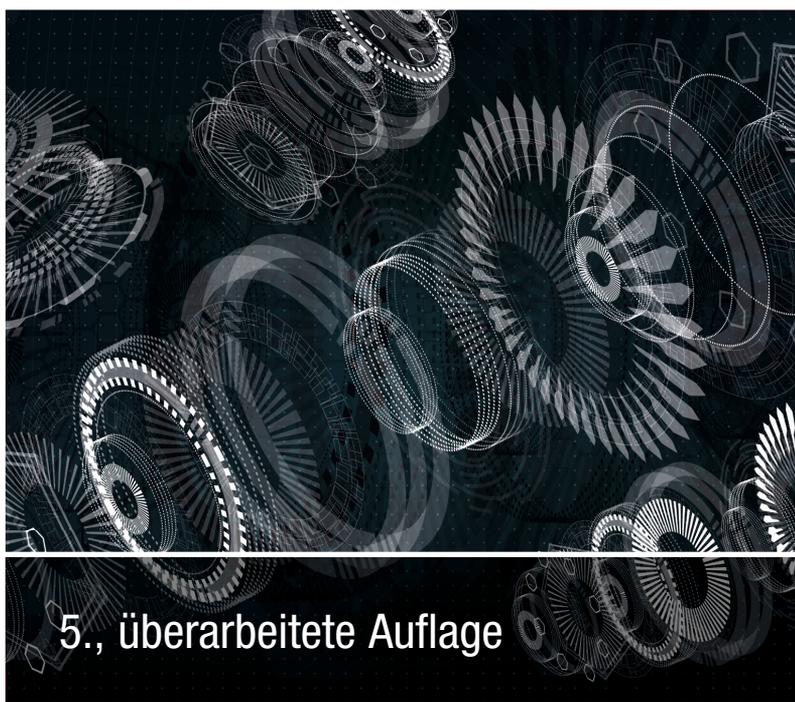


Wolfgang H. Müller
Ferdinand Ferber

Für die
BACHELOR-
AUSBILDUNG
geeignet

Technische Mechanik für Ingenieure



5., überarbeitete Auflage

HANSER

Müller / Ferber

Technische Mechanik für Ingenieure



Bleiben Sie auf dem Laufenden!

Hanser Newsletter informieren Sie regelmäßig über neue Bücher und Termine aus den verschiedenen Bereichen der Technik. Profitieren Sie auch von Gewinnspielen und exklusiven Leseproben. Gleich anmelden unter

www.hanser-fachbuch.de/newsletter

Für R.H.

Wolfgang H. Müller
Ferdinand Ferber

Technische Mechanik für Ingenieure

5., überarbeitete Auflage

Mit zahlreichen Abbildungen sowie Aufgaben und Lösungen im Internet

HANSER

Die Autoren:

Prof. Dr. rer. nat. habil. Wolfgang H. Müller, Technische Universität Berlin, Institut für Mechanik, Fachgebiet Kontinuumsmechanik und Materialtheorie

PD Dr.-Ing. Ferdinand Ferber, Universität Paderborn, Fakultät für Maschinenbau, Lehrstuhl für Technische Mechanik



Alle in diesem Buch enthaltenen Informationen wurden nach bestem Wissen zusammengestellt und mit Sorgfalt geprüft und getestet. Dennoch sind Fehler nicht ganz auszuschließen. Aus diesem Grund sind die im vorliegenden Buch enthaltenen Informationen mit keiner Verpflichtung oder Garantie irgendeiner Art verbunden. Autoren und Verlag übernehmen infolgedessen keine Verantwortung und werden keine daraus folgende oder sonstige Haftung übernehmen, die auf irgendeine Art aus der Benutzung dieser Informationen – oder Teilen davon – entsteht.

Ebenso wenig übernehmen Autoren und Verlag die Gewähr dafür, dass beschriebene Verfahren usw. frei von Schutzrechten Dritter sind. Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek:

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt.

Alle Rechte, auch die der Übersetzung, des Nachdruckes und der Vervielfältigung des Buches, oder Teilen daraus, vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf ohne schriftliche Genehmigung des Verlages in irgendeiner Form (Fotokopie, Mikrofilm oder ein anderes Verfahren) – auch nicht für Zwecke der Unterrichtsgestaltung – reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden.

© 2019 Carl Hanser Verlag München

www.hanser-fachbuch.de

Lektorat: Dipl.-Ing. Volker Herzberg

Herstellung: Björn Gallinge

Coverkonzept: Marc Müller-Bremer, www.rebranding.de, München

Titelmotiv: © shutterstock.com/SergeyBitos

Coverrealisation: Max Kostopoulos

Druck und Bindung: Hubert & Co. GmbH & Co. KG BuchPartner, Göttingen

Printed in Germany

Print-ISBN: 978-3-446-46117-8

E-Book-ISBN: 978-3-446-46118-5

Vorwort zur 1. Auflage

Why, anybody can have a brain. That's a very mediocre commodity. Every pusillanimous creature that crawls on the Earth or slinks through slimy seas has a brain. Back where I come from, we have universities, seats of great learning, where men go to become great thinkers. And when they come out, they think deep thoughts and with no more brains than you have. But they have one thing you haven't got: a diploma.

Frank Morgan in 'The Wizard of Oz', 1939

Unser Buch zu den Grundlagen der Technischen Mechanik ist das Resultat von Vorlesungen über viele Jahre, die wir an der Universität Paderborn, der Heriot-Watt University in Edinburgh und seit neuestem auch an der Technischen Universität Berlin gehalten haben. Letztendlich jedoch geht der Text auf Ideen und Anregungen zurück, die aus den Notizen und Vorlesungen von Herrn Professor Helmut Wild / Paderborn stammen. Ihm sei an dieser Stelle besonders herzlich gedankt. Der hier präzentierte Stoff bietet Material für das Ingenieurgrundstudium an deutschsprachigen Universitäten und Technischen Hochschulen und deckt sich mit dem Inhalt der einsemestrigen Veranstaltungen Mechanik A (Statik) und Mechanik B (elementare Festigkeitslehre), wie sie an der Universität Paderborn Studenten des Maschinenbaus hören, sowie der einsemestrigen Vorlesungen Mechanik 1 (Einführung in die Statik und Festigkeitslehre), Mechanik 2 (Reibung, Stabilität, elementarer Energiesatz, Massenpunkt- und 2D-Starrkörperdynamik, Schwingungen) und schließlich Mechanik 3 (Kontinuumsmechanik, insbesondere Grundlagen der Elastizitätstheorie, Kontinuumschwingungen und Hydromechanik sowie Energieprinzipie und höhere Dynamik), wie sie für Studenten des Maschinenbaus, des Verkehrswesens und der Physikalischen Ingenieurwissenschaft an der Technischen Universität in Berlin derzeit vorgeschrieben sind.

Viele waren an der Entstehung dieses Buches sowie der begleitenden Software aktiv beteiligt, Studenten, Assistenten, technisches und nicht-technisches Personal. Ohne sie wäre diese Arbeit nicht vollendet worden. Ein besonderes Dankeschön gilt den Helfern aus jüngster Zeit, Karin Bethke, Dipl.-Ing. (FH) Guido Harneit, Berrit Krahl, cand. ing. Manuela Krüger sowie Ingenieur Hadi Sawan, cand. ing. Torsten Schneider und Ingenieur Firas Seifaldeen. Die Erstellung der CD erfolgte durch cand. Wirt.-Ing.'s Isabel Koke, Volker Huneke sowie Herrn Ludger Merkens. Aufgaben zum Dynamikteil sind auf der CD im Moment nur rudimentär vorhanden. Dass hierzu überhaupt Material existiert, ist Herrn Dipl.-Math. Stefan Neumann von der Universität Paderborn zu verdanken. Herrn Kollegen Prof. Dr.-Ing. Albert Duda ist für die kritische Durchsicht des Manuskripts und viele Verbesserungsvorschläge zu danken.

Unter den angehenden Ingenieuren ist die Technische Mechanik ein notorisch unbeliebtes Studienfach. Nicht zuletzt aufgrund der ihr eigenen mathematisch-formalen Struktur gilt sie als „theoretisch“ und „unpraktisch“, ja, bei nicht wenigen ist sie sogar als „altmodischer“, den Erfordernissen modernen Ingenieurwesens nicht länger gerecht werdender Ballast verschrien. Dies ist jedoch ein Irrtum, denn die tägliche Ingenieurpraxis zeigt, dass neue Konstruktionen, im Mikro- wie im Makrobereich, zur Bestimmung ihrer Zuverlässigkeit die klassischen Konzepte der Mechanik benötigen und sich die Totgesagte somit bester Gesundheit erfreut und bei der Herstellung besserer technischer Produkte hilft. Die Konzepte der Technischen Mechanik zu kennen, zu beherrschen und anzuwenden ist leider nur durch Übung möglich. Dies erfordert Geduld und Ausdauer und zwar von beiden Seiten, den Lernenden *und* den Lehrenden. Zum

Trost sollten die Studenten bedenken, dass am Ende der geistigen Anabasis auch ihnen als Lohn ein Diplom winkt, dessen Bedeutung für unser Leben schon der Wizard of Oz richtig einzuschätzen wusste.

Überhaupt, dass der angehende Ingenieur es nicht immer leicht hat, wurde bereits von Thomas Mann in seinem Roman „Der Zauberberg“ bemerkt. So erwähnt eine der Hauptfiguren des Romans, Hans Castorp, zu seinem behandelnden Arzt, Dr. Krokowski, beiläufig, dass er gerade sein Examen bestanden hätte: *„Was für ein Examen haben Sie abgelegt, wenn die Frage erlaubt ist?“* *„Ich bin Ingenieur, Herr Doktor“, antwortete Hans Castorp mit bescheidener Würde. „Ah, Ingenieur!“ Und Dr. Krokowskis Lächeln zog sich gleichsam zurück, büßte an Kraft und Herzlichkeit für den Augenblick etwas ein. „Das ist wacker. Und Sie werden hier also keinerlei ärztliche Behandlung in Anspruch nehmen, weder in körperlicher noch in psychischer Hinsicht?“* *„Nein, ich danke tausendmal!“ sagte Hans Castorp und wäre fast einen Schritt zurückgewichen.*

Eines darf abschließend ohne zu zaudern festgestellt werden: Das *rechtzeitige* Studium dieses Buches inklusive Bearbeitung der auf der CD angebotenen Übungen *vor* der Klausur, bewahrt vor dem Zauberberg und der Inanspruchnahme ärztlicher, insbesondere psychiatrischer Hilfe.

Wolfgang H. Müller und Ferdinand Ferber im Sommer 2003

Vorwort zur 5. Auflage

Wenn dann die Schatten sich senken und all das Verfehlt und Ungeschehene und Ungetane mich ängstet ...
Thomas Mann, Rede an Katja Mann

Seit dem Erscheinen der vierten Auflage unseres Buches sind wieder viele tausend Studierende durch die Grundlagenveranstaltungen zur Technischen Mechanik gegangen. Dabei haben wir diverse Tippfehler entdeckt und nun eliminiert.

Außerdem, der mangelnden Unterrichtszeit und der Mode sei es geschuldet, wurde in der Neuauflage auf die Beschreibung diverser zeichnerischer Verfahren verzichtet und zwar insbesondere auf das Seileck und die MOHRsche Analogie bei der Bestimmung der Biegelinie. Interessierte sowie vehemente Verfechter dieser Methoden haben aber weiterhin die Möglichkeit, sich hierüber in den vorangegangenen Auflagen zu informieren.

Wie auch schon zuvor können mit grauer Berandung gekennzeichnete Seiten und Passagen beim ersten Lesen übergangen werden.

Abschließend gilt unser Dank noch allen unseren Assistenten Dr.-Ing. Emek Abali, Gregor Ganzosch, M.Sc., Sebastian Glane, M.Sc., Dr.-Ing Felix Reich, Wilhelm Rickert, M.Sc. und – seit Neuestem – Herrn Volker Herzberg vom Carl Hanser Verlag.

Wolfgang H. Müller und Ferdinand Ferber im Juli 2019

Inhaltsverzeichnis

1	Statik	1
1.1	Grundbegriffe	1
1.1.1.	Zum Kraftbegriff	1
1.1.2	Einteilung der Kräfte, das Schnitt- und das Wechselwirkungsprinzip	3
1.2	Kräfte in einem Angriffspunkt	6
1.2.1	Zusammensetzen von Kräften	6
1.2.2	Zerlegen von Kräften in der Ebene: Komponentendarstellung	9
1.2.3	Gleichgewicht von Kräften in einem Angriffspunkt	12
1.2.4	Zentrale Kräftegruppe im Gleichgewicht: Haltekraft auf schiefer Ebene	14
	Lösung im kartesischen Koordinatensystem	14
	Vektorielle Berechnung der Haltekraft	15
1.2.5	Zentrale Kräftegruppe im Gleichgewicht: Verkettete Pendelstäbe	15
	Lösung im kartesischen Koordinatensystem	15
	Stabkräfte vektoriell berechnet	17
1.2.6	Zentrale Kräftegruppen im Raum und Vergleich mit zwei Dimensionen	18
1.3	Allgemeine Kräftesysteme: Gleichgewicht des starren Körpers	20
1.3.1	Moment beliebig verteilter Kräftegruppen in der Ebene	20
	Zwei zueinander parallele Kräfte	20
	Definition des Momentes einer Kraft	23
	Zum Gesamtmoment ebener Kräftesysteme	24
	Kräfte an einer Sechseckscheibe	24
	Beispiel: Das Moment eines Kräftepaares	24
1.3.2	Gleichgewichtsbedingungen für beliebige Kräftesysteme in der Ebene	26
1.3.3	Gleichgewicht illustriert an einem System von Pendelstäben	28
1.3.4	Vektorielle Deutung des Momentes	29
	Definition des Momentenvektors	29
	Bemerkungen zum Kreuzprodukt von Vektoren	30
	Ein Quader unter dem Einfluss äußerer Kräfte	33

1.3.5 Allgemeine Kräftegruppen im Raum	34
Zusammenfassung der Gleichgewichtsbedingungen	34
Rahmen im Raum.....	35
1.4. Der Schwerpunkt.....	37
1.4.1 Schwerpunkt einer Gruppe paralleler Kräfte	37
1.4.2 Spezielle Linienkräfte (Streckenlasten): Gleichstrecken- und Dreieckslast	39
1.4.3 Massenschwerpunkt eines Volumens.....	40
1.4.4 Zum Flächenschwerpunkt	44
Flächenschwerpunkt eines Dreiecks	46
Flächenschwerpunkt einer Parabel.....	48
Flächenschwerpunkt eines Halbkreises.....	49
1.4.5 Zum Linienschwerpunkt	50
1.5 Lager, Trag- und Fachwerke.....	52
1.5.1 Freiheitsgrade, Lager und ihre technische Realisierung	52
Einwertige Lager	52
Zweiwertige Lager	52
Dreiwertige Lager	53
1.5.2 Tragwerke.....	54
1.5.3 Fachwerke	55
Definition des idealen Fachwerks	55
Prinzipielle Berechnung der Stabkräfte: Knotenpunktverfahren	57
Der RITTERSche Schnitt.....	59
1.6 Der biegesteife Träger	60
1.6.1 Schnittgrößen – Begriffsbildung	60
1.6.2 Zur Berechnung von Schnittgrößen am geraden Balken	62
Gerader Balken unter Einzellasten.....	62
Balken auf zwei Stützen unter Einzellast (Dreipunktbiegeprobe)	65
Kragträger unter Einzellast und Momentenwirkung.....	67
Zusammenhang zwischen Belastung und Schnittgrößen	68
Integration der Differentialgleichungen für Querkraft- und Momentenfläche.....	69
Randbedingungen für die Querkraft- und für die Momentenfläche.....	69

Übergangsbedingungen für die Querkraft- und für die Momentenfläche	70
Momentenfläche bei komplizierteren Belastungen	72
Ein vergleichendes Beispiel.....	74
1.6.3 Zur Berechnung von Schnittgrößen am Rahmentragwerk	78
Der rechtwinklige Rahmen	78
Beliebiger geknickter Träger	80
Der stetig gekrümmte Träger — Theorie	81
Ein Halbkreisbogen	83
1.7. Reibungsphänomene.....	84
1.7.1 Gleitreibung und Haftreibung.....	84
1.7.2 Reibung an der schiefen Ebene	88
1.7.3 Spezielle Anwendungen des Reibungsphänomens.....	90
Der PRONYSche Zaum (Reibungsbremse)	90
Schraube	92
Umschlingungsreibung.....	97
Seilbremse	98
Reibung am Keil.....	101
2 Festigkeitslehre.....	103
2.1 Einführung; Begriffe	103
2.1.1 Aufgabe der Festigkeitslehre	103
2.1.2 Beanspruchungsarten.....	104
2.1.3 Begriff der Spannung.....	105
2.2 Zug- und Druckbeanspruchung	107
2.2.1 Zug- und Druckspannung in Bauteilen.....	107
2.2.2 Beispiel: Spannungsverteilung in einem konischen Stab	109
2.2.3 Beispiel: Stab gleicher Festigkeit	110
2.2.4 Die Längenänderung des Zug- oder Druckstabes.....	111
2.2.5 Die Querdehnung des Zug- oder Druckstabes.....	114
2.2.6 Verformung statisch bestimmter Stabsysteme	115
2.2.7 Statisch unbestimmte Stabsysteme	116
2.2.8 Behinderte Wärmeausdehnung.....	118

2.3	Schubbeanspruchung und HOOKESches Gesetz.....	119
2.3.1	Spannungen infolge Schublast	119
2.3.2	Verformung infolge Schublast	119
2.4	Biegebeanspruchung des Balkens	120
2.4.1	Biegespannungsformel	120
2.4.2	Trägheits- und Widerstandsmomente für einfache Querschnittsformen	123
2.4.3	Satz von STEINER	125
2.4.4	Die Normalspannungen im Balken infolge Querkraftbiegung	128
2.5	Schub infolge Querkraft beim Biegeträger	130
2.5.1	Ingenieurformel für die Schubspannungen	130
2.5.2	Berechnung der Schubspannungen für spezielle Trägerformen	132
2.5.3	Schubspannungen im geschweißten, geklebten und genieteten Träger	134
2.5.4	Schubmittelpunkt	136
2.6	Die elastische Linie des Biegeträgers (Biegelinie).....	137
2.6.1	Die Differenzialgleichung der Biegelinie	137
2.6.2	Beispiel: Der eingespannte Balken	140
2.6.3	Beispiel: Träger auf zwei Stützen	141
2.6.4	Anwendung auf statisch unbestimmte Systeme	143
2.6.5	Ermittlung von Verformungen mit Hilfe des Superpositionsprinzips	144
2.6.6	Schiefe Biegung (Begriff der Hauptträgheitsachsen).....	145
2.7	Axiale Verdrehung/Torsion	151
2.7.1	Schubspannungen am Kreisquerschnitt	151
2.7.2	Polares Trägheitsmoment für Kreisprofile.....	153
2.7.3	Dünnwandige geschlossene Hohlprofile und dünnwandige offene Profile	154
2.7.4	Beliebige offene Profile, dickwandige Hohlprofile	157
2.7.5	Verformung infolge Torsion, Verdrehwinkel	158
	Spezifischer Winkel, Drehfederkonstante.....	160
	Darstellung des Torsionsmomentes (M_T -Fläche).....	160
2.8	Zusammengesetzte Beanspruchung.....	161
2.8.1	Einführung.....	161

2.8.2	Normalspannungen aus Normalkräften und Biegung	162
2.8.3	Schubspannungen aus Querkraft und Torsion	164
2.8.4	Begriff des Spannungstensors im ebenen Fall	165
2.8.5	Begriff des Spannungstensors im räumlichen Fall	169
2.8.6	Der MOHRsche Kreis	171
2.8.7	Vergleichsspannungen	177
2.8.8	Spannungstensor für den Balken	178
2.9	Stabilitätsprobleme	184
2.9.1	Einführung	184
2.9.2	Ein erstes Stabilitätsproblem	185
2.9.3	Zur Phänomenologie von Stabilitätsproblemen	186
2.9.4	Die EULERSche Knickgleichung	186
2.9.5	Die vier EULERSchen Knicktypen	189
3	Dynamik	193
3.1	Punktförmige Masse	193
3.1.1	Kinematik eines einzelnen Massenpunktes	193
	Position, Geschwindigkeit und Beschleunigung im Eindimensionalen	193
	Beispiele zur eindimensionalen Bewegung	196
	Position, Geschwindigkeit und Beschleunigung im Raum	202
	Koordinatensysteme	204
3.1.2	Kinetik des Massenpunktes	208
	Die NEWTONSchen Gesetze	208
	Dynamik des freien Massenpunktes	209
	Geführte Bewegungen	211
	Bewegungen unter dem Einfluss von Reibungskräften	215
3.1.3	Der Impulssatz	218
3.1.4	Energiesatz der Mechanik	221
3.1.5	Drehimpuls und Momentensatz	226
3.2	Die Dynamik von Massenpunktsystemen	226
3.2.1	Kinematik	226
3.2.2	Kinetik	228

3.2.3	Impuls- und Schwerpunktsatz für Massenpunktsysteme	230
3.2.4	Drehimpulssatz für Massenpunktsysteme	231
3.2.5	Der Energie- und Arbeitssatz für Massenpunktsysteme	235
3.2.6	Eine Anwendung des Impuls- und des Energiesatzes: zentrische Stöße zwischen kugelförmigen Massen	236
3.2.7	Körper mit zeitveränderlicher Masse	239
3.3	Die Dynamik des starren Körpers	242
3.3.1	Starrkörperkinematik.....	242
	Freiheitsgrade des starren Körpers	242
	Translation des starren Körpers.....	243
	Rotation des starren Körpers um eine feste Achse.....	244
	Allgemeine Bewegung des starren Körpers in der Ebene.....	246
	Zwei Beispiele zur Kinematik des starren Körpers.....	249
	Der Momentanpol	252
3.3.2	Starrkörperkinetik.....	253
	Einleitende Bemerkungen	253
	Rotation eines starren Körpers um eine feste Achse.....	253
	Ein Beispiel zur Aufstellung der Bewegungsgleichung von um eine feste Achse rotierenden Körpern	257
	Energie- und Arbeitssatz bei Rotation um eine feste Achse	258
	Weitere Beispiele zur Bewegung starrer Körper: Reibungsbremse und Walze	259
	Analogie zwischen der geradlinigen Bewegung eines Massenpunktes und der Starrkörperrotation um eine feste Achse	262
	Kinetik von ebenen starren Körpern (Scheiben)	263
	Beispiel I zur Starrkörperbewegung von Scheiben	265
	Beispiel II zur Starrkörperbewegung von Scheiben: Die ATWOODSche Fallmaschine	268
	Beispiel III zur Starrkörperbewegung von Scheiben: Das Jojo	269
	Beispiel IV zur Starrkörperbewegung von Scheiben	269
	Impuls-, Arbeits- und Energiesatz bei der Bewegung starrer Körper in der Ebene	272
	Ein Beispiel zum Energiesatz ebener starrer Körper	274

3.4	Schwingungen	276
3.4.1	Grundbegriffe der Schwingungslehre.....	276
3.4.2	Freie, ungedämpfte Schwingungen mit einem Freiheitsgrad	279
	Bewegungsgleichungen und ihre Lösung.....	279
	Alternativen und ergänzende Betrachtungen mit Hilfe des Energiesatzes	281
	Beispiele für die freie ungedämpfte Schwingung mit einem Freiheitsgrad	283
	Federkonstanten.....	284
3.4.3	Freie, gedämpfte Schwingungen mit einem Freiheitsgrad	288
	COULOMBreibung.....	288
	Geschwindigkeitsproportionale Reibung: Der lineare Dämpfer (Dashpot).....	289
	Ein komplizierteres Beispiel für eine Schwingung mit Dämpfung	294
3.4.4	Angefachte Schwingungen	295
	Angefachte Schwingungen ohne Dämpfung	295
	Angefachte Schwingungen mit geschwindigkeitsproportionaler Dämpfung	298
3.4.5	Schwingungen mit endlich vielen Freiheitsgraden.....	302
	Motivation und Erinnerung	302
	Bewegungsgleichung der freien, ungedämpften Schwingung mit zwei Freiheitsgraden	303
	Erzwungene Schwingung mit zwei Freiheitsgraden	308
4	Kontinuumsmechanik	311
4.1	Bilanzgleichungen der Masse	311
4.1.1	Bilanzgleichung der Masse in globaler Form.....	311
4.1.2	Massendichte und Umschreibung der globalen Massenbilanz.....	312
4.1.3	LEIBNIZsche Regel zur Differentiation von Parameterintegralen und REYNOLDSsches Transporttheorem	314
4.1.4	Lokale Massenbilanz in regulären Punkten.....	318
4.1.5	Alternativschreibweisen der Massenbilanz in regulären Punkten; Endziel des Mechanikers	320
4.2	Bilanzgleichungen des Impulses	322
4.2.1	Bilanzgleichung des Impulses in globaler Form	322

4.2.2	Das CAUCHYSche Tetraederargument	325
4.2.3	Bilanzgleichung des Impulses in lokaler Form	326
4.2.4	Eine Bemerkung zum REYNOLDSschen Transporttheorem	328
4.3	Einfache Materialgleichungen	330
4.3.1	Das reibungsfreie Fluid	330
4.3.2	Das NAVIER-STOKES-Fluid	331
4.3.3	Der linear-elastische HOOKESche Körper	331
4.4	Bilanzgleichungen des Drehimpulses	336
4.4.1	Die lokale Bilanz des Drehimpulses	336
4.4.2	Die globale Bilanz des Drehimpulses	338
4.5	Einführung in die lineare Elastizitätstheorie	339
4.5.1	Der eindimensionale Zugstab neu gesehen	339
4.5.2	Die LAMÉ-NAVIERschen Gleichungen	341
4.5.3	Der axial schwingende Zugstab	346
4.5.4	Die Schwingungsgleichung der Geigensaite	348
4.5.5	Die Schwingungsgleichung einer Membran	352
4.5.6	Der transversal schwingende Balken	354
4.5.7	Lösungsmethoden I: Das Verfahren von D'ALEMBERT	355
4.5.8	Die Frage der Randbedingungen	360
4.5.9	Lösungsmethoden II: Das Verfahren von BERNOULLI	362
4.5.10	Zur Äquivalenz der Lösungsverfahren nach D'ALEMBERT und BERNOULLI	369
4.6	Einführung in die Hydromechanik	372
4.6.1	Massenbilanz bei der Rohrströmung	372
4.6.2	Der hydrostatische Druck	375
4.6.3	Die BERNOULLISche Gleichung	376
4.6.4	Der Auftrieb nach ARCHIMEDES	378
5	Energiemethoden	381
5.1	Energiebilanzen	381
5.1.1	Lokale und globale Bilanz der kinetischen Energie	381
5.1.2	Zum Begriff der inneren Energie	383
5.1.3	Gesamtbilanz der Energie oder Energieerhaltungssatz	383

5.1.4 Bilanz der inneren Energie	386
5.1.5 Energiebilanz bei der Rohrströmung.....	388
5.2 Entropiebilanz und zweiter Hauptsatz	389
5.2.1 Globale und lokale Entropiebilanz	389
5.2.2 Die GIBBSSche Gleichung.....	391
5.2.3 Eine Anwendung der GIBBSSchen Gleichung: Gummielastizität vs. HOOKESches Gesetz.....	393
5.3 Die Sätze von Castigliano, Betti und Maxwell.....	400
5.3.1 Potenzialcharakter von Formänderungsenergie, komplementärer Formänderungsenergie, freier Energie und freier Enthalpie	400
5.3.2 Die Formänderungsenergiegedichte linear-elastischer Körper	404
5.3.3 Komplementäre Formänderungsenergiegedichte linear-elastischer Körper.....	407
5.3.4 Formänderungsenergiegedichte für Balken.....	408
5.3.5 Formänderungsenergie in der Elastostatik	410
5.3.6 Die Sätze von MAXWELL und BETTI	411
5.3.7 Anwendung der Sätze von BETTI und MAXWELL auf statisch bestimmte und unbestimmte Systeme	415
5.3.8 Die Sätze von CASTIGLIANO für diskret belastete Systeme.....	418
5.3.9 Eine Anwendung der Sätze von CASTIGLIANO auf ein statisch bestimmtes System	420
5.4 Energiefunktionale und ihre Extrema	421
5.4.1 Eine erste Motivation zur Minimierung von Energieausdrücken.....	421
5.4.2 Hinführung zur Variationsrechnung.....	423
5.4.3 Die EULERSche Variationsgleichung	425
5.5 Das Prinzip der virtuellen Verschiebungen (PdvV)	429
5.5.1 Das PdvV in der elementaren technischen Mechanik	429
5.5.2 Das PdvV in der höheren technischen Mechanik.....	431
5.5.3 Das PdvV vom Standpunkt der Variationsrechnung.....	434
5.5.4 Das PdvV – Statik starrer Systeme.....	436
5.5.5 Beispiele zum PdvV in der Statik starrer Systeme	437
Berechnung von Kräften und Momenten	437
Berechnung von stabilen Lagen	440
Das Prinzip von TORRICELLI	441

Der GERBERträger	441
5.5.6 Das PdvV – Statik deformierbarer Systeme.....	442
5.5.7 Ein Beispiel zum PdvV in der Statik deformierbarer Systeme	443
5.5.8 PdvV – Allgemeine Belastungsfälle für HOOKEsche Balken.....	446
5.5.9 PdvV – Die Näherungsmethoden nach RITZ und GALERKIN	450
5.6 Das Prinzip der virtuellen Kräfte (PdvK)	454
5.6.1 Formulierung des PdvK im Rahmen der elementaren und höheren technischen Mechanik	454
5.6.2 Das PdvK vom Standpunkt der Variationsrechnung.....	457
5.6.3 Beispiele zum PdvK	459
Verschiebungen in einem statisch bestimmten System.....	459
Lagerreaktionen in einem statisch unbestimmten System	460
5.6.4 Eine rezeptmäßige Auswertung des PdvK: das 1-Kraft-Konzept.....	462
5.7 Dynamische Energieprinzipie.....	466
5.7.1 Das D’ALEMBERTSche Prinzip in LAGRANGEScher Fassung	466
5.7.2 Ableitung der Bewegungsgleichung des starren Körpers mit Hilfe des D’ALEMBERTSchen Prinzips in LAGRANGEScher Fassung	468
5.7.3 Ein Beispiel zum D’ALEMBERTSchen Prinzip in LAGRANGEScher Fassung.....	476
5.7.4 Das HAMILTONSche Prinzip und die LAGRANGEFunktion	478
5.7.5 Generalisierte Koordinaten	480
5.7.6 Die EULER-LAGRANGESchen-Bewegungsgleichungen	481
5.7.7 Beispiel I zu den EULER-LAGRANGESchen Bewegungsgleichungen: Geführte Punktmasse.....	483
5.7.8 Beispiel II zu den EULER-LAGRANGESchen Bewegungsgleichungen: Massenpunktsystem mit zwei generalisierten Koordinaten	484
5.7.9 Beispiel III zu den EULER-LAGRANGESchen Bewegungsgleichungen: Mehrere Punktmassen im Verbund	486
5.7.10 Beispiel IV zu den EULER-LAGRANGESchen Bewegungsgleichungen: Punktmassen und starrer Körper im Verbund	488
5.7.11 Beispiel V zu den EULER-LAGRANGESchen Bewegungsgleichungen: Konservative Starrkörperbewegung	489
5.7.12 Beispiel VI zu den EULER-LAGRANGESchen Bewegungsgleichungen: Ein nicht konservatives System.....	491
5.7.13 Die LAGRANGESchen Bewegungsgleichungen 1. Art	492
5.7.14 Beispiel I zu den LAGRANGESchen Bewegungsgleichungen 1. Art.....	494

5.7.15 Beispiel II zu den LAGRANGESchen Bewegungsgleichungen 1. Art.....	498
5.7.16 Klassifizierung kinematischer Bedingungen	499
5.7.17 Beispiele zu holonom rheonomen Nebenbedingungen.....	502
5.7.18 Die HAMILTONSchen Bewegungsgleichungen.....	504
5.7.19 Beispiel I zu den HAMILTONSchen Gleichungen: Wurf im Schwerefeld der Erde.....	508
5.7.20 Beispiel II zu den HAMILTONSchen Gleichungen: Der 1-D-Massenschwinger	510
Stichwort- und Namensregister	511

1 Statik

1.1 Grundbegriffe

1.1.1 Zum Kraftbegriff

Die Kraft ist eine sogenannte **primitive**, d. h. keiner weiteren Erklärung bedürftige Größe. Sie ist das Resultat geistiger Abstraktion, basierend auf unserer täglichen Erfahrung, wobei wir Kräfte nicht direkt beobachten können, sondern lediglich aus ihrer Wirkung auf ihre Existenz schließen. Man denke hierbei etwa an die Verformung einer Feder, an die Dehnung eines Stabes oder auch an die Muskelspannung, die wir fühlen, wenn wir Kräfte ausüben. Mit anderen Worten „Kraft“ ist der Name für die **Ursache** beobachteter **Wirkungen**.

Eine Kraft ist durch **drei** Eigenschaften bestimmt, durch ihren **Betrag**, ihre **Richtung** und ihren **Angriffspunkt**.

Der **Betrag** ist ein Maß für die Größe der wirkenden Kraft. Ein qualitatives Gefühl hierfür vermittelt die unterschiedliche Muskelspannung, die wir empfinden, wenn wir zum Beispiel verschiedene Körper heben. Wir bezeichnen den Betrag der Kraft mit dem Symbol F (von englisch *force*). Gemessen werden kann der Betrag F einer Kraft, indem man ihn mit der Schwerkraft, etwa mit geeichten Gewichten, vergleicht. Als Maßeinheit für den Betrag der Kraft verwendet man das **Newton** mit dem Kurzzeichen N. In der Technik benutzt man gern auch Vielfache der Einheit, wie beispielsweise das Kilonewton kN, was 1000 N entspricht.

Dass eine Kraft eine **Richtung** hat, ist auch intuitiv klar. Schließlich wirkt z. B. das Gewicht eines Körpers immer lotrecht nach unten, und es macht sicher einen Unterschied, mit welchem Winkel man bei betragsmäßig gleich bleibender Kraft auf einen Körper **drückt** oder an ihm **zieht** (siehe Abbildung 1.1.1).

Außerdem ist der **Angriffspunkt** der Kraft von Bedeutung, wie exemplarisch in Abbildung 1.1.1 zu sehen ist: Abhängig davon, wo sich der Angriffspunkt A der Kraft an der Kiste befindet, wird, trotz betragsmäßig gleich bleibender Kraft, eine unterschiedliche Wirkung auf die Kiste erzeugt.

Wir fassen diese intuitiv klaren Aussagen in folgendem Satz zusammen:

Die Kraft ist ein gebundener Vektor.

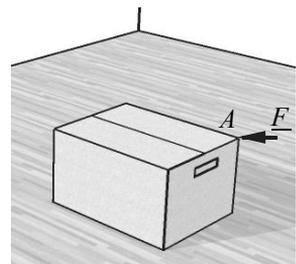
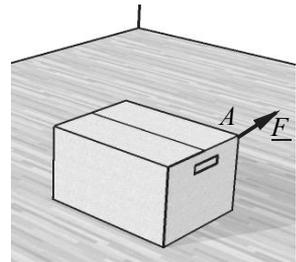
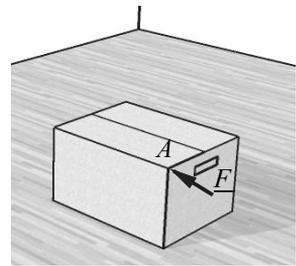
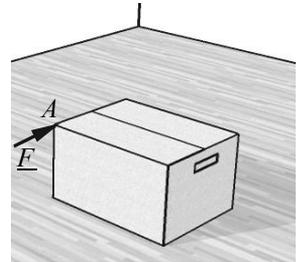
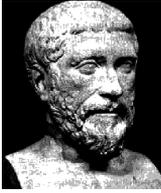


Abb. 1.1.1: Richtung und Angriffspunkt einer Kraft.



PYTHAGORAS VON SAMOS (580 – 500 v.u.Z.) war vornehmlich Philosoph und Mystiker mit einer starken Neigung zu Mathematik, Astronomie, Musik, Heilkunde, Ringkampf und der Politik. Durch Letzteres ereilt ihn im Jahre 532 vor Christus das Schicksal eines politischen Flüchtlings. Er verlässt Samos, um der dortigen Tyrannei zu entgehen, und zieht nach Süditalien. In Croton gründet er seine berühmte philosophische und religiöse Schule, und erschart Anhänger um sich, die sogenannten Pythagoreer. Der nach ihm benannte Satz war tausend Jahre zuvor bereits den Babyloniern bekannt gewesen und diente diesen praktischen Leuten zur Feldvermessung. PYTHAGORAS jedoch war vielleicht einer der Ersten, die sich auch für einen Beweis „seines“ Satzes interessierten. Über Details seiner eigenen wissenschaftlichen Arbeiten ist nicht allzu viel bekannt, denn die pythagoreische Schule gab sich erstens nach außen hin verschlossen und zweitens ist es bei Teams ja ohnehin nicht immer einfach, den konkreten Beitrag des Einzelnen auszumachen. Überhaupt glaubten die Pythagoreer zunächst einmal an die „Kraft der ganzen Zahl“ und hofften, Naturvorgänge durch harmonische Zahlenverhältnisse darstellen zu

Das Adjektiv **gebunden** bedarf einer näheren Erklärung: Einen **freien** Vektor kann man im Raum zu sich selbst beliebig parallel verschieben. Dieses ist bei einem Kraftvektor nicht erlaubt. Die Kraft ist an ihre **Wirkungslinie** gebunden und besitzt darüber hinaus einen klar zu spezifizierenden **Angriffspunkt**.

Entsprechend der in der Vektorrechnung üblichen Symbolik wollen wir für den Kraftvektor das Symbol \underline{F} verwenden. Der Betrag der Kraft ist durch das Symbol F (ohne Unterstrich) gekennzeichnet.

In Abbildung 1.1.2 ist ein Kraftvektor \underline{F} zu sehen, der in einem Punkt A eines Körpers im Raum angreift. Außerdem ist ein **rechtwinkliges kartesisches Koordinatensystem** eingezeichnet, das durch Einheitsvektoren \underline{e}_x , \underline{e}_y und \underline{e}_z aufgespannt wird. Die Indizes x , y und z kennzeichnen dabei die drei Raumrichtungen. Man sieht, dass der Kraftvektor gegen die drei Koordinatenachsen unter den Winkeln α , β und γ geneigt ist. Aus rechentechnischen Gründen ist es sehr oft günstig, den Kraftvektor hinsichtlich eines Koordinatensystems darzustellen, also aufzuspannen. Dazu projiziert man den Kraftvektor \underline{F} auf die drei aufeinander senkrecht stehenden Achsenrichtungen und erhält so die drei Vektoren \underline{F}_x , \underline{F}_y und \underline{F}_z . Hierfür kann man mit den zuvor erwähnten Einheitsvektoren \underline{e}_x , \underline{e}_y und \underline{e}_z schreiben:

$$\underline{F} = \underline{F}_x + \underline{F}_y + \underline{F}_z = F_x \underline{e}_x + F_y \underline{e}_y + F_z \underline{e}_z = (F_x, F_y, F_z). \quad (1.1.1)$$

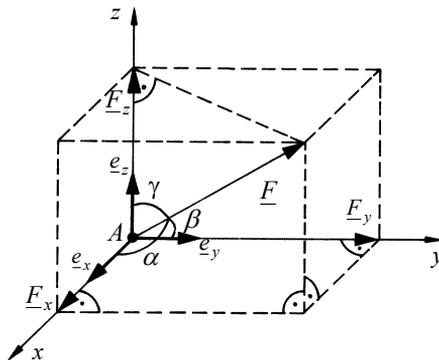


Abb. 1.1.2: Kraftvektor, im Raum aufgespannt im kartesischen Dreibein.

Dabei befolgen wir eine **Grundregel der Vektoraddition**, wonach gilt, dass Vektoren (hier \underline{F}_x , \underline{F}_y und \underline{F}_z) dadurch addiert werden, dass man bei der Addition das Ende des Vektors an den Kopf desjenigen Vektors hängt, zu dem er addiert werden soll. Man nennt die Größen F_x , F_y und F_z auch die **kartesischen Komponenten** des Vektors \underline{F} . Es ist üblich, sie in einer Zeile (F_x, F_y, F_z) (manchmal auch als Spalte geschrieben) zusammenzufassen. Merke, dass es sich dabei lediglich um alternative Schreibweisen ein- und desselben Objekts \underline{F} handelt. Man beachte, dass die Reihenfolge, in der das Aneinanderketten der Teilvektoren \underline{F}_x , \underline{F}_y und \underline{F}_z erfolgt, beliebig ist und immer zum gleichen Endresultat führt. Dies entspricht dem **Kommutativ-**(=Vertauschbarkeits-) **Gesetz** der Vektoraddition.

Nach dem **Satz des PYTHAGORAS** im Raum lässt sich der Betrag F des Vektors \underline{F} wie folgt durch die kartesischen Komponenten ausdrücken:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}. \quad (1.1.2)$$

Schließlich kann man die Richtungswinkel α , β und γ mit den Komponenten und dem Betrag des Kraftvektors \underline{F} in Verbindung bringen:

$$\cos(\alpha) = \frac{F_x}{F}, \quad \cos(\beta) = \frac{F_y}{F}, \quad \cos(\gamma) = \frac{F_z}{F}. \quad (1.1.3)$$

Beide Gleichungen lassen sich mithilfe der Abbildung 1.1.2 beweisen.

1.1.2 Einteilung der Kräfte, das Schnitt- und das Wechselwirkungsprinzip

In der Mechanik ist es üblich, Kräfte nach verschiedenen Gesichtspunkten einzuteilen. Entsprechend haben sich diverse Begriffe eingebürgert, die man kennen sollte, um die einschlägige Literatur zu verstehen, und die im Folgenden erläutert werden (vgl. auch Abbildung 1.1.3).

Die **Einzellast**: Hierunter versteht man das idealisierte Konzept einer punktförmig angreifenden Kraft. Man könnte sie dadurch näherungsweise erzeugen, dass man den Körper mit einer Nadelspitze oder über einen dünnen Draht belastet.

Die **Linienkraft** oder **Streckenlast**: Hierbei handelt es sich um Kräfte, die entlang einer Linie kontinuierlich verteilt sind. Näherungsweise erzeugen lassen sie sich dadurch, dass man etwa mit

können, gleichgültig ob es sich dabei um astronomische oder musikalische Probleme handelte. Leider entdeckten sie bei ihren Forschungen, dass die Diagonale eines Quadrates nicht als rationales Vielfaches darstellbar ist, d. h., sie wurden plötzlich mit dem Phänomen der irrationalen Zahl konfrontiert. Dies gab bei ihnen und anderen griechischen Mathematikern zu größerer Unruhe Anlass, wie es bei Menschen, die mit Neuem konfrontiert werden, auch heute noch durchaus geschieht. Bemerkenswert scheint, dass die Ideen oder besser gesagt die Wunschvorstellungen der Pythagoreer bis zum Beginn der modernen Naturwissenschaften ihre Kraft behielten. So versuchte noch KEPLER in seinem Werk „Harmonices Mundi“ der Natur zunächst menschliche Harmonievorstellungen zu oktroyieren, verschrieb sich aber schließlich dann doch einer mehr rational geprägten Weltanschauung, wie seine Auswertung experimenteller Daten Tycho DE BRAHES bezeugt, was ihn schließlich auf die Bewegungsgesetze der Planeten brachte.

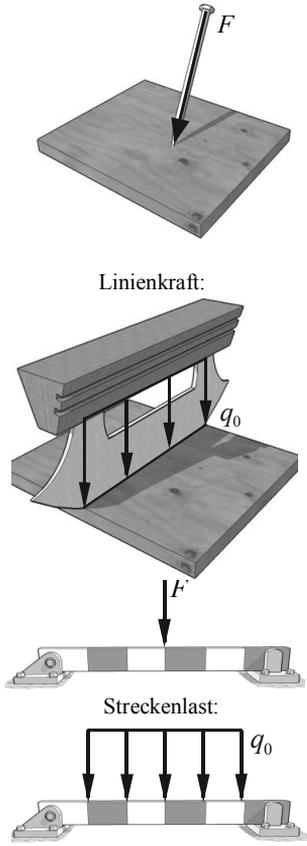


Abb. 1.1.3: Zum Begriff der Einzellast oder Linienkraft.

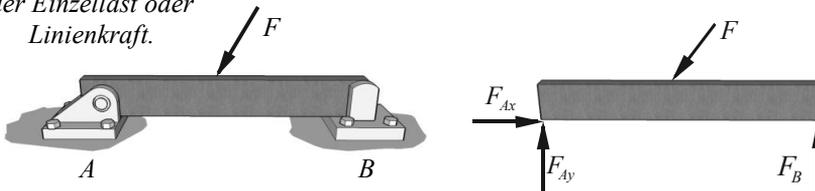


Abb. 1.1.4: Zum Begriff des Freischnitts.

einer dünnen Schneide oder einem Draht gegen einen Körper drückt.

Die **Volumenkraft**: Hierunter versteht man Kräfte, die über das Volumen eines Körpers angreifen, wie zum Beispiel das Gewicht oder elektromagnetische Kräfte.

Die **Oberflächenkraft**: Diese tritt in der Berührungsfläche zweier Körper auf. Beispiele sind der Wasserdruck auf eine Staumauer oder der Druck einer Panzerkette auf den Boden.

Eingeprägte Kräfte: Diese greifen in **vorgegebener** Weise an einem physikalischen System an, wie etwa das Gewicht oder der Druck einer Nadel auf die Oberfläche eines Körpers bzw. eine Schneelast auf einem Dach usw.

Reaktions- oder Zwangskräfte: Diese entstehen, wenn man einem durch eingeprägte Kräfte beeinflussten System seine Bewegungsfreiheit nimmt. Man denke an einen fallenden Stein, auf den nur sein eigenes Gewicht wirkt. Hält man den Stein in der Hand, so ist seine Bewegungsfreiheit eingeschränkt, indem man durch die Hand eine dem Gewicht entgegengesetzte Reaktions- bzw. Zwangskraft ausübt.

Reaktionskräfte lassen sich dadurch sichtbar machen, dass man den Körper von seinen geometrischen Bindungen löst, ihn sozusagen **freimacht** bzw. **freischneidet**. Diese in der Mechanik überaus wichtige Technik des Freischnitts soll im Folgenden an einem Beispiel erläutert werden.

Betrachte den in Abbildung 1.1.4 dargestellten Balken, der durch eine eingeprägte Kraft F belastet ist und auf zwei Stützen, den sogenannten Auflagern, ruht. Diese sind offensichtlich Bindungen, die den Balken an der Bewegung hindern, und wir befreien uns von ihnen, indem wir an ihrer Stelle zwei Reaktions- bzw. **Freischnittskräfte**, genannt $\underline{F}_A = (F_{Ax}, F_{Ay})$ und $\underline{F}_B = (0, F_B)$, anbringen. Dieses führt auf das **Freikörperbild** oder auch kurz den **Freischnitt**, der rechts in Abbildung 1.1.4 zu sehen ist.

Äußere und **innere** Kräfte: Wie der Name sagt, wirkt eine äußere Kraft von außen auf ein mechanisches System. Sowohl ein-

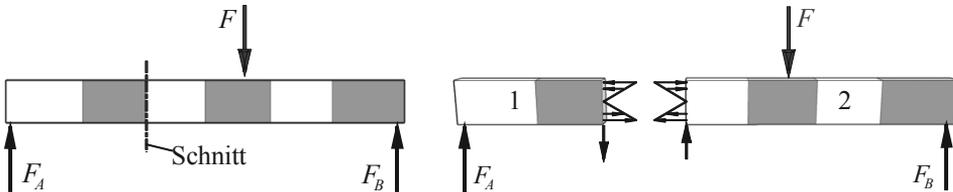


Abb. 1.1.5: Zum Begriff der inneren Kraft und des Schnittprinzips.

geprägte als auch Reaktionskräfte sind Beispiele äußerer Kräfte. Innere Kräfte erhält man durch gedankliches Zerteilen bzw. Schneiden des Körpers. Dieses ist in Abbildung 1.1.5 erläutert: Führt man durch den belasteten Körper einen Schnitt, so ist es, um das Gleichgewicht zu wahren, nötig, an Stelle der inneren Bindung durch das Material geeignete, flächenförmig verteilte, eben innere Schnittkräfte aufzuprägen.

Man beachte, dass die Einteilung in innere und äußere Kräfte davon abhängt, welches System untersucht wird. Fassen wir etwa den Gesamtkörper in Abbildung 1.1.5 als ein System auf, so sind die durch den Schnitt freigelegten Kräfte innere Kräfte. Betrachten wir dagegen die gezeichneten Teilkörper 1 oder 2 jeweils als ein System, so sind alle dargestellten Kräfte äußere Kräfte.



Abb. 1.1.6: Zum Wechselwirkungsgesetz, *actio = reactio-Prinzip*.

Im Zusammenhang mit dem Freischnitt von Kräften bzw. mit dem Schnittprinzip ist das sogenannte **Wechselwirkungsgesetz**, auch **actio = reactio-Prinzip**, von entscheidender Bedeutung. Es besagt, dass zu jeder Kraft immer eine gleich große, aber entgegengesetzte **Gegen-** bzw. **Reaktionskraft** gehört. Dieses aus der Erfahrung begründete Prinzip ist in Abbildung 1.1.6 il-

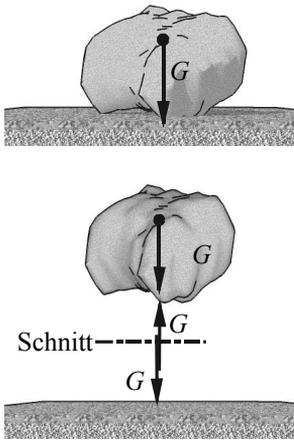


Abb. 1.1.7: Zum Wechselwirkungsgesetz, *actio = reactio*-Prinzip.

lustriert: Der gezeigte Drucklufthammer übt auf eine Wand eine Kraft F aus. Eine gleich große, aber entgegengesetzte Kraft wird aber auch von der Wand auf den Hammer ausgeübt. Beide Kräfte kann man dadurch sichtbar machen, dass man, wie gezeigt, an der Kontaktstelle freischneidet. Ein anderes Beispiel für das *actio=reactio*-Prinzip ist in Abbildung 1.1.7 gezeigt: Aufgrund der Gravitation hat ein Körper auf der Erde ein Gewicht G . Dieses ist die Anziehungskraft, welche die Erde auf ihn ausübt. Umgekehrt wirkt auch der Körper mit einer gleich großen, aber entgegengerichteten Kraft auf die Erde, beide Körper ziehen einander an.

actio = reactio: Die Kräfte, die zwei Körper aufeinander ausüben, sind gleich groß, entgegengesetzt gerichtet und liegen auf der gleichen Wirkungslinie.

Wir fassen zusammen: Im Folgenden stellen wir uns die Aufgabe, Reaktions- und Schnittkräfte für mechanische Systeme zu berechnen, um danach die ihnen unterworfenen Körper entsprechend ihrer Materialfestigkeit korrekt dimensionieren zu können.

1.2 Kräfte in einem Angriffspunkt

1.2.1 Zusammensetzen von Kräften

Betrachte Abbildung 1.2.1. Zwei Kraftvektoren, genannt \underline{F}_1 und \underline{F}_2 , greifen in einem Punkt A eines Körpers an. Die Erfahrung zeigt, dass diese Kräfte durch einen einzigen Kraftvektor \underline{R} , die sogenannte **Resultierende**, ersetzt werden können. Dieselbe ermittelt man dadurch, dass man, wie in Abbildung 1.2.1 zu sehen, die Kräfte zu einem Parallelogramm ergänzt. Die Diagonale des Parallelogramms ist dann die erwähnte Ersatzkraft \underline{R} . Alternativ zur **Parallelogrammkonstruktion** ist die Vektoraddition der Kräfte \underline{F}_1 und \underline{F}_2 zu sehen. Diese ist rechts in Abbildung 1.2.1 dargestellt. Wie zuvor erwähnt, gilt die Grundregel, Vektoren bei der Addition aneinanderzuketten, indem man den Fuß des einen Vektors an den Kopf des anderen hängt. Dabei ist es gleichgültig, welche Reihenfolge man wählt. Auch das ist aus Abbildung 1.2.1 ersichtlich.

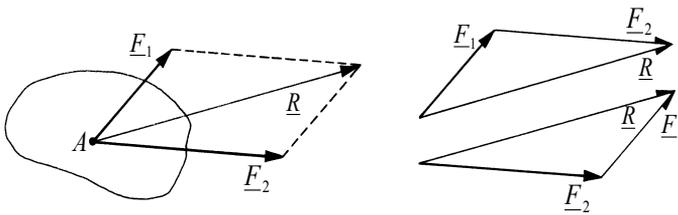


Abb. 1.2.1: Zum Begriff der resultierenden Kraft.

Wir verallgemeinern unser Ergebnis auf die Vektorsumme von n Stück Kraftvektoren, die alle in einem gemeinsamen Punkt angreifen: Abbildung 1.2.2. Ihre Resultierende erhält man durch Vektoraddition gemäß der Gleichung:

$$\underline{R} = \underline{F}_1 + \underline{F}_2 + \dots + \underline{F}_n = \sum_{i=1}^n \underline{F}_i \quad (1.2.1)$$

Wieder gilt die Grundregel, dass die Addition dadurch vorzunehmen ist, dass man die Vektoren \underline{F}_i in beliebiger Reihenfolge, Pfeilende auf Pfeilspitze folgend, aneinanderkettet.

Nun langt es im Allgemeinen nicht, diese Regel zu kennen, ohne sie zahlenmäßig auszuwerten. Man will eben exakt wissen, wie lang die Resultierende ist und in welchem Winkel sie am Punkt A angreift. Um dieses herauszubekommen, können verschiedene Verfahren angewendet werden, die **rechnerischer** oder **zeichnerischer** Natur sind.

a) Zeichnerische Lösung

Wir wollen diese Verfahren anhand von zwei Beispielen näher kennenlernen. Betrachte dazu zunächst Abbildung 1.2.3:

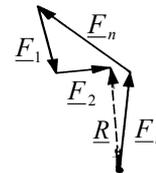
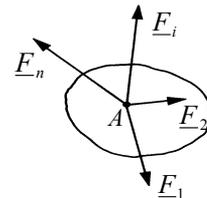


Abb. 1.2.2: Zur Kräfte-Summe.

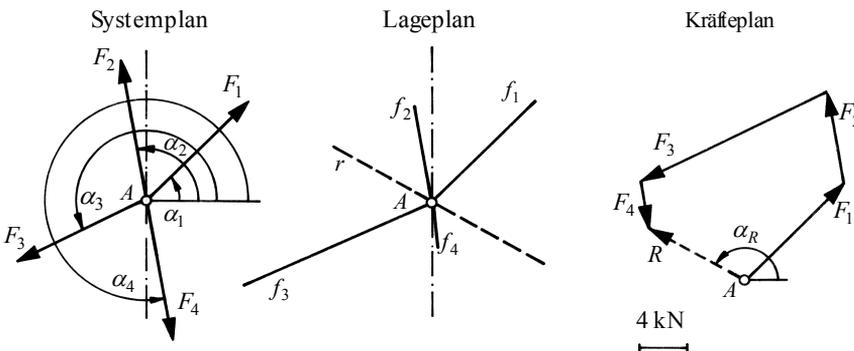


Abb. 1.2.3: Zum Begriff des Kräfte- und Lageplans.

An einem Punkt A eines Körpers (etwa der Spitze einer Fahnenstange) wirken vier Kräfte $F_1 = 12 \text{ kN}$, $F_2 = 8 \text{ kN}$,



Isaac NEWTON (1642 – 1727) war unzweifelhaft eines der größten naturwissenschaftlichen Genies. Um seine Entdeckungen zu würdigen, ist kein Superlativ zu gewagt, und sein soeben zitiertes Prinzip *actio = reactio* ist in der Tat nur *ein* Stein in dem unendlich großen Ozean der Wahrheit, der vor ihm lag und den er entdeckte, um seine eigenen Worte zu paraphrasieren. Auch seine menschlichen Qualitäten genügen Superlativen, allerdings wohl eher im negativen Sinne. Dem Internet entnehmen wir: „NEWTON was rigorously puritanical: When one of his few friends told him “a loose story about a nun,” he ended their friendship. He is not known to have ever had a romantic relationship of any kind, and is believed to have died a virgin. Furthermore, he had no interest in literature or the arts, dismissing a famous collection of sculpture as “stone dolls.” In short, NEWTON was a mathematical mystic, convinced that he shared a privileged relationship with God, and obsessively devoted to finding how He had constructed the universe. He thought of himself as the sole inventor of the calculus, and hence the

$F_3 = 18 \text{ kN}$ und $F_4 = 4 \text{ kN}$ unter vorgegebenen Richtungen zur Horizontalen, gekennzeichnet durch die vier Winkel $\alpha_1 = 45^\circ$, $\alpha_2 = 100^\circ$, $\alpha_3 = 205^\circ$ und $\alpha_4 = 280^\circ$. Wir wollen die Größe und die Richtung der Resultierenden zeichnerisch bestimmen. Dazu zeichnen wir uns zunächst, wie in der Abbildung dargestellt, den sogenannten **Lageplan**, in dem die Wirkungslinien f_i , $i = 1, \dots, 4$ der vier Kräfte eingetragen werden. Diese sind für die Auswertung im sogenannten **Kräfteplan** wichtig (siehe unten in Abbildung 1.2.3). Für den Kräfteplan wählen wir zunächst einen Maßstab und fügen dann alle Kräfte unter Berücksichtigung der Additionsregel maßstäblich aneinander. Dabei übertragen wir mit dem Geodreieck die jeweiligen Krafrichtungen durch Parallelverschiebung aus dem Lageplan. Wir lesen dann im Rahmen der Zeichengenauigkeit als Ergebnis für den Betrag und die Richtung der Resultierenden ab:

$$R = 10,0 \text{ kN}, \quad \alpha_R = 147^\circ. \quad (1.2.2)$$

b) Rechnerische Lösung mit Winkelfunktionen

Betrachte nun die Situation in Abbildung 1.2.4.

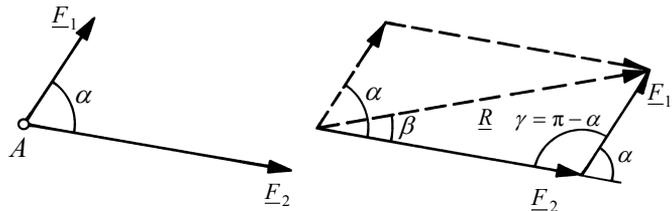


Abb. 1.2.4: Resultierende zweier Kräfte.

An einem Körper greifen in einem Punkt A zwei Kräfte \underline{F}_1 und \underline{F}_2 an. Der Winkel zwischen ihren Wirkungslinien sei α . Wir addieren beide Kräfte gemäß der Grundregel der Vektoraddition, konstruieren also eine Hälfte des Kräfteparallelogramms, so wie in der Abbildung rechts gezeigt. Bekannt sind die Seitenlängen F_1 und F_2 sowie der Winkel α . Damit können wir den **Kosinussatz** verwenden, um die Länge der Resultierenden \underline{R} zu berechnen:

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2 \cos(180^\circ - \alpha)} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos(\alpha)}. \quad (1.2.3)$$

Um den Winkel β zu bestimmen, der die Richtung der Wirkungslinie von \underline{R} bestimmt, verwenden wir vorzugsweise den **Sinussatz**:

$$\frac{\sin(\beta)}{\sin(180^\circ - \alpha)} = \frac{F_1}{R}. \quad (1.2.4)$$

Indem wir hierin die Gleichung (1.2.3) für R einsetzen und außerdem beachten, dass gilt:

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin(\alpha), \quad (1.2.5)$$

folgt für den Winkel β :

$$\beta = \sin^{-1} \left(\frac{F_1 \sin(\alpha)}{\sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1 F_2 \cos(\alpha)}} \right). \quad (1.2.6)$$

1.2.2 Zerlegen von Kräften in der Ebene: Komponentendarstellung

Im letzten Beispiel haben wir gesehen, wie man mithilfe des Sinus- bzw. des Kosinussatzes die Richtung und den Betrag der Resultierenden zweier Kräfte bzw. durch konsequente Fortsetzung auch mehrerer Kräfte berechnen kann. Eine äußerst wirkungsvolle Alternative zu diesem Berechnungsschema ist die Berechnung mithilfe von **Kraftkomponenten in rechtwinklig-kartesischen Koordinaten**. Wir wollen diese Alternative zunächst für den Fall von Kraftsystemen kennenlernen, die in der Ebene angreifen, und werden die resultierenden Gleichungen danach auf den Fall dreier Dimensionen verallgemeinern.

Betrachte den in Abbildung 1.2.5 gezeigten Kraftvektor \underline{F} und seine Zerlegung in Komponenten F_x und F_y durch Projektion auf die x - bzw. y -Achse eines rechtwinklig-kartesischen Koordinatensystems. Analog zum Abschnitt 1.1 lässt sich schreiben:

$$\underline{F} = \underline{F}_x + \underline{F}_y = F_x \underline{e}_x + F_y \underline{e}_y. \quad (1.2.7)$$

Die nachstehenden Gleichungen folgen aus einfachen trigonometrischen Überlegungen:

$$F_x = F \cos(\alpha), \quad F_y = F \sin(\alpha), \quad F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}, \quad (1.2.8)$$

$$\tan(\alpha) = \frac{F_y}{F_x}.$$

greatest mathematician since the ancients, and left behind a huge corpus of unpublished work, mostly alchemy and biblical exegesis, that he believed future generations would appreciate more than his own.“ Besonders berüchtigt ist sein Prioritätsstreit mit LEIBNIZ, die Entdeckung der Differenzial- und Integralrechnung betreffend, worauf auch das Zitat anspielt. So wurde LEIBNIZ von der Royal Society aufgefordert, seine Ansprüche vorzutragen und zu begründen, aber NEWTON (als wichtigstes Mitglied und Präsident) sorgte dafür, dass die Karten „richtig“ gemischt wurden, indem er das Untersuchungskomitee mit seinen Anhängern besetzte und zur Sicherheit den Endbericht selber schrieb. Angeblich sei es sein schönster Tag gewesen zu sehen, wie LEIBNIZ seelisch zerbrach, was zeigt, dass man auch ohne „romantic relationships“ seinen Spaß haben kann. In diesem Sinne stand er auch dem Geld nicht feindlich gegenüber, denn er wurde in seinen späteren Jahren Warden and Master of the Mint, eine recht lukrative Stellung neben seiner Position als Cambridge Professor. Von jeder geprägten Münze erhielt er nämlich seinen Anteil, was sich in einem Jahr zu 1000 Pfund akkumulierte. NEWTON starb als reicher, allerdings dem Bericht nach geiziger Mann. Abschließend sei bemerkt, dass NEWTONS Charakter auch für den Psychoanalytiker von Interesse sein könnte, denn wir

lesen im Internet: „Frank E. MANUEL, in his bold portrait of Isaac NEWTON (1963), suggests that NEWTONS ferocity in his arguments with HOOKE, FLAMSTEED, and LEIBNIZ, is the result of the deprivation of his mother when she married Barnabas SMITH and moved away from him for seven years. Having lost his mother for a time, MANUEL speculates that NEWTON ever afterward fought hard to keep what he thought was his, especially all the fruits of his genius. WESTFALL argues more cautiously that no empirical evidence can confirm or disprove such an “analysis.” (Never at Rest, p. 53.)“.

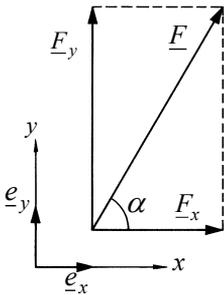


Abb. 1.2.5: Zerlegung einer Kraft in ihre rechtwinklig-kartesischen Komponenten.

Ist die Resultierende \underline{R} einer Gruppe von Kräften zu ermitteln, so bedient man sich praktischerweise an Stelle der Vektoraddition aus dem letzten Abschnitt der Addition der Kraftkomponenten.

Wir machen uns dies am Beispiel von zwei Kräften in der durch sie gebildeten Ebene klar. Betrachte dazu Abbildung 1.2.6 und wende Gleichung (1.2.7) auf die Resultierende sowie auf jede der beiden Kräfte an:

$$\underline{R} = R_x \underline{e}_x + R_y \underline{e}_y = \underline{F}_1 + \underline{F}_2 = F_{1x} \underline{e}_x + F_{1y} \underline{e}_y + F_{2x} \underline{e}_x + F_{2y} \underline{e}_y. \quad (1.2.9)$$

Dabei wurden die Komponenten der Kräfte \underline{F}_1 und \underline{F}_2 zusätzlich zu den Indizes x und y mit den Indizes 1 und 2 versehen, um anzudeuten, von welcher Kraft sie herrühren. Einfaches Umstellen in der letzten Beziehung bringt:

$$R_x \underline{e}_x + R_y \underline{e}_y = (F_{1x} + F_{2x}) \underline{e}_x + (F_{1y} + F_{2y}) \underline{e}_y. \quad (1.2.10)$$

Durch Koeffizientenvergleich finden wir:

$$R_x = F_{1x} + F_{2x} = \sum_{i=1}^2 F_{ix}, \quad R_y = F_{1y} + F_{2y} = \sum_{i=1}^2 F_{iy}. \quad (1.2.11)$$

In Worten: Um die Komponenten der Resultierenden zu erhalten, hat man die jeweiligen Komponenten der beteiligten Kraftvektoren zu summieren. Im Übrigen notieren wir für den Betrag und die Richtung der Resultierenden gemäß der Gleichung (1.2.8):

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^2 F_{ix}\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^2 F_{iy}\right)^2}, \quad (1.2.12)$$

$$\tan(\alpha) = \frac{R_y}{R_x} = \frac{\sum_{i=1}^2 F_{iy}}{\sum_{i=1}^2 F_{ix}}.$$

Für n Stück Kräfte, die an einem gemeinsamen Punkt angreifen, lässt sich die Resultierende durch Verallgemeinerung der obigen Formeln wie folgt bestimmen. Man lässt den Index i einfach von 1 bis n laufen:

$$R_x = \sum_{i=1}^n F_{ix}, \quad R_y = \sum_{i=1}^n F_{iy}, \quad (1.2.13)$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n F_{ix}\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n F_{iy}\right)^2},$$

$$\tan(\alpha) = \frac{R_y}{R_x} = \frac{\sum_{i=1}^n F_{iy}}{\sum_{i=1}^n F_{ix}}. \tag{1.2.14}$$

Auf Kräfte, die **im Raum** an einem gemeinsamen Punkt angreifen, lassen sich diese Gleichungen wie folgt verallgemeinern. Man muss in Bezug auf die dritte Raumrichtung, also die *z*-Komponente, ergänzen und erhält:

$$R_x = \sum_{i=1}^n F_{ix}, \quad R_y = \sum_{i=1}^n F_{iy}, \quad R_z = \sum_{i=1}^n F_{iz}, \tag{1.2.15}$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n F_{ix}\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n F_{iy}\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n F_{iz}\right)^2}. \tag{1.2.16}$$

Als Beispiel betrachten wir erneut das in Abbildung 1.2.3 gezeigte ebene Kräftesystem. Mit den zuvor eingeführten Bezeichnungen lässt sich die Gleichung (1.2.13) wie folgt auswerten:

$$R_x = \sum_{i=1}^4 F_{ix} = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + F_{4x} = F_1 \cos(\alpha_1) + F_2 \cos(\alpha_2) + F_3 \cos(\alpha_3) + F_4 \cos(\alpha_4) = 12 \text{ kN} \cos(45^\circ) + 8 \text{ kN} \cos(100^\circ) + 18 \text{ kN} \cos(205^\circ) + 4 \text{ kN} \cos(270^\circ) = -9,22 \text{ kN},$$

$$R_y = \sum_{i=1}^4 F_{iy} = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + F_{4y} = F_1 \sin(\alpha_1) + F_2 \sin(\alpha_2) + F_3 \sin(\alpha_3) + F_4 \sin(\alpha_4) = 12 \text{ kN} \sin(45^\circ) + 8 \text{ kN} \sin(100^\circ) + 18 \text{ kN} \sin(205^\circ) + 4 \text{ kN} \sin(270^\circ) = 4,76 \text{ kN}.$$

Mit Gleichung (1.2.14) berechnen wir nun den Betrag und die Richtung der Resultierenden:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{9,22^2 + 4,76^2} \text{ kN} = 10,4 \text{ kN},$$

$$\tan(\alpha_R) = \frac{R_y}{R_x} = -\frac{4,76}{9,22} = -0,52 \Rightarrow \alpha_R = 152,5^\circ, \tag{1.2.19}$$

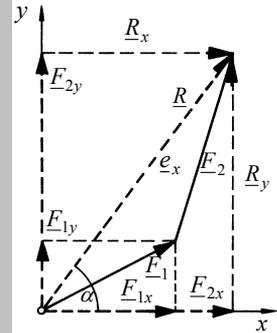
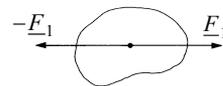


Abb. 1.2.6: Zur komponentenmäßigen Addition von Kräften.

Gleichgewicht



kein Gleichgewicht

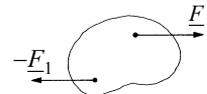


Abb. 1.2.7: Zum Begriff des Gleichgewichts.



Die bei Studenten unbeliebte Technik des Freischnitts von Kräften ist dem Gelehrten **Leonard EULER** (1707 – 1783) zu verdanken. Überhaupt trug EULER unendlich viel zu den Konzepten der Analysis und der klassischen Mechanik bei. Sein Vater wollte ihn eigentlich in klerikalen Diensten sehen, die rationalen Wissenschaften schienen EULER jedoch mehr zu interessieren. So geht er zwar als Student nach Basel, wechselt aber von Theologie alsbald zu Mathematik, um bei seinem (ebenfalls berühmten) Lehrmeister Johann BERNOULLI Mathematik zu studieren. Es dauert jedoch nicht lange, und er überflügelt seinen Lehrer. 1727 geht er nach St. Petersburg, um an der von der berühmten KATHARINA der Großen neu gegründeten Akademie der Wissenschaften als Professor für Physik zu wirken. In Russland dient er auch als Schiffsarzt bei der Marine. 1733 entschließt er sich zur Heirat. Er wird dreizehnmal Vater, aber nur fünf seiner Kinder überleben bis zum Erwachsenenalter. 1741 wechselt er auf Einladung FRIEDRICHS des Großen zur

und das stimmt mit dem zuvor zeichnerisch gefundenen Ergebnis gut überein.

Allerdings muss man der Vollständigkeit halber hinzufügen, dass aufgrund der Doppeldeutigkeit des Tangens in Gleichung (1.2.19) zwar die Winkelstellung der Kraft, nicht jedoch ihre Pfeilrichtung identifiziert werden kann.

1.2.3 Gleichgewicht von Kräften in einem Angriffspunkt

Wir stellen uns als Nächstes die Frage, unter welchen Umständen ein Körper im **Gleichgewicht** ist.

Aus der Erfahrung wissen wir, dass ein ursprünglich ruhender Körper in Ruhe bleibt, wenn wir an ihm zwei entgegengesetzt gleich große Kräfte anbringen: Abbildung 1.2.7.

Wir sagen, dass zwei Kräfte im Gleichgewicht miteinander sind, wenn sie auf derselben Wirkungslinie liegen und entgegengesetzt gleich groß sind.

Mathematisch gesprochen bedeutet dies, dass die Vektorsumme der beiden Kräfte, also die Resultierende, null sein muss:

$$\underline{R} = \underline{F}_1 + \underline{F}_2 = \underline{0}. \quad (1.2.20)$$

Aus den vorangegangenen Abschnitten ist bekannt, dass ein **zentrales Kräftesystem** (das ist ein System von Kräften, die einen gemeinsamen Angriffspunkt haben), sich eindeutig zu einer Resultierenden \underline{R} zusammensetzen lässt: Gleichung (1.2.1). Damit lässt sich die Gleichgewichtsbedingung (1.2.20) sofort auf beliebig viele Kräfte übertragen. Wir sagen insbesondere, dass eine zentrale Kräftegruppe im Gleichgewicht ist, wenn ihre Vektorsumme, also die Resultierende \underline{R} , verschwindet:

$$\underline{R} = \sum_{i=1}^n \underline{F}_i = \underline{0}. \quad (1.2.21)$$

Um diese Gleichung geometrisch, d. h. zeichnerisch, zu interpretieren, sei an die Grundregel der Kräftevektoraddition erinnert: Damit eine Kräftegruppe im Gleichgewicht steht, muss das durch Vektoraddition entstehende Kräfteck **geschlossen** sein. Ein Beispiel für ein solches Kräfteck, also eine Gleichgewichtsgruppe von Kräften, ist in Abbildung 1.2.8 zu sehen.

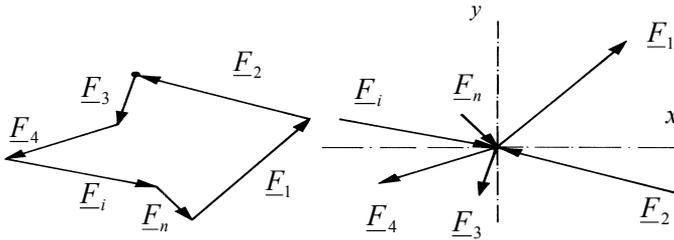


Abb.1.2.8: Ein geschlossenes Kräfteck.

Alternativ zur Vektorform (1.2.21) lässt sich die Gleichgewichtsbedingung auch komponentenweise schreiben. Man erhält bei n Stück Kräften in der Ebene durch Kombination von Gleichung (1.2.13) und Gleichung (1.2.20):

$$R_x = \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0, \quad R_y = \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0 \quad (1.2.22)$$

und bei n Stück Kräften im Raum:

$$R_x = \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0, \quad R_y = \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0, \quad R_z = \sum_{i=1}^n F_{iz} = 0. \quad (1.2.23)$$

Im Folgenden werden wir hauptsächlich **ebene** Probleme lösen. Hierfür notieren wir die folgende schreibökonomische Kurzform der Gleichungen (1.2.22):

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0. \quad (1.2.24)$$

Wir sagen:

Um Gleichgewicht in der Ebene zu erzielen, ist es notwendig, dass die Summen der Komponenten aller beteiligten Kräfte in x - und y -Richtung verschwinden.

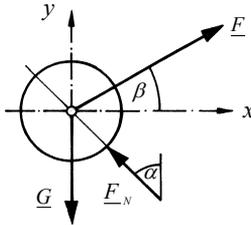
Man beachte: Aus den beiden Gleichgewichtsbedingungen (1.2.24) lassen sich höchstens zwei Unbekannte, z. B. zwei Unbekannte in einer ebenen zentralen Kräftegruppe, ermitteln. In einem solchen Fall sprechen wir von einer **statisch bestimmten** ebenen zentralen Kräftegruppe, und diese ist ein Spezialfall eines **statisch bestimmten** mechanischen Systems. Treten bei einer ebenen zentralen Kräftegruppe mehr als zwei Unbekannte auf, so ist das Problem **statisch unbestimmt** und kann mit den genannten Gleichgewichtsbedingungen allein nicht gelöst werden.

Einige Beispiele sollen die Gleichgewichtsbedingungen zentraler Kräftegruppen einüben.

Berliner Akademie, wo er die nächsten 25 Jahre bleibt. Sein Verhältnis zu FRIEDRICH verschlechtert sich im Laufe der Zeit jedoch, und so kehrt er 1766 nach St. Petersburg zurück. Bemerkenswert ist, dass EULER Zeit seines Lebens trotz seiner starken Sehbehinderung (er verlor sein rechtes Augenlicht im Alter von 31 Jahren und erblindete kurz nach seiner Rückkehr nach St. Petersburg aufgrund einer nicht gelungenen Augenoperation wegen grauen Stars vollständig) wissenschaftlich enorm kreativ und produktiv blieb. In der Tat war die Petersburger Akademie noch fünfzig Jahre nach seinem Tod damit beschäftigt, bisher Unveröffentlichtes seiner Werke herauszubringen, so dass seine „Opera Omnia“ schließlich 866 Bücher und Schriften umfassten.

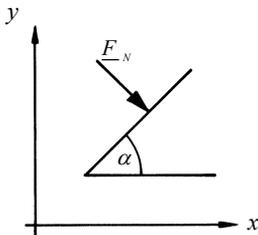
1.2.4 Zentrale Kräftegruppe im Gleichgewicht: Haltekraft auf schiefer Ebene

Lösung im kartesischen Koordinatensystem



Betrachte die in Abbildung 1.2.9 dargestellte Situation: Eine Walze vom Gewicht $G = 2 \text{ kN}$ wird unter dem Winkel $\beta = 30^\circ$ auf einer schiefen Ebene mit dem Neigungswinkel $\alpha = 45^\circ$ gehalten. Wir wollen annehmen, dass an der Kontaktstelle zwischen der Walze und der schiefen Ebene keine Reibung auftritt. Gesucht ist der Betrag der Haltekraft F .

System I (freigeschnittene Walze)



System II (Ebene mit Normalkraft)

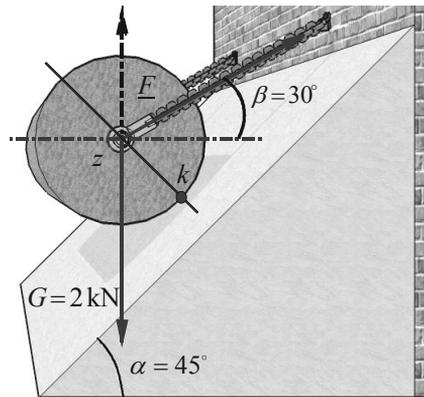
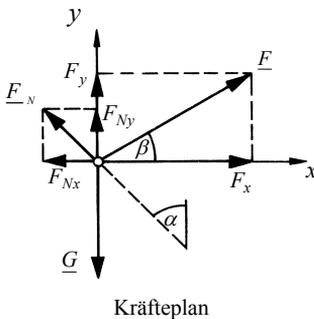


Abb. 1.2.9: Haltekraft auf schiefer Ebene.

Um ihn zu finden, wird das System, wie links in der Abbildung (System I) gezeigt, freigeschnitten. Dazu ist es nötig, eine ebenfalls unbekannte Normalkraft F_N einzuführen, die die schiefe Ebene hinsichtlich ihrer tragenden Wirkung ersetzt. Diese neue Unbekannte steht senkrecht auf der schiefen Ebene. Wir beachten das in der Abbildung eingezeichnete Koordinatensystem und notieren als Gleichgewichtsbedingungen aller in der freigeschnittenen Scheibe I auftretenden Kräfte:

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 &\Rightarrow F \cos(\beta) - F_N \sin(\alpha) = 0, \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow -G + F \sin(\beta) + F_N \cos(\alpha) = 0. \end{aligned} \quad (1.2.25)$$

Die Vorzeichen der einzelnen in den Gleichungen auftretenden Größen richten sich nach dem gewählten Koordinatensystem: In Achsenrichtung weisende Komponenten werden positiv, entgegen der Achsenrichtung weisende Komponenten werden negativ gezählt. Das Gleichungssystem (1.2.25) erlaubt es, die beiden Unbekannten F und F_N zu ermitteln. Durch Auflösen entsteht:

$$F = \frac{G \sin(\alpha)}{\sin(\beta)\sin(\alpha) + \cos(\beta)\cos(\alpha)} = 1,46 \text{ kN}, \quad (1.2.26)$$

$$F_N = \frac{G \cos(\beta)}{\sin(\beta)\sin(\alpha) + \cos(\beta)\cos(\alpha)} = 1,79 \text{ kN}. \quad (1.2.27)$$

Das Beispiel soll außerdem zeigen, dass es sich empfiehlt, mit dem Einsetzen von Zahlenwerten bis zum Schluss zu warten, um mögliche Fehler bei den diversen Umformungen im Nachhinein noch erkennen zu können.

Vektorielle Berechnung der Haltekraft

Betrachte den in Abbildung 1.2.9 (oben) dargestellten Freischnitt, d. h. insbesondere das System I. Wir ergänzen bei vorgegebenem Gewicht \underline{G} und vorgegebenen Richtungen α und β die unbekannt Kräfte \underline{F} und \underline{F}_N derart, dass sich das Kräftepolygon schließt, also Gleichgewicht vorhanden ist. Nun berechnen wir die Beträge der Unbekannten, also F und F_N , aus geometrischen Überlegungen mithilfe des Sinussatzes. Der Skizze in Abbildung 1.2.10 entnimmt man, dass:

$$\frac{G}{\sin[90^\circ - (\alpha - \beta)]} = \frac{F}{\sin(\alpha)} = \frac{F_N}{\sin(90^\circ - \beta)} \quad (1.2.28)$$

und somit:

$$F = \frac{G \sin(\alpha)}{\cos(\alpha - \beta)}, \quad F_N = \frac{G \cos(\beta)}{\cos(\alpha - \beta)}. \quad (1.2.29)$$

Dass diese Gleichungen äquivalent zu den Formeln aus (1.2.26) sind, sieht man dadurch, dass man den Nenner mithilfe der Additionstheoreme trigonometrischer Funktionen umformt.

Es sei nochmals betont, dass man die Unbekannten F und F_N nicht notwendigerweise aus den Gleichgewichtsbeziehungen in Komponentenschreibweise berechnen muss. Zu dieser Methode gleichwertig ist die vektorielle Addition, wie die obere Aufgabe lehrt.

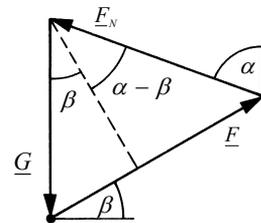


Abb. 1.2.10: Kräftepolygon.

1.2.5 Zentrale Kräftegruppe im Gleichgewicht: Verkettete Pendelstäbe

Lösung im kartesischen Koordinatensystem

Betrachte die in der Abbildung 1.2.11 dargestellte Situation zweier miteinander verketteter Pendelstäbe, die unter den Win-

keln α und β mit dem Boden befestigt sind. Sie werden am gemeinsamen Knotenpunkt k mit der Kraft \underline{F} belastet. Gesucht sind die Reaktionskräfte in den beiden Stäben, genannt \underline{S}_1 und \underline{S}_2 .

Wie in der Abbildung 1.2.11 links gezeigt, wird der Knotenpunkt zuallererst freigeschnitten. Dabei kommen die beiden Reaktionskräfte \underline{S}_1 und \underline{S}_2 überhaupt erst zum Vorschein. Merke, dass sie längs der Pendelstabachsen weisen. Ihre Richtung wurde dabei jedoch nach Gefühl eingetragen.

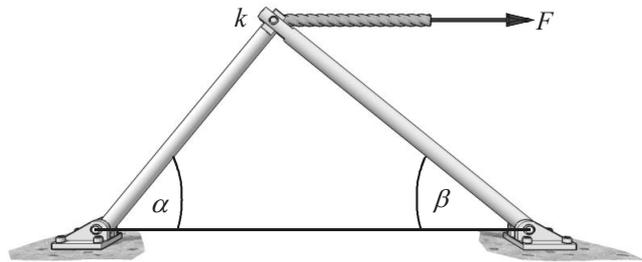
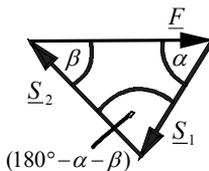
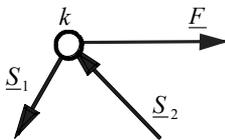


Abb. 1.2.11: Zwei verkettete Pendelstäbe.



Beim linken Stab erwarten wir nämlich, dass es sich um einen Zugstab, beim rechten, dass es sich um einen Druckstab handelt. Ein solches Gefühl kann bisweilen täuschen, insbesondere dann, wenn es sich um kompliziertere Kraftsysteme (z. B. bei Fachwerken) handelt. Die nachfolgende Rechnung mithilfe der Gleichgewichtsbedingungen (1.2.24) würde bei Wahl der falschen Richtungen allerdings ein **negatives** Vorzeichen für S_1 bzw. S_2 liefern, was uns letztendlich auf die **falsche** Annahme aufmerksam macht. Beachte jedoch, während der Auswertung ein solches negatives Vorzeichen **nicht** zu ändern. Erst **nach** Bestimmung aller Unbekannten darf dies geschehen und der Freischnitt muss neu gezeichnet werden (Umkehrung der Pfeilspitzen sich negativ ergebender Kräftebeträge). Ändert man Vorzeichen während der Auswertung der Gleichgewichtsbeziehungen, so ergibt sich ein falsches Endergebnis, und man muss die Rechnung verwerfen.

Merke außerdem: Bestimmt man die unbekanntenen Stabkräfte \underline{S}_1 und \underline{S}_2 über die Methode der Vektoraddition und wählt dabei den falschen Richtungssinn, so wird es nicht gelingen, das resultierende Kräfteck zu schließen, was dann zum erneuten Nachdenken über den Richtungssinn Anlass geben muss.

Wenden wir nun die Gleichgewichtsbedingungen (1.2.24) auf unser Problem an, so entsteht:

$$\begin{aligned}\sum F_x = 0 &\Rightarrow F - S_1 \cos(\alpha) - S_2 \cos(\beta) = 0, \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow -S_1 \sin(\alpha) + S_2 \sin(\beta) = 0.\end{aligned}\quad (1.2.30)$$

Dieses sind wieder zwei Gleichungen für zwei Unbekannte, und man findet durch Auflösen:

$$\frac{F}{\sin[180^\circ - (\alpha + \beta)]} = \frac{S_2}{\sin(\alpha)} = \frac{S_1}{\sin(\beta)} \quad (1.2.31)$$

und somit:

$$\begin{aligned}S_1 &= \frac{F \sin(\beta)}{\sin(\beta)\cos(\alpha) + \cos(\beta)\sin(\alpha)} \Rightarrow \\ S_2 &= \frac{F \sin(\alpha)}{\sin(\beta)\cos(\alpha) + \cos(\beta)\sin(\alpha)}.\end{aligned}\quad (1.2.32)$$

Alternativ lässt sich auch hier wieder die Vektoraddition benutzen, um das Ergebnis herzuleiten.

Stabkräfte vektoriell berechnet

Betrachte den in Abbildung 1.2.11 dargestellten Freischnitt. Nun ergänzen wir bei vorgegebener Kraft \underline{F} und vorgegebenen Richtungen α und β die unbekanntenen Kräfte \underline{S}_1 und \underline{S}_2 derart, dass sich das Kräftepolygon schließt, also Gleichgewicht vorhanden ist.

Die Beträge der Unbekannten, also S_1 und S_2 , können aus geometrischen Überlegungen mit Hilfe des Sinussatzes berechnet werden:

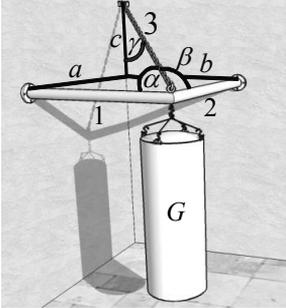
$$S_1 = \frac{F \sin(\beta)}{\sin(\alpha + \beta)}, \quad S_2 = \frac{F \sin(\alpha)}{\sin(\alpha + \beta)}.\quad (1.2.33)$$

Diese Gleichungen sind äquivalent zu den Formeln aus (1.2.31), wenn man nur die Additionstheoreme trigonometrischer Funktionen beachtet.

Nimm zur Übung nun eine falsche Richtung für eine der beiden Stabkräfte an, wiederhole die Argumente dieses Abschnitts und zeige, dass sich bei Wahl des Komponentenverfahrens ein negatives Vorzeichen für den Betrag der falsch gerichteten Stabkraft ergibt bzw. sich im Fall der Vektoraddition das Kräfteck nicht schließen lässt!



Simon STEVIN (1548 – 1620) war holländischer Mathematiker und Ingenieur. Ihm verdanken wir unter anderem das Parallelogramm der Kräfte, das er in seinem Buch „De Beghinselen der Weeghconst“ 1586 beschreibt, und Anwendungen zum Prinzip der virtuellen Arbeit (Flaschenzug). Im Anfang war STEVIN als Buchhalter und Steuergehilfe in Antwerpen bzw. Brügge tätig. Dies schien ihn auf Dauer nicht zu befriedigen, denn er begann mit 35 Jahren an der Universität in Leiden zu studieren. Seine neu erworbenen naturwissenschaftlichen Kenntnisse nutzte er danach als Quartiermeister der holländischen Armee, und er fand einen Weg, das von einer heranrückenden Invasionsarmee teilweise okkupierte Holland durch gezieltes Öffnen von Deichen unter Wasser zu setzen und damit langfristig zu befreien. Auch beriet er den Prinzen Maurice VON NASSAU in Bezug auf Festungsbauten im Krieg gegen Spanien.



1.2.6 Zentrale Kräftegruppe im Raum und Vergleich mit zwei Dimensionen

Im Abschnitt 1.1.1 wurde bereits gezeigt, wie sich eine Kraft \underline{F} im Raum mithilfe eines dreidimensionalen rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystems in ihre drei kartesischen Komponenten F_x , F_y und F_z zerlegen lässt. Es gilt:

$$\underline{F} = F_x \underline{e}_x + F_y \underline{e}_y + F_z \underline{e}_z. \quad (1.2.34)$$

Diese Zerlegung erfolgt in vollkommener Analogie zum Zweidimensionalen, also zur Gleichung (1.2.7), wonach gilt:

$$\underline{F} = F_x \underline{e}_x + F_y \underline{e}_y. \quad (1.2.35)$$

Den Betrag F eines räumlichen Kraftvektors ermittelt man gemäß dem Lehrsatz von PYTHAGORAS in drei Dimensionen aus den kartesischen Komponenten wie folgt:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}. \quad (1.2.36)$$

Auch diese Formel hat ein zweidimensionales Analogon, das in Gleichung (1.2.8) zu sehen ist:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}. \quad (1.2.37)$$

Die Winkel α , β und γ , die ein räumlicher Kraftvektor, z. B. $\underline{F} = (F_x, F_y, F_z) \equiv \underline{S}_3$ aus Abbildung 1.1.2, mit den Achsen x , y und z des kartesischen Dreibeins im Punkt A bildet, lassen sich bei Kenntnis der kartesischen Komponenten F_x , F_y und F_z sowie der Länge $F \equiv S_3$ des Kraftvektors berechnen:

$$\cos(\beta) = \frac{F_x}{F} \equiv \frac{a}{l}, \quad \cos(\alpha) = \frac{F_y}{F} \equiv \frac{b}{l}, \quad \cos(\gamma) = \frac{F_z}{F} \equiv \frac{c}{l} \quad (1.2.38)$$

mit $l = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. Also ist $\underline{S}_3 = S_3 \left(\frac{a}{l}, \frac{b}{l}, \frac{c}{l} \right)$. Wir werden das weiter unten verwenden. Die analoge Berechnung in zwei Dimensionen lautet nach Gleichung (1.2.8):

$$\cos(\alpha) = \frac{F_x}{F}, \quad \cos(90^\circ - \alpha) \equiv \sin(\alpha) = \frac{F_y}{F}. \quad (1.2.39)$$

Hier benötigt man nämlich nur einen Winkel, nämlich α , um die Lage eines Kraftvektors F zu kennzeichnen (siehe Abbildung 1.2.5).

Offensichtlich erhält man beim Quadrieren und anschließenden Addieren aller drei in Gleichung (1.2.38) gezeigten Terme die folgende Beziehung:

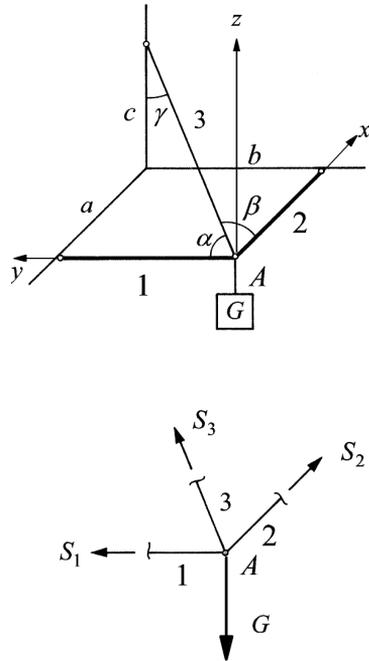


Abb. 1.2.12: Räumliche Aufhängung eines Sandsacks.

$$\cos^2(\alpha) + \cos^2(\beta) + \cos^2(\gamma) = 1. \quad (1.2.40)$$

Auch diese Gleichung hat ihr Analogon in zwei Dimensionen, wie man durch Quadrieren und Addieren der beiden Terme in (1.2.39) sieht:

$$\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1. \quad (1.2.41)$$

Im Abschnitt 1.2.2 haben wir bereits räumliche zentrale Kräftegruppen bestehend aus n -Stück Kräften $\underline{F}_1, \underline{F}_2, \dots, \underline{F}_n$ betrachtet und in Gleichung (1.2.15) gesehen, dass sich die kartesischen Komponenten der Resultierenden \underline{R} dieser Kräfte durch Summation über ihre (x, y, z) -Komponenten ermitteln lassen: Gleichungen (1.2.15), die hier der Vollständigkeit halber nochmals wiederholt seien.

$$R_x = \sum_{i=1}^n F_{ix}, \quad R_y = \sum_{i=1}^n F_{iy}, \quad R_z = \sum_{i=1}^n F_{iz}. \quad (1.2.42)$$

Die entsprechenden Gleichungen für zwei Dimensionen erhält man, wenn man die dritte Beziehung einfach ignoriert.

Schließlich: Ein räumliches zentrales Kräftesystem ist im Gleichgewicht, wenn die Resultierende aller daran beteiligten Kräfte verschwindet. Das bedeutet zeichnerisch, dass sich das räumliche Kräfteeck schließen muss, und rechnerisch, dass jede der drei kartesischen Komponenten der Resultierenden verschwindet:

$$R_x = \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0, \quad R_y = \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0, \quad R_z = \sum_{i=1}^n F_{iz} = 0. \quad (1.2.43)$$

Wieder erhält man die entsprechenden Gleichungen in zwei Dimensionen dadurch, dass man die dritte Beziehung einfach ignoriert.

Kurz schreiben wir hierfür auch gerne:

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum F_z = 0. \quad (1.2.44)$$

Ein Beispiel soll diesen Abschnitt über zentrale Kräftegruppen im Raum beschließen. Wir greifen die oben begonnene Argumentation wieder auf und betrachten erneut die in Abbildung 1.2.12 gezeigte räumliche Aufhängung. Gesucht sind die im Seil und in den beiden Pendelstäben 1 und 2 herrschenden Kräfte, die aus dem angebrachten Gewicht G resultieren. Zunächst entnimmt man der Geometrie, dass sich die gezeichneten Winkel β und γ wie folgt mit den Längenmaßen a, b und c in Verbindung setzen lassen:



Der Franzose **René DESCARTES** (auch CARTESIUS genannt, 1596 – 1650) wurde in La Haye geboren und von seinem achten Lebensjahr an an der Jesuitenschule La Flèche in Anjou ausgebildet. Hier studierte er die damaligen Klassiker und beschäftigte sich insbesondere mit Logik, ARISTOTELISCHER Philosophie und Mathematik. Es wird berichtet, dass sein Gesundheitszustand nicht allzu gut war und ihm deshalb erlaubt wurde, bis elf Uhr vormittags im Bett zu bleiben, eine Gewohnheit, die er bis zu seinem Tode beibehielt. Er studierte schließlich die Rechte an der Universität in Poitiers und schloss sich nach seinem Abschluss 1616 der Militäarakademie in Breda an. 1618 beginnt er sich wieder intensiver mit Mathematik und Mechanik zu beschäftigen, und zwar unter Anleitung des Holländers Isaac BEECKMAN. Der Aufenthalt in Holland währt zwei Jahre und danach reist DESCARTES nach Art des jungen Gentleman durch Europa, schließt sich zeitweise sogar der Bayerischen Armee an (1619), um 1628 für die nächsten zwanzig Jahre nach Holland zurückzukehren. Hier verfasst er wichtige wissenschaftliche Arbeiten, insbesondere über optische und meteorologische

Fragestellungen, als ihn die Nachricht von GALILEIS Problemen mit der katholischen Kirche und dem damit verbundenen Hausarrest erreicht, was ihn zögern lässt, intensiv vor seinem eigenen – vorzugsweise natürlichen – Tod zu publizieren. Einen solchen Vorwand, nicht zu veröffentlichen, kann der heutige Wissenschaftler nurmehr selten geltend machen.

$$\begin{aligned}\cos(\alpha) &= \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \quad \cos(\beta) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \\ \cos(\gamma) &= \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.\end{aligned}\quad (1.2.45)$$

Um die Größe dieser Kräfte zu berechnen, schneiden wir um den Punkt A frei, wie in der Abbildung gezeigt. Indem wir die Pfeile der Freischnittkräfte vom Knoten weggerichtet einzeichnen, nehmen wir an, dass es sich bei den beiden Stäben um Zugstäbe handelt. Ob diese Annahme richtig ist, wird die Rechnung erweisen. Mit den Gleichgewichtsbeziehungen (1.2.44) entsteht:

$$\begin{aligned}\sum F_x = 0: \quad S_2 + S_3 \cos(\beta) &= 0, \\ \sum F_y = 0: \quad S_1 + S_3 \cos(\alpha) &= 0, \\ \sum F_z = 0: \quad S_3 \cos(\gamma) - G &= 0.\end{aligned}\quad (1.2.46)$$

Hierin wurden die Beträge der Seil- und Pendelstabkräfte mit S_1 , S_2 und S_3 bezeichnet und als Zugkräfte angenommen (die Pfeilrichtung zeigt vom Knoten A **weg**). Einfaches Auflösen der Gleichungen nach diesen Kräften und Ersetzen der Winkel durch die geometrischen Beziehungen (1.2.45) liefert:

$$S_1 = -G \frac{b}{c}, \quad S_2 = -G \frac{a}{c}, \quad S_3 = G \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{c}.\quad (1.2.47)$$

Offensichtlich war die beim Freischnitt getroffene implizite Annahme falsch, dass es sich bei den Pendelstabkräften um Zugstäbe handelt, wie man an dem sich ergebenden Minuszeichen sieht.

1.3 Allgemeine Kräftesysteme: Gleichgewicht des starren Körpers

1.3.1 Moment beliebig verteilter Kräftegruppen im Raum

Zwei zueinander parallele Kräfte

Wir betrachten das in Abbildung 1.3.1 gezeigte ebene Problem:

An einer Scheibe greifen zwei unterschiedlich große, zueinander parallele Kräfte \underline{F}_1 und \underline{F}_2 an. Das Problem soll darin bestehen, hierzu eine Gegenkraft \underline{R} so zu bestimmen und an der Scheibe so anzubringen, dass sich dieselbe a) nicht translatorisch bewegt und b) nicht zu drehen beginnt. Es liegt nahe, zunächst einmal die Vektorsumme beider Kräfte zu bilden, also beide Pfeile aneinanderzuhängen. Damit leuchtet ein, dass der Betrag der Gegenkraft gleich der Summe der Längen beider Kräfte sein wird:

$$R = F_1 + F_2 . \quad (1.3.1)$$

Die Vektorsumme zu bilden, reicht jedoch nicht aus, um die resultierende Kraft \underline{R} vollständig zu bestimmen. Zwar kennen wir nun ihre Größe, aber die Lage ihres Angriffspunktes bzw. ihrer Wirkungslinie ist noch unbekannt. Wenn wir ohne zu überlegen die Wirkungslinie von \underline{R} zum Beispiel zu weit nach rechts legen, kann es geschehen, dass die Scheibe sich plötzlich nach links dreht. Mit anderen Worten: Der Gleichgewichtszustand würde gestört. Das aber gerade soll nicht geschehen.

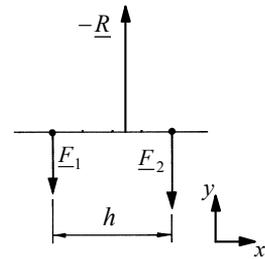


Abb. 1.3.1: Zueinander parallele Kräfte.

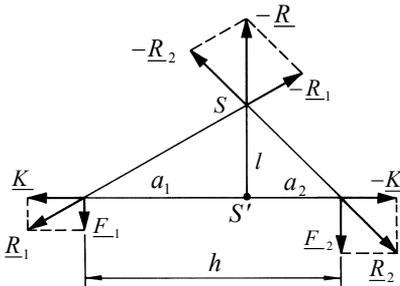


Abb. 1.3.2: Ergänzung zweier zueinander paralleler Kräfte.

Um die richtige Wirkungslinie zu finden, bedienen wir uns eines Tricks. Wie in Abbildung 1.3.2 zu sehen, führen wir in das System zwei einander entgegengesetzt gerichtete, betragsmäßig gleich große Kräfte \underline{K} und $-\underline{K}$ ein. Wir befestigen sie jeweils an den Angriffspunkten der Kräfte \underline{F}_1 und \underline{F}_2 , und da sie auf derselben Wirkungslinie liegen und einander betragsmäßig aufheben, ändert sich insgesamt nichts am Gleichgewichtszustand des Systems. Nun fassen wir \underline{F}_1 und \underline{K} sowie \underline{F}_2 und $-\underline{K}$ zu den Resultierenden \underline{R}_1 und \underline{R}_2 zusammen, welche wir, wie dargestellt, vektoriell zur Resultierenden \underline{R} addieren. Dabei ist es nötig, \underline{R}_1 und \underline{R}_2 entlang ihrer Wirkungslinie zu verschieben, und man gelangt zu einem Schnittpunkt S , der die Lage der Wirkungslinie von \underline{R} anzugeben erlaubt. Dazu projiziert



ARCHIMEDES (287 – 212 v. u. Z.) wurde in Syrakus auf Sizilien geboren, wo er auch lebte und wirkte. Von **PLUTARCH** und **LIVIOUS** wird überliefert, dass eine seiner wesentlichen Aktivitäten darin bestand, seine Heimatstadt gegen auswärtige Feinde zu verteidigen. Zur Abwehr nahender Truppen ersann er z. B. ein Katapult, mit dem er Gegenstände und Chemikalien (zur Entzündung des sogenannten archimedischen Feuers) verschoss, einen Mehrkomponentenflaschenzug, nützlich u. a. zum Versetzen der „schweren Munition“, oder einen Brennspiegel zum Anzünden ganzer Schiffsflotten. Aber auch theoretische Arbeiten konnten ihn begeistern: Er vermaß den Umfang des Kreises mithilfe von Polygonen und schätzte die **LUDOLFSche** Zahl π als zwischen $3 \frac{10}{71}$ stel und $3 \frac{1}{7}$ tel liegend ab. Auch beschäftigte er sich ohne Kenntnis der Integralrechnung mit der Berechnung des Volumens heutzutage als einfach betrachteter Körper und zeigte, dass das Volumen einer Kugel zwei Drittel des Volumens eines sie umfassen den Zylinders beträgt. Dieses Ergebnis empfand er als derart signifikant, dass er

man S einfach senkrecht auf die Verbindungslinie zwischen den Angriffspunkten der beiden Kräfte \underline{F}_1 und \underline{F}_2 . Es entsteht die Wirkungslinie SS' .

Aus der Abbildung 1.3.2 lesen wir ab, dass gelten muss:

$$\frac{a_1}{l} = \frac{K}{F_1}, \quad \frac{a_2}{l} = \frac{K}{F_2} \quad (1.3.2)$$

oder auch:

$$a_1 F_1 = a_2 F_2, \quad (1.3.3)$$

wobei die Abstände a_1 und a_2 sich auf einen Punkt S' beziehen, der auf der Verbindungslinie der Angriffspunkte der beiden gezeigten Kräfte liegt. Wir können diese Abstände ganz einfach durch Kombination der Gleichung (1.3.1) sowie (1.3.2) der Beziehung

$$h = a_1 + a_2 \quad (1.3.4)$$

berechnen und erhalten:

$$a_1 = \frac{F_2}{F_1 + F_2} h, \quad a_2 = \frac{F_1}{F_1 + F_2} h. \quad (1.3.5)$$

Wir erkennen, dass mit dem genannten Trick immer dann die Größe und die Lage der Resultierenden ermittelt werden können, wenn der Nenner in Gleichung (1.3.5) nicht verschwindet. Dieses passiert dann, wenn zwei gleich große, entgegengesetzt gerichtete Kräfte auf parallelen Wirkungslinien agieren. Hierbei handelt es sich um ein sogenanntes **Kräftepaar**, welches eine gewisse Bedeutung für die Technik hat und auf das wir später zurückkommen werden.

Im Moment wollen wir uns einem anderen Aspekt unserer Lösung zuwenden. Die in Gleichung (1.3.3) gezeigte Beziehung ist das aus der Schule bekannte **Hebelgesetz** von **ARCHIMEDES**, wonach es, um das Gleichgewicht zu wahren, nötig ist, dass die Produkte Kraft mal Hebelarm zweier am Körper angreifender Kräfte einander gleich sind.

In der Tat ist diese Beobachtung ein Spezialfall eines allgemeineren Gesetzes für den Fall beliebig vieler, nicht in einem gemeinsamen Angriffspunkt wirkender Kräfte, der Bedingung des sogenannten **Momentengleichgewichtes**.

Definition des Momentes einer Kraft

Wir lassen uns vom Hebelgesetz nach ARCHIMEDES leiten. Offenbar war das Produkt aus einer Kraft und ihrem dazugehörigen Hebelarm, der senkrecht auf ihrer Wirkungslinie stand, von besonderer Bedeutung. In diesem Sinne definieren wir den Betrag des Momentes $M^{(D)}$ einer Kraft \underline{F} bezüglich eines Drehpunkts D wie folgt (Abbildung 1.3.3):

$$|M^{(D)}| = Fh. \quad (1.3.6)$$

Dabei greift die Kraft in der Ebene an einer Scheibe an, h ist der Abstand senkrecht zur Wirkungslinie dieser Kraft. Man beachte, dass es zur Charakterisierung eines Momentes nötig ist, den **Drehpunkt** anzugeben, denn je nach Wahl des Drehpunktes relativ zur Wirkungslinie wird sich ein anderer Zahlenwert ergeben. Daher der Index D am Symbol M . Der Drehpunkt D kann, aber muss nicht in der Scheibe liegen. Jeder Punkt der Ebene kann zum Drehpunkt gewählt werden. Später werden wir sehen, dass es bei Gleichgewichtsberechnungen günstige und weniger günstige Wahlen des Drehpunktes gibt.

Die Einheit des Momentes ergibt sich aus den Einheiten der es zusammensetzenden Größen **Kraft mal Abstand**, also $\text{N} \cdot \text{m}$ oder auch $\text{kN} \cdot \text{m}$.

Genau wie Kraftkomponenten hat auch der Zahlenwert eines Momentes ein Vorzeichen. Die Vorzeichenwahl ist willkürlich. Wir wollen im Folgenden vereinbaren, dass für den Fall einer links um den Punkt D drehenden Kraft, die also **entgegen dem Uhrzeigersinn** angreift, sich ein **positiver Zahlenwert** ergibt und umgekehrt. Betrachte zum Beispiel die Kraft F in Abbildung 1.3.3 10 kN sowie der Hebelarm 1 m , dann ist das zum Punkt D gehörige Moment gerade $-10 \text{ kN} \cdot \text{m}$.

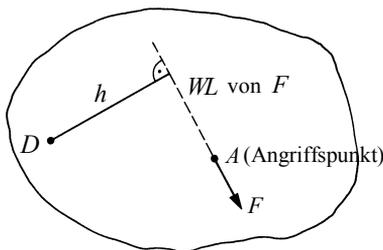


Abb. 1.3.3: Definition des Moments einer Kraft in der Ebene.

verlangte, man möge ein Bild besagten Zylinders nebst Kugel auf seinem Grabstein anbringen. Seine Beweismethoden waren für damalige Zeiten recht unorthodox. Gerne arbeitete er mit Modellen geometrischer Körper, die er aus Holz oder Metall anfertigte und deren Volumen er vermaß, indem er sie in Wasser eintauchte und das Volumen der verdrängten Flüssigkeitsmenge bestimmte. Solches führte er auch in der griechischen Akademie vor, woraufhin entsetztes Schweigen eintrat und sich schließlich nur noch der junge APOLLONIUS von Perge aufzuraffen vermochte, um schockiert festzustellen, man möge ARCHIMEDES auf immer aus der Akademie verbannen, da er den edlen Geist der Mathematik mit schöner Materie beschmutze. Eine solche Denkweise ist jedoch nicht dem Altertum vorbehalten, auch heute noch kann man in akademischen Zirkeln aus ähnlichen Gründen leicht zu einer Persona non grata werden. Dem Internet entnehmen wir ferner: „Oftentimes ARCHIMEDES' servants got him against his will to the baths, to wash and anoint him, and yet being there, he would ever be drawing out of the geometrical figures, even in the very embers of the chimney. And while they were anointing of him with oils and sweet savors, with his fingers he drew lines upon his naked body, so far was he taken from himself, and brought into ecstasy or trance, with the delight he

had in the study of geometry.“ Dieses Zitat passt zu folgender Anekdote, wonach Archimedes das nach ihm benannte Auftriebsgesetz beim Baden „erlebt und erfüllt“ habe und aus der Wanne gesprungen sei, um „heureka!“ rufend nackt durch die Straßen zu laufen, auch in damaliger Zeit ein etwas ungewöhnliches Verhalten. Und selbst über ARCHIMEDES' Tod wird von PLUTARCH Kurioses berichtet. Während des zweiten punischen Krieges wurde auch Syrakus belagert und schließlich eingenommen. Dabei drang ein römischer Soldat in ARCHIMEDES' Haus ein (siehe Bild) und versuchte, dessen Interesse von einem mathematischen Problem weg auf das umgebende Kampfgeschehen zu lenken. Daraufhin sprach ARCHIMEDES die berühmten Worte „Noli perturbare circulos meos!“ , was der Soldat mit einem tödlichen Schwerthieb beantwortete. Dies ist zugegebenermaßen ein etwas radikales Verhalten, auch für Kritiker der Wissenschaft.

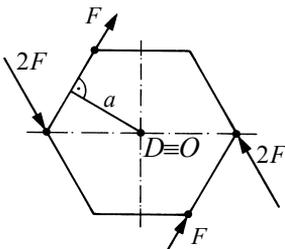


Abb. 1.3.5: Kräfte an Sechseckscheibe.

Zum Gesamtmoment ebener Kräftesysteme

Um das in Abbildung 1.3.4 gezeigte Gesamtmoment aller Kräfte auf die Scheibe bezüglich des Drehpunktes D zu ermitteln, ist es nötig, alle einzelnen Momente gemäß der Grunddefinition (1.3.6) zu ermitteln und dann mit dem richtigen Vorzeichen zu addieren. Wir schreiben für das resultierende Moment:

$$M_R^{(D)} = \sum_{i=1}^n M_i^{(D)} = \sum M^{(D)} = \sum_{i=1}^n (\pm) h_i \cdot F_i. \tag{1.3.7}$$

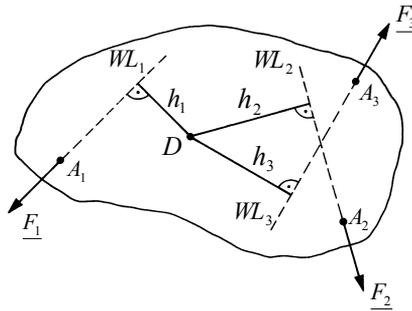


Abb. 1.3.4: Von mehreren Kräften ausgeübtes Moment auf einen Drehpunkt D .

Kräfte an einer Sechseckscheibe

Betrachte die in Abbildung 1.3.5 gezeigte Situation. Gesucht ist das Gesamtmoment für die Sechseckscheibe relativ zu ihrem Zentrum O . Wir finden:

$$M_R^O = 2Fa - Fa + Fa + 2Fa = 4Fa. \tag{1.3.8}$$

Das Gesamtmoment bezüglich des Ursprunges O verschwindet also nicht. Und in der Tat, würde man die Scheibe in O drehbar lagern, so würde sie sich zu drehen beginnen, und zwar entgegen dem Uhrzeiger. Wünscht man, dass dieses nicht geschieht, dann muss man im Ursprung O dafür sorgen, dass ein entgegengesetztes Moment $-4Fa$ geeignet angebracht wird, etwa dadurch, dass man mit einem Momentenschüssel „nach rechts“ dreht, und zwar mit der Stärke $-4Fa$.

Beispiel: Das Moment eines Kräftepaares

Betrachte die in Abbildung 1.3.6 gezeigte Situation: Das Moment eines sog. Kräftepaares, d. h. zwei gleich große, aber entgegengesetzte Kräfte in der Ebene, die nicht auf derselben Wir-

kungslinie liegen, soll für einen beliebigen Drehpunkt D in der Ebene berechnet werden.

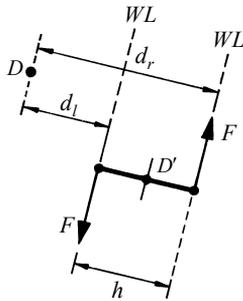


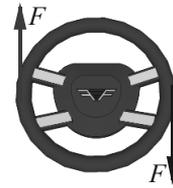
Abb. 1.3.6: Moment eines Kräftepaars mit beliebigem Drehpunkt.

Mit den Bezeichnungen der Abbildung wird:

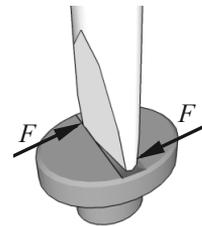
$$M^D = Fd_r - Fd_l = F(d_r - d_l) = Fh. \tag{1.3.9}$$

Das Ergebnis hängt somit nur von dem senkrechten Abstand der beiden Kräfte ab, gleichgültig, welchen Drehpunkt D man wählt. Man beachte: Das Kräftepaar hat eine verschwindende Kräfteersultierende, es ist die Verkörperung eines **reinen** Momentes, d. h., es beeinflusst nicht das Ergebnis für die Kräfteersultierende gemäß der Gleichung (1.2.1), wohl aber die Berechnung eines Gesamtmomentes für eine Scheibe gemäß der Gleichung (1.3.7). Da die Resultierende eines Kräftepaars verschwindet, kann das Moment $M = Fh$ beliebig in der Ebene verschoben werden.

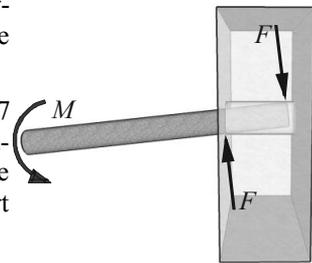
Technische Beispiele für ein Kräftepaar sind in Abbildung 1.3.7 zu sehen, nämlich ein Lenkrad, das gedreht wird, ein Schraubendreher, der mit etwas Spiel auf den Schlitz einer Schraube wirkt, oder ein Balken, der in einer Wand eingespannt gelagert ist und dessen Ende verdreht wird.



Lenkrad



Schraubendreher



Balken mit Spiel

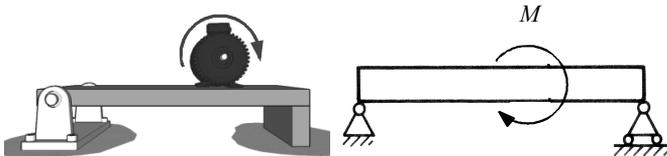


Abb. 1.3.8: Anfahrender Motor.

Abb. 1.3.7: Beispiele für Kräftepaare.

Die Wirkung eines anfahrenen Motors, der sich auf einem Balken befindet, entspricht auch einem reinen, plötzlich angreifenden Moment, und wir sollten an das Modell eines Kräftepaars

zurückdenken, wenn wir solche reinen Momente in eine Zeichnung einbringen, ohne dass irgendwelche sie erzeugenden Kräfte direkt sichtbar sind: Abbildung 1.3.8.

1.3.2 Gleichgewichtsbedingungen für beliebige Kräftesysteme in der Ebene

Wir betrachten die in Abbildung 1.3.9 gezeichnete ebene Scheibe, die sich unter der kombinierten Wirkung von Kräften und Momenten in der Ebene befindet.

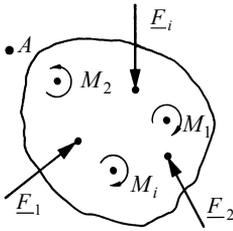


Abb. 1.3.9: Ebene Scheibe unter Wirkung von angreifenden Kräften und Momenten.

Damit diese Scheibe in sich ruht, d. h. sich im statischen Gleichgewicht befindet, ist es nötig, dass die Vektorresultierende aller Kräfte sowie die bezüglich eines **beliebigen** Punktes A ermittelte Momentensumme verschwindet. Die letzte Forderung leuchtet sofort ein, denn würde die Momentensumme bezüglich A nicht verschwinden, so hätte dies eine Drehung des Körpers um den Punkt A zur Folge, und das widerspricht der Forderung nach statischem Gleichgewicht. Um unsere Gleichgewichtsbedingungen mathematisch auswerten zu können, wählen wir ein beliebiges Koordinatensystem mit dem Ursprung in B und schreiben (siehe Abbildung 1.3.10):

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0, \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0, \quad \sum_{i=1}^n M_i^{(A)} = 0. \quad (1.3.10)$$

Oder auch kurz:

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum M^{(A)} = 0. \quad (1.3.11)$$

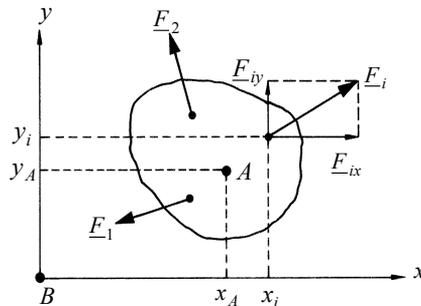


Abb. 1.3.10: Gleichgewichtsbedingungen formuliert im kartesischen Koordinatensystem.

Wir wollen untersuchen, ob die Wahl des Drehpunktes A einen Einfluss auf die Gleichgewichtsbedingungen hat. Dazu bilden wir gemäß der Abbildung 1.3.10 die Momentensumme bezüg-

lich A , wobei das Vorzeichen der Teilmomente gemäß der in Abbildung 1.3.10 gezeigten Richtung der Kraft \underline{F}_i entschieden wurde:

$$\sum_{i=1}^n M_i^{(A)} = \sum_{i=1}^n \{ (x_i - x_A) F_{iy} - (y_i - y_A) F_{ix} \} =$$

$$\sum_{i=1}^n (x_i F_{iy} - y_i F_{ix}) - x_A \sum_{i=1}^n F_{iy} + y_A \sum_{i=1}^n F_{ix} = \quad (1.3.12)$$

$$\sum_{i=1}^n M_i^{(B)} - x_A \sum_{i=1}^n F_{iy} + y_A \sum_{i=1}^n F_{ix} .$$

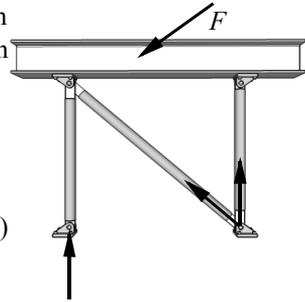


Abb. 1.3.11: a) Statistisch bestimmt, 3 Stützkräfte.

Sind also die Kräftegleichgewichtsbedingungen erfüllt, so folgt, dass auch die Momentensumme um B verschwinden muss. Die Wahl des Angelpunktes ist also **unwesentlich** für die Formulierung der Momentenbedingung.

Einige Merksätze sollen am Abschluss dieses Abschnitts stehen:

- Anstelle der Gleichgewichtsbedingungen mit zwei Kräften in x - bzw. y -Richtung und einer Momentenbedingung kann man auch nur eine Kräftebedingung und dafür zwei Momentenbedingungen um verschiedene Drehpunkte auswerten, etwa:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0, \quad \sum_{i=1}^n M_i^{(A)} = 0, \quad \sum_{i=1}^n M_i^{(B)} = 0. \quad (1.3.13)$$

- Niemals jedoch darf man drei Kräfte- oder drei Momentenbedingungen ansetzen. Bei einer Scheibe darf eine vierte Gleichung zur Kontrollrechnung verwendet werden.
- Ist statisches Gleichgewicht an mehreren Scheiben nachzuweisen (siehe Abbildung 1.3.12), so gibt es für jede Scheibe drei Gleichgewichtsbedingungen, die man auswertet, nachdem man die Scheiben durch Freischnitt voneinander getrennt hat.
- Bei der Auswertung der Momentenbedingung kann das Moment einer Kraft (Kraft mal Hebelarm) oder die Momente aus den Komponenten der Kraft zur Berechnung herangezogen werden.
- Wird ein Scheibensystem mit mehr als drei Stützkäften gehalten, so ist es mit drei Gleichgewichtsbedingungen nicht mehr zu berechnen. Das System ist statisch unbestimmt. Die fehlenden Gleichungen sind Verformungsbedingungen: Abbildung 1.3.11 b).

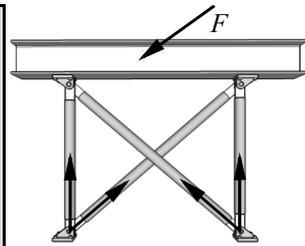


Abb. 1.3.11: b) Statistisch unbestimmt, 3+1 Stützkräfte.

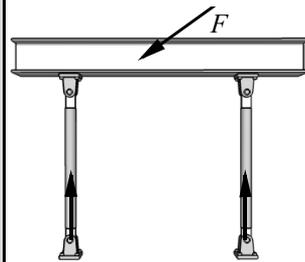


Abb. 1.3.11: c) Statistisch überbestimmt, System klappt um.

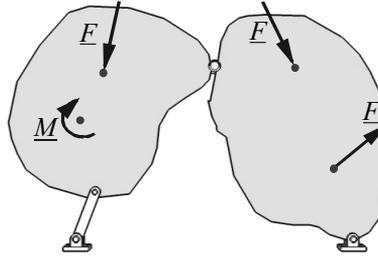
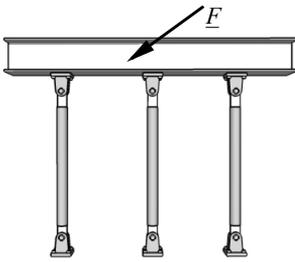


Abb. 1.3.12: Statisches Gleichgewicht an mehreren Scheiben.

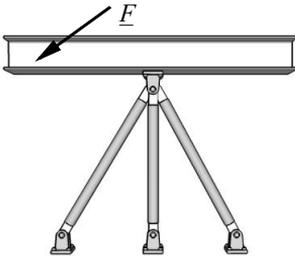


Abb. 1.3.11: c) und d) Fehlerhafte Stützung: Die Wirkungslinien der drei Stützkkräfte dürfen nicht durch einen Punkt gehen, auch wenn dieser im Unendlichen liegt (parallele Stützen).

1.3.3 Gleichgewicht illustriert an einem System von Pendelstäben

Betrachte das in Abbildung 1.3.13 gezeigte System einer durch drei Pendelstäbe abgestützten Gabel, die unter dem Einfluss einer äußeren Kraft F steht.

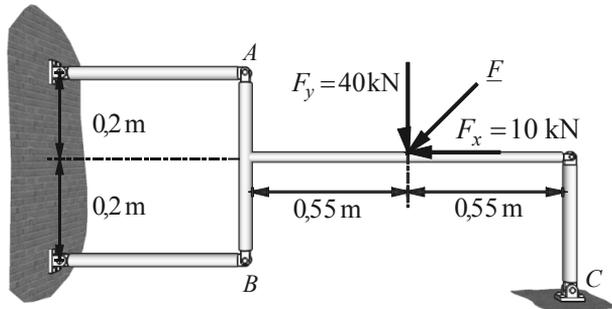


Abb. 1.3.13: System von Pendelstäben.

Wir interessieren uns für die in den Pendelstäben A , B und C herrschenden Kräfte, die wir mit F_A , F_B und F_C bezeichnen.

Um diese Kräfte herauszufinden, wird zunächst, wie in Abbildung 1.3.14 gezeigt, freigeschnitten, und danach werden die Gleichgewichtsbedingungen ausgewertet, und zwar bezüglich des ebenen kartesischen Koordinatensystems, das in der Abbildung zu sehen ist.

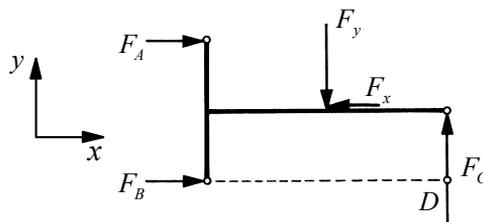


Abb. 1.3.14: Freischnitt des Systems von Pendelstäben.

Man erhält für das Kräftegleichgewicht in x - und y -Richtung:

$$\begin{aligned}\sum F_x = 0: & F_A + F_B - 10 \text{ kN} = 0, \\ \sum F_y = 0: & -40 \text{ kN} + F_C = 0.\end{aligned}\quad (1.3.14)$$

Aus der zweiten Gleichung finden wir:

$$F_C = 40 \text{ kN}.\quad (1.3.15)$$

Die Pfeilspitze war also richtig am Stab C eingetragen. Um die beiden anderen Stabkräfte zu bestimmen, benötigen wir noch eine weitere Gleichung. Das ist die Momentenbedingung. Um möglichst wenig rechnen zu müssen und gleichzeitig wenig neue Unbekannte in die Momentengleichung einzubringen, wählen wir den im Freischnitt eingezeichneten Punkt D als Drehpunkt. Man erhält so:

$$\begin{aligned}\sum M^{(D)} = 0: \\ -F_A \cdot 0,4 \text{ m} + 40 \text{ kN} \cdot 0,55 \text{ m} + 10 \text{ kN} \cdot 0,2 \text{ m} = 0.\end{aligned}\quad (1.3.16)$$

Als Endergebnis folgt:

$$F_A = 60 \text{ kN}, \quad F_B = -50 \text{ kN}.\quad (1.3.17)$$

Die Pfeilspitze der Stabkraft A war korrekt, wohingegen die Pfeilspitze der Stabkraft B sich nachträglich als falsch gewählt herausstellt. Wir fassen zusammen: Es handelt sich bei A um einen Druckstab, bei B um einen Zugstab und bei C wieder um einen Druckstab.

1.3.4 Vektorielle Deutung des Momentes

Definition des Momentenvektors

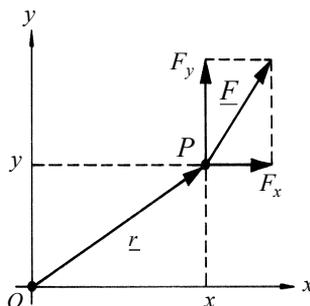


Abb. 1.3.15: Zur vektoriellen Deutung des Momentes.

Betrachte die Abbildung 1.3.15: Eine Kraft \underline{F} greift in der (x, y) -Ebene in dem durch den Ortsvektor $\underline{r} = (x, y, 0)$ ge-

kennzeichneten Punkt P an. Wir wollen das Moment dieser Kraft bezüglich des Ursprunges O des Koordinatensystems berechnen.

Es gilt offenbar:

$$M^{(0)} = x F_y - y F_x = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & y & 0 \\ F_x & F_y & 0 \end{vmatrix}. \quad (1.3.18)$$

Dabei haben wir die Summe aus Produkten von Abständen und Kräften mithilfe einer 3×3 -Determinante umgeschrieben. Diese Darstellung lässt eine neue Interpretation des Momentes zu. Identifizieren wir nämlich die erste Zeile dieser Determinante als Einheitsvektor in z -Richtung, also:

$$(0, 0, 1) \rightarrow \underline{e}_z, \quad (1.3.19)$$

und die zweite Zeile als zum Fußpunkt der Kraft führenden Ortsvektor:

$$(x, y, 0) \rightarrow \underline{r}, \quad (1.3.20)$$

und die dritte Zeile schließlich als in der Ebene liegenden Kraftvektor:

$$(F_x, F_y, 0) \rightarrow \underline{F}, \quad (1.3.21)$$

so können wir einen Momentenvektor als das Kreuzprodukt aus Orts- und Kraftvektor wie folgt definieren:

$$\underline{M}^{(0)} = \underline{r} \times \underline{F}. \quad (1.3.22)$$

Diese Definition eines Momentenvektors ist sofort auf drei Dimensionen verallgemeinerungsfähig, wie wir weiter unten sehen werden. Zuvor jedoch sollen einige Bemerkungen zum Kreuzprodukt zwischen zwei Vektoren folgen, welche die obige Definition des Momentenvektors aus der Determinantenbedingung (1.3.18) heraus klar werden lassen.

Bemerkungen zum Kreuzprodukt von Vektoren

Betrachten wir also zwei beliebige Vektoren im Raum, genannt \underline{a} und \underline{b} , so wie in der Abbildung 1.3.16 gezeigt. Durch das sogenannte **Kreuzprodukt** wird diesen beiden Vektoren ein dritter Vektor zugeordnet, den wir \underline{c} nennen wollen. Wir schreiben:

$$\underline{c} = \underline{a} \times \underline{b}. \quad (1.3.23)$$

Dieses ist zunächst einmal nur eine formale Definition. Sie wird erst nützlich, wenn wir \underline{c} als Vektor eindeutig kennzeichnen.

Und dazu ist es erforderlich, seinen Betrag und seine Richtung festzulegen.

Sein Betrag wird durch die folgende Gleichung aus den Längen der beiden Vektoren \underline{a} und \underline{b} sowie dem von ihnen eingeschlossenen Winkel φ berechenbar:

$$c = a b \sin(\varphi). \quad (1.3.24)$$

Man überlegt sich, dass die so definierte Länge c betragsmäßig gleich der Fläche des von \underline{a} und \underline{b} aufgespannten Parallelogramms ist (siehe Abbildung 1.3.16):

$$A = a h = a b \sin(\varphi). \quad (1.3.25)$$

Dabei bezeichnet h die Parallelogrammhöhe. Für die Richtung von \underline{c} vereinbaren wir erstens, dass dieser Vektor sowohl senkrecht zu \underline{a} als auch senkrecht zu \underline{b} stehen soll. Zweitens sollen die Vektoren \underline{a} , \underline{b} und \underline{c} (in dieser Reihenfolge) ein **Rechtssystem** bilden. Genau das ist in der Abbildung 1.3.16 zu sehen.

Bis jetzt haben wir nicht von der Komponentendarstellung der Vektoren \underline{a} , \underline{b} und \underline{c} geredet. Das müssen wir jetzt nachholen. Zunächst ist klar, dass aus den drei Vektoren bezüglich eines räumlichen dreidimensionalen Koordinatensystems eine Komponentendarstellung der Form

$$\begin{aligned} \underline{a} &= (a_x, a_y, a_z), \\ \underline{b} &= (b_x, b_y, b_z), \\ \underline{c} &= (c_x, c_y, c_z) \end{aligned} \quad (1.3.26)$$

folgt.

Wir fragen uns, wie man die Komponenten des Vektors \underline{c} durch die Komponenten der beiden anderen Vektoren ausdrücken kann. Es lässt sich zeigen, dass gilt:

$$\begin{aligned} \underline{c} &= (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x) \\ &= \begin{vmatrix} \underline{e}_x & \underline{e}_y & \underline{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (1.3.27)$$

Diese auf den ersten Blick so kompliziert anmutende Kombination der verschiedenen Komponenten lässt sich also auf elegante Weise durch eine Determinante ersetzen, wobei die drei Basisvektoren \underline{e}_x , \underline{e}_y , \underline{e}_z verwendet werden. Wie aber entsteht dieses Ergebnis? Dazu sei erinnert, dass die Komponentenschreib-

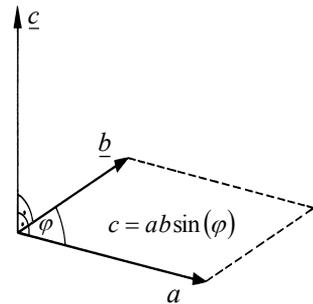


Abb. 1.3.16: Das Kreuzprodukt.

weise (1.3.26) für unsere drei Vektoren \underline{a} , \underline{b} und \underline{c} nichts anderes bedeutet als:

$$\begin{aligned}\underline{a} &= a_x \underline{e}_x + a_y \underline{e}_y + a_z \underline{e}_z, \\ \underline{b} &= b_x \underline{e}_x + b_y \underline{e}_y + b_z \underline{e}_z, \\ \underline{c} &= c_x \underline{e}_x + c_y \underline{e}_y + c_z \underline{e}_z.\end{aligned}\tag{1.3.28}$$

Setzt man diese Darstellung in das Kreuzprodukt (1.3.23) ein, so erhält man Ausdrücke der Form $(a_i \underline{e}_i) \times (b_j \underline{e}_j)$, wobei i oder j für jede beliebige Kombination der Indizes x , y oder z stehen darf. Man darf Zahlen einfach vor das Kreuzprodukt ziehen, also für den letzten Ausdruck schreiben: $a_i b_j (\underline{e}_i \times \underline{e}_j)$. Nun bedenken wir die Grunddefinition des Kreuzprodukts und wenden sie auf Einheitsvektoren an. Da der Winkel zwischen den beiden Einheitsvektoren 0° oder 90° beträgt, ist die Länge des aus $\underline{e}_i \times \underline{e}_j$ resultierenden Vektors entweder null oder eins, und er steht senkrecht auf \underline{e}_i und \underline{e}_j , sodass die drei ein Rechtssystem bilden. In einem Satz: Wenn gilt $i \neq j$, ist der Vektor $\underline{e}_i \times \underline{e}_j$ bis auf das Vorzeichen gleich dem noch fehlenden Einheitsvektor \underline{e}_k , ansonsten gleich dem Nullvektor, z. B.:

$$\underline{e}_x \times \underline{e}_y = \underline{e}_z, \quad \underline{e}_z \times \underline{e}_y = -\underline{e}_x, \quad \underline{e}_x \times \underline{e}_x = \underline{0}.\tag{1.3.29}$$

Betrachten wir einen Spezialfall und nehmen an, dass die beiden Vektoren \underline{a} und \underline{b} in der (x, y) -Ebene liegen, dass also gilt:

$$\underline{a} = (a_x, a_y, 0), \quad \underline{b} = (b_x, b_y, 0).\tag{1.3.30}$$

Gleichung (1.3.27) reduziert sich dann auf:

$$\underline{c} = (0, 0, a_x b_y - a_y b_x) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \underline{e}_z \\ a_x & a_y & 0 \\ b_x & b_y & 0 \end{vmatrix}.\tag{1.3.31}$$

Das heißt, der aus dem Kreuzprodukt von \underline{a} und \underline{b} resultierende Vektor \underline{c} besitzt nur Komponenten in z -Richtung. Genau diese Situation haben wir jedoch im vorangegangenen Abschnitt betrachtet. Der Vektor \underline{a} entsprach dem Ortsvektor \underline{r} , der Vektor \underline{b} dem Kraftvektor \underline{F} und beide befanden sich in der (x, y) -Ebene. Der Momentenvektor steht senkrecht zu beiden, wobei \underline{r} , \underline{F} und $\underline{M}^{(0)}$ (in dieser Reihenfolge) ein Rechtssystem bilden.

Die Länge von $\underline{M}^{(0)}$ wird gemäß der Formel (1.3.18) berechnet. Lagen nun \underline{r} und \underline{F} beliebig im Raum, d. h., greift der Kraftvektor in beliebiger Richtung an einem Ortspunkt an (beides relativ zu einem externen dreidimensionalen Koordinatensystem), so greift die allgemeine Definition (1.3.27) für das Kreuzprodukt und wir schreiben:

$$\begin{aligned} \underline{M}^{(0)} &= (yF_z - zF_y, \quad zF_x - xF_z, \quad xF_y - yF_x) \\ &= \begin{vmatrix} \underline{e}_x & \underline{e}_y & \underline{e}_z \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (1.3.32)$$

Zu beachten ist, dass die Richtung des Momentenvektors durch die Richtung des Ortsvektors und des Kraftvektors **sowie** durch die Reihenfolge beider festgelegt ist. Man kann sich das mit der **Rechtehandregel** klarmachen: Um die Richtung des Momentenvektors zu finden, muss man den Ortsvektor mit der rechten Handfläche auf den Kraftvektor drehen. Dann zeigt der Daumen in Richtung des Momentenvektors.

Man beachte, dass die Deutung des Momentes als eine Art Drehvektor (man spricht auch von einem **axialen Vektor**) in einem gewissen Sinne unausweichlich war, denn schließlich hatten wir weiter oben verabredet, dass Beiträge zu einem Moment in der Ebene positiv zu zählen sind, wenn die betreffende Kraft links um einen Angelpunkt dreht, und ansonsten negativ.

Greifen mehrere Kräfte \underline{F}_i an verschiedenen Punkten \underline{r}_i (gemessen am Ursprung eines kartesischen Dreibeins) an, so führt jede auf einen Momentenvektor \underline{M}_i , die dann im Sinne einer vektoriellen Addition zu einem Gesamtmomentenvektor $\underline{M}^{(R)}$ addiert werden können. Wir schreiben:

$$\underline{M}^{(R)} = \sum_{i=1}^n \underline{M}_i = \sum_{i=1}^n \underline{r}_i \times \underline{F}_i. \quad (1.3.33)$$

Ein Quader unter dem Einfluss äußerer Kräfte

Betrachte den in Abbildung 1.3.17 gezeigten Quader mit den Kantenlängen a , a , $2a$, in dessen einer Ecke sich ein Dreibein befindet.

Bezüglich dieses Dreibeins ergibt sich die Komponentendarstellung für die Kraft- und Ortsvektoren wie folgt:

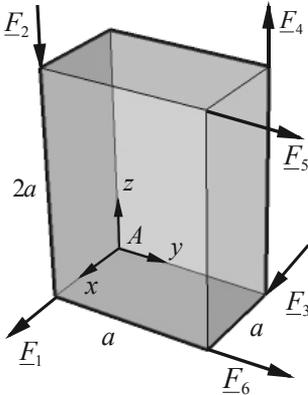


Abb. 1.3.17: Ein Quader unter dem Einfluss äußerer Kräfte.

$$\begin{aligned} \underline{F}_1 &= (F, 0, 0), \quad \underline{F}_2 = (0, 0, -F), \\ \underline{F}_3 &= (2F, 0, 0), \quad \underline{F}_4 = (0, 0, 2F), \\ \underline{F}_5 &= (0, 3F, 0), \quad \underline{F}_6 = (0, 3F, 0). \end{aligned} \quad (1.3.34)$$

$$\begin{aligned} \underline{r}_1 &= (a, 0, 0), \quad \underline{r}_2 = (a, 0, 2a), \\ \underline{r}_3 &= (0, a, 0), \quad \underline{r}_4 = (0, a, 2a), \\ \underline{r}_5 &= (a, a, 2a), \quad \underline{r}_6 = (a, a, 0). \end{aligned} \quad (1.3.35)$$

Die Kraftresultierende ergibt sich somit zu:

$$\begin{aligned} \underline{R} &= (3F, 6F, F), \\ R &= \sqrt{9F^2 + 36F^2 + F^2} = \sqrt{46}F. \end{aligned} \quad (1.3.36)$$

Wir erhalten für die Momentenvektoren der einzelnen Kräfte bezogen auf A:

$$\begin{aligned} \underline{M}_1 &= (0, 0, 0), \quad \underline{M}_2 = (0, aF, 0), \\ \underline{M}_3 &= (0, 0, -2aF), \quad \underline{M}_4 = (2aF, 0, 0), \\ \underline{M}_5 &= (-6aF, 0, 3aF), \quad \underline{M}_6 = (0, 0, 3aF). \end{aligned} \quad (1.3.37)$$

Damit ergibt sich der resultierende Momentenvektor zu:

$$\begin{aligned} \underline{M}_R^{(A)} &= (-4, 1, 4)aF, \\ M_R^{(A)} &= \sqrt{16+1+16}aF = \sqrt{33}aF. \end{aligned} \quad (1.3.38)$$

Wir stellen fest, dass der Quader geeignet gelagert werden muss, damit er sich nicht in Bewegung setzt. Er würde nämlich in translatorische Bewegung versetzt, da die Kräfte resultierende nicht verschwindet, und außerdem in Rotation geraten, da der resultierende Momentenvektor nicht gleich dem Nullvektor ist.

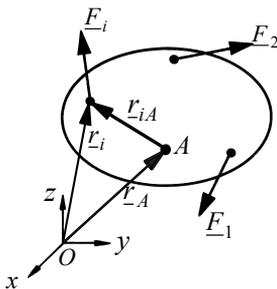


Abb. 1.3.18: Allgemeines Kräftesystem im Raum.

1.3.5 Allgemeine Kräftegruppen im Raum

Zusammenfassung der Gleichgewichtsbedingungen

Betrachten wir ein allgemeines Kräftesystem im Raum (siehe Abbildung 1.3.18). Eine solche Kräftegruppe befindet sich im Gleichgewicht, wenn sowohl die resultierende Kraft als auch das resultierende Moment bezüglich eines beliebigen Punktes A verschwinden:

$$\sum_{i=1}^n \underline{F}_i = \underline{0}, \quad \sum_{i=1}^n \underline{M}_i^{(A)} = \underline{0}, \quad \text{mit } \underline{M}_i^{(A)} = \underline{r}_{iA} \times \underline{F}_i. \quad (1.3.39)$$

In Komponenten bezüglich eines kartesischen Dreibeins geschrieben, lauten diese Gleichungen: