Geduld während der Anfertigung dieses Buches ist außerdem Frau Ute Eckardt vom Hanser Verlag Dank zu sagen.

Wolfgang H. Müller und Ferdinand Ferber im Juli 2015



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Statik .....</b>	<b>1</b>
<b>1.1</b>	<b>Grundbegriffe.....</b>	<b>1</b>
1.1.1	Einordnung und Gliederung der Mechanik .....	1
1.1.2	Zum Kraftbegriff.....	2
1.1.3	Einteilung der Kräfte .....	3
1.1.4	Das Schnitt- und Wechselwirkungsprinzip .....	4
<b>1.2</b>	<b>Kräfte in einem Angriffspunkt .....</b>	<b>4</b>
1.2.1	Lineare Gleichungssysteme und zugehörige Lösungsverfahren .....	4
1.2.2	Trigonometrisches Grundwissen.....	9
1.2.3	Ein zentrales Kräftesystem: Pendelstützen mit im Knoten angreifenden Lasten .....	10
1.2.4	Zentrale Kräftegruppe: Eine Öse.....	13
1.2.5	Zentrale Kräftegruppe an der Umlenkrolle .....	14
1.2.6	Zentrale Kräftegruppe: Ozeandampfer im Schlepp .....	16
1.2.7	Gewichte an Pendelstützen mit angreifender Kraft.....	17
<b>1.3</b>	<b>Allgemeine Kräftesysteme: Gleichgewicht des starren Körpers .....</b>	<b>18</b>
1.3.1	Mehrscheibensystem unter Eigengewicht I.....	18
1.3.2	Mehrscheibensystem unter Eigengewicht II .....	20
1.3.3	Hebebühne unter äußerer Last.....	23
1.3.4	Dreidimensionales Stabwerk.....	25
1.3.5	Kräfte- und Momentengleichgewicht am Hebel .....	27
1.3.6	Statisch bestimmt gelagerte Platte.....	28
1.3.7	Hebel im mechanischen Gleichgewicht .....	31
1.3.8	Tetraeder unter externer Last .....	32
1.3.9	Allgemeine Kräftegruppe im Raum: Seiltrommel .....	34
<b>1.4</b>	<b>Der Schwerpunkt .....</b>	<b>37</b>
1.4.1	Grundwissen an Differenzial- und Integralrechnung .....	37
1.4.2	Berechnung der Schwerpunkte von Rotationskörpern mithilfe der 1. GULDINSchen Regel.....	42
1.4.3	Träger unter externen Lasten I .....	44
1.4.4	Träger unter externen Lasten II .....	46
1.4.5	Schwerpunkt eines asymmetrischen Trägerprofils .....	48
1.4.6	Berechnung der Oberfläche eines Rotationskörpers mithilfe der 2. GULDINSchen Regel.....	50

1.4.7	Lagerreaktionen am Balken unter Streckenlast .....	51
1.4.8	Tragwerk unter Dreieckslast.....	53
1.4.9	GERBER-Träger unter Punkt- und Gleichstreckenlast.....	54
1.4.10	Flächenmittelpunkt .....	56
1.4.11	Inhomogene Kreisscheibe mit Aussparung .....	58
1.4.12	Halbkreisscheibe mit rechteckiger Aussparung.....	60
<b>1.5</b>	<b>Lager-, Trag- und Fachwerke .....</b>	<b>61</b>
1.5.1	Stabkräfte in einem Baukran .....	61
1.5.2	Kräfte in einem Stabwerk .....	62
1.5.3	Belastetes Fachwerk .....	64
1.5.4	Fachwerkscheibe.....	67
1.5.5	Fachwerkrahmen mit an einem Seil hängender Last.....	68
<b>1.6</b>	<b>Der biegesteife Träger .....</b>	<b>71</b>
1.6.1	Schnittgrößen am eingespannten Träger unter Last I .....	71
1.6.2	Schnittgrößen am eingespannten Träger unter Last II.....	72
1.6.3	Schnittgrößen am gelenkig gelagerten Träger unter örtlich variabler Streckenlast I .....	75
1.6.4	Schnittgrößen am gelenkig gelagerten Träger unter örtlich variabler Streckenlast II.....	76
1.6.5	Schnittgrößen am abgeknickten Träger I.....	78
1.6.6	Schnittgrößen am abgeknickten Träger II .....	81
1.6.7	Schnittgrößen am gekrümmten Träger I.....	84
1.6.8	Balken mit Streckenlast I.....	86
1.6.9	Schnittgrößen am gekrümmten Träger II .....	89
1.6.10	Tragwerk mit Streckenlast I.....	90
1.6.11	Balken mit Streckenlast II .....	94
1.6.12	Tragwerk mit Streckenlast II .....	96
<b>1.7</b>	<b>Reibungsphänomene .....</b>	<b>100</b>
1.7.1	COULOMBSche Reibung zwischen Keil und Klotz.....	100
1.7.2	Reibung zwischen Leiter und Wand.....	102
1.7.3	Selbstsperrung durch Hebelwirkung.....	104
1.7.4	Malergüst .....	106
1.7.5	Vertikal verschiebbare Bühne zwischen zwei Wänden.....	108
1.7.6	Waschmaschinentrommel.....	109
<b>2</b>	<b>Festigkeitslehre.....</b>	<b>112</b>
<b>2.1</b>	<b>Einführung, Begriffe .....</b>	<b>112</b>

<b>2.2 Zug- und Druckbeanspruchung .....</b>	<b>115</b>
2.2.1 Parallelschaltung elastischer Stäbe.....	115
2.2.2 Verlängerung eines Drahtseils unter Eigengewicht .....	117
2.2.3 Zweifach eingespannter Stab .....	118
2.2.4 Thermospannungen in einem eingespannten Stab .....	119
2.2.5 Wärmespannungen in hintereinander geschalteten Stäben .....	120
2.2.6 Symmetrisch parallel geschaltete elastische Stäbe unter thermischer Last.....	122
2.2.7 Parallel geschaltete Stäbe unter thermischer Last.....	124
<b>2.3 Schubbeanspruchung und HOOKEsches Gesetz .....</b>	<b>126</b>
<b>2.4 Biegebeanspruchung des Balkens.....</b>	<b>128</b>
2.4.1 Flächenträgheitsmoment eines sechseckigen Stabquerschnitts.....	128
2.4.2 Flächenträgheitsmoment eines zusammengesetzten Trägerprofils ....	130
2.4.3 Spannungsnachweis eines Trägers unter schiefer Biegung.....	131
<b>2.5 Schub infolge Querkraft beim Biegeträger .....</b>	<b>134</b>
2.5.1 Spannungsnachweis für einen symmetrisch belasteten Träger mit Lamelle.....	134
2.5.2 Spannungsnachweis für einen Träger mit Lamelle .....	137
2.5.3 Spannungsnachweis für ein Kastenprofil.....	141
2.5.4 Spannungsnachweis für einen Doppel-T-Träger unter Querlast.....	144
2.5.5 Spannungsnachweis für eine Lasttraverse.....	146
<b>2.6 Die elastische Linie des Biegeträgers (Biegelinie) .....</b>	<b>149</b>
2.6.1 Durchbiegung des Mastes einer Windkraftanlage .....	149
2.6.2 Biegelinie eines beidseitig eingespannten Trägers.....	152
2.6.3 Durchbiegung eines abgestuften Trägers .....	156
<b>2.7 Axiale Verdrehung/Torsion.....</b>	<b>159</b>
2.7.1 Auslegung dreier Trägerprofile unter Torsion .....	159
2.7.2 Torsion rechteckiger Querschnitte .....	160
<b>2.8 Zusammengesetzte Beanspruchung .....</b>	<b>161</b>
2.8.1 Träger unter Biege- und Torsionsbelastung .....	161
2.8.2 Das Grundproblem des MOHRschen Spannungskreises.....	163
2.8.3 Scheibe im ebenen Spannungszustand.....	164
<b>2.9 Stabilitätsprobleme .....</b>	<b>166</b>
2.9.1 Auslegung auf gleiche Knicksicherheit.....	166
2.9.2 Gleiche Sicherheit zweier Knickstäbe.....	167
2.9.3 Auslegung auf vorgegebene Knicksicherheit.....	168

2.9.4	Hintereinandergeschaltete Knickstäbe.....	169
2.9.5	Die exakte Lösung des 1. EULER-Falls.....	171
<b>3</b>	<b>Dynamik.....</b>	<b>176</b>
<b>3.1</b>	<b>Punktförmige Masse.....</b>	<b>176</b>
3.1.1	Ein Marschflugkörper.....	176
3.1.2	Kinematik eines Massenschwerpunkts.....	178
3.1.3	Kinematik eines Zusammenstoßes.....	180
3.1.4	Kinematik kombinierter Bewegungen.....	181
3.1.5	Dynamik des Schleuderballs.....	182
3.1.6	Dynamik der Überschlagschiffschaukel.....	185
3.1.7	Die CORIOLIS-Kraft.....	188
3.1.8	Dynamik des Raketenschlittens im Looping.....	190
3.1.9	Gebremste Flugbewegung im Erdschwerefeld.....	197
3.1.10	Arbeit längs der schiefen Ebene.....	200
<b>3.2</b>	<b>Die Dynamik von Massenpunktsystemen.....</b>	<b>206</b>
3.2.1	Abbremsen eines Düsenjägers auf einem Flugzeugträger.....	206
3.2.2	Doppelter Flaschenzug vektoriell gerechnet.....	208
3.2.3	Fallendes Seil und fallende Kette.....	211
<b>3.3</b>	<b>Die Dynamik des starren Körpers.....</b>	<b>214</b>
3.3.1	Starrkörperkinematik.....	214
3.3.2	Starrkörperkinematik kommunizierender Walzen.....	216
3.3.3	Eine Hebevorrichtung.....	218
3.3.4	Eine beschwingte Schlittenfahrt.....	220
3.3.5	Ein Fallrad.....	221
3.3.6	Bewegung einer Tänzerwalze.....	222
3.3.7	Massenträgheitsmoment von Voll- und Hohlkugel.....	224
3.3.8	Die Bewegung des Rades oder die <i>Rota Aristotelis</i> .....	225
<b>3.4</b>	<b>Schwingungen.....</b>	<b>230</b>
3.4.1	Ein schwingfähiges Mehrkörpersystem.....	230
3.4.2	Das verstellbare Uhrpendel.....	231
3.4.3	Pendel mit Drehfeder.....	232
3.4.4	Passive Entstörung eines Messgeräts.....	233
3.4.5	Schwingungstilgung beim Zweimassenschwinger.....	235
3.4.6	Schwingender Starrkörper.....	236

<b>4</b>	<b>Kontinuumsmechanik.....</b>	<b>238</b>
4.1	Bilanzgleichungen der Masse.....	238
4.2	Bilanzgleichungen des Impulses .....	239
4.2.1	Spannungstensor und Fließspannung.....	239
4.2.2	Koordinatentransformationen.....	240
4.2.3	Hauptspannungen.....	242
4.2.4	Fließkriterium im Hauptspannungsraum.....	246
4.2.5	Die MOHRschen Kreise .....	248
4.2.6	EUKLIDische Transformationen.....	250
4.2.7	Invarianz der Bilanzgleichungen.....	254
4.3	Einfache Materialgleichungen .....	256
4.3.1	Die BERNOULLische Höhenformel .....	256
4.3.2	Kompressible Flüssigkeiten .....	257
4.3.3	Kompressibilität in Festkörpern.....	259
4.4	Bilanzgleichungen des Drehimpulses .....	260
4.4.1	Eigenschaften und Anwendungen des total antimetrischen Tensors ..	260
4.4.2	Der total antimetrische Tensor und seine Anwendung beim Spatprodukt .....	261
4.4.3	Der total antimetrische Tensor und seine Anwendung beim Doppelkreuzprodukt.....	262
4.4.4	Eine Anwendung des antimetrischen Tensors .....	263
4.5	Einführung in die lineare Elastizitätstheorie.....	265
4.5.1	Lösung der Schwingungsgleichung für eine Gitarrensaite .....	265
4.5.2	Balkenschwingung.....	268
4.5.3	Saitenschwingung.....	272
4.5.4	Scherung eines Klotzes aus linear-elastischem Material .....	274
4.6	Einführung in die Hydromechanik .....	276
4.6.1	Ein mit Wasser gefüllter Eimer in Rotation.....	276
4.6.2	Kommunizierende Röhren .....	278
4.6.3	COUETTE-Strömung.....	279
4.6.4	HAGEN-POISEUILLE-Strömung .....	281
<b>5</b>	<b>Energiemethoden .....</b>	<b>282</b>
5.1	Energiebilanz.....	282
5.1.1	Die Wärmeleitungsgleichung.....	282
5.1.2	Wärmeleitung in einem vorgewärmten Balken.....	283

5.1.3	Kolben im Schwerfeld .....	289
<b>5.2</b>	<b>Entropiebilanz und zweiter Hauptsatz.....</b>	<b>292</b>
5.2.1	Entropie des idealen Gases .....	292
5.2.2	Entropieproduktion beim fallenden Kolben .....	293
<b>5.3</b>	<b>Die Sätze von CASTIGLIANO, BETTI und MAXWELL .....</b>	<b>295</b>
5.3.1	Eine Anwendung des 1. Satzes von CASTIGLIANO I.....	295
5.3.2	Eine Anwendung des 1. Satzes von CASTIGLIANO II .....	297
5.3.3	Eine Anwendung des 1. Satzes von CASTIGLIANO III.....	299
5.3.4	Formänderungsenergie am Balken unter Querkraftsbelastung.....	301
5.3.5	Anwendung der Sätze von BETTI und MAXWELL auf statisch unbestimmte Systeme .....	303
<b>5.4</b>	<b>Energiefunktionale und ihre Extrema.....</b>	<b>307</b>
<b>5.5</b>	<b>Das Prinzip der virtuellen Verschiebung (PdvV).....</b>	<b>310</b>
5.5.1	Berechnung von Gleichgewichtslagen mithilfe des Prinzips der virtuellen Verschiebung.....	310
5.5.2	Nürnberger Schere.....	312
5.5.3	Fachwerk.....	312
<b>5.6</b>	<b>Das Prinzip der virtuellen Kräfte (PdvK).....</b>	<b>313</b>
5.6.1	Anwendung des Prinzips der virtuellen Kraft in Fachwerken.....	313
5.6.2	Beispiel zum PdvK: Reine Normalkraftbelastung in Fachwerken....	315
5.6.3	Absenkung eines Punkts auf einem Balken auf zwei Stützen .....	317
5.6.4	Deformation in einem Viertelkreisbogen .....	319
5.6.5	Absenkung einer Kreiswelle.....	319
5.6.6	Behandlung eines einfach statisch unbestimmten Systems mithilfe des Prinzips der virtuellen Kraft .....	321
5.6.7	Zweifach statisch unbestimmter Träger unter Gleichstreckenlast....	324
<b>5.7</b>	<b>Dynamische Energieprinzipie.....</b>	<b>326</b>
5.7.1	Gedämpfte schwingende Walze .....	326
5.7.2	Gedämpftes Starrkörpersystem.....	329
5.7.3	Multistarrkörpersystem.....	331
	<b>Stichwort- und Namensregister .....</b>	<b>334</b>
	<b>Hinweise zur beigefügten CD-ROM .....</b>	<b>339</b>

